8. **Ковпак В. И.** Прогнозирование жаропрочности металлических материалов.— Киев: Наук. думка, 1981.
9. **Бадаев А. Н., Голубовский Е. Р., Баумштейн М. В., Булыгин И. П.** О статистическом моделировании характеристик ползучести конструкционных материалов // Пробл. прочности.— 1982.— № 5.— С. 16—20.
10. **Шестериков С. А., Мельников Г. П.** К выбору уравнения состояния при ползучести // Пробл. прочности.— 1980.— № 6.— С. 77—81.
11. **Федоров В. В.** Термодинамические аспекты прочности и разрушения твердых тел.— Ташкент: Фан, 1979.
12. **Федоров В. В.** Кинетика повреждаемости и разрушения твердых тел.— Ташкент: Фан, 1985.
13. **Соснин О. В.** Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Сообщение 1. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов // Пробл. прочности.— 1973.— № 5.— С. 45—49.
14. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.
15. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.— М.: Наука, 1969.— Т. 2.
16. **Chaboche J.-L.** Continuous damage mechanics — a tool to describe phenomena before crack initiation // Nucl. Eng. and Des.— 1981.— V. 63, N 2.— P. 233—247.
17. **Закс Л.** Статистическое оценивание.— М.: Статистика, 1976.
18. **Кукинов А. М.** Применение порядковых статистик и ранговых критериев для обработки наблюдений // Поиск зависимостей и закономерностей и оценка погрешностей.— М.: Наука, 1985.— С. 79—83.
19. **Пухов Г. Е., Хатиашвили Ц. С.** Критерии и методы идентификации объектов.— Киев: Наук. думка, 1979.
20. **Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М.** Методы оптимизации.— М.: Наука, 1978.
21. **Радченко В. П., Кузьмин С. В.** Структурная модель накопления повреждений и разрушения при ползучести // Пробл. прочности.— 1989.— № 10.— С. 18—23.

г. Самара *Поступила 3/VII 1992 г., в окончательном варианте — 18/XI 1992 г.*

УДК 539.3

А. М. Михайлов

ДЛИННОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА

В [1] с помощью правдоподобных соображений [2] выведены уравнения равновесия, а в [3, 4] — уравнения движения однонаправленного композита. Они проще точных уравнений теории упругости, благодаря чему удалось детально исследовать ряд задач о движении и разрушении композита [3—10]. В настоящей работе показано, что уравнения [1, 3, 4] являются длинноволновым приближением уравнений теории упругости. Их целесообразно использовать, если ширина связующего H между армирующими волокнами достаточно мала по сравнению с характерным масштабом изменения решения вдоль направления армирования y. Указанное соотношение масштабов обеспечивается достаточно малым отношением жесткостей связующего и арматуры. Следует отметить, что постановка задачи об армировании упругой среды волокнами, которые описываются одномерным волновым уравнением, с самого начала заставляет считать, что модули упругости волокон намного больше, чем у армируемой среды. Действительно, при совпадении модулей получаем однородную упругую среду и одномерные уравнения теряют смысл. Примерами таких материалов являются угле- и боропластики, резинотросовые транспортерные ленты, ледовый покров водоемов, подкрепленный стальными канатами. В данной работе не предполагается, что решение медленно меняется при переходе от волокна к волокну. В последнем случае допустимо рассматривать композит как однородную сплошную среду с осредненными свойствами. Предлагаемая теория занимает промежуточное положение между теорией упругости армированной среды и теорией упругости анизотропной однородной среды, полученной «размазыванием структуры».

Ниже в постановке теории упругости решается задача о деформировании однонаправленной армированной среды под действием объемных сил. Затем предельным переходом $qH \to 0$ получаем длинноволновое приближение (q — параметр преобразования Фурье по y).

1. Пусть упругая плоскость армирована одинаковыми параллельными равноотстоящими волокнами, а объемные силы $X_j(y, t)$, $Y_j(y, t)$ распределены вдоль волокон ($-\infty < j < \infty$ — номер волокна, t — время). Считаем, что движение начинается из состояния покоя при $t = -\infty$. В частности, допустимы функции операционного исчисления, равные нулю при $t < 0$. Предполагаем, что все встречающиеся функции квадратично суммируемы по j, y, а при $t \to \pm\infty$ не превышают по модулю квадратично суммируемую по y, j, t функцию, умноженную на $\exp(t/\tau)$ (τ — положительная константа, одинаковая для всех функций). Это позволяет использовать прямое и обратное преобразование Лапласа — Фурье.

Запишем преобразование по Лапласу — Фурье уравнения изгибных и продольных колебаний j-го волокна в виде

$$q^4 u_j^{\mathrm{LF}} + \frac{12}{h^2 c^2} p^2 u_j^{\mathrm{LF}} = \frac{12}{h^2} \frac{X_j^{\mathrm{LF}}}{E} + \frac{12}{h^3} \frac{[\sigma_{xx}]_j^{\mathrm{LF}}}{E}, \tag{1.1}$$

$$q^2 v_j^{\mathrm{LF}} + \frac{p^2}{c^2} v_j^{\mathrm{LF}} = \frac{Y_j^{\mathrm{LF}}}{E} + \frac{[\sigma_{xy}]_j^{\mathrm{LF}}}{Eh}.$$

Здесь индекс LF — признак трансформанты Лапласа — Фурье; p, q — параметры преобразования; u_j, v_j — смещения j-го волокна поперек и вдоль направления армирования; c — скорость продольной волны в волокнах; E, h — модуль Юнга и ширина волокна; $[\sigma_{xx}]_j$, $[\sigma_{xy}]_j$ — скачки касательных и нормальных напряжений в связующем при переходе через j-е волокно. Скачки напряжений должны быть найдены из решения системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

описывающей движение упругой полосы при заданных смещениях волокон на ее границах.

Рассматривается плоское напряженное состояние, u, v — смещения, x — координата в связующем, перпендикулярная волокну, ν — коэффициент Пуассона, $(1-\nu)/2 = c_2^2/c_1^2$, $(1+\nu)/2 = (c_1^2 - c_2^2)/c_2^2$, c_1, c_2 — скорости продольных и сдвиговых волн в связующем.

Преобразование Лапласа — Фурье (1.2) приводит к системе

$$\frac{d^2 u^{\mathrm{LF}}}{dx^2} - \frac{1-\nu}{2} q^2 u^{\mathrm{LF}} - \frac{1+\nu}{2} iq \frac{dv^{\mathrm{LF}}}{dx} = \frac{1}{c_1^2} p^2 u^{\mathrm{LF}}, \tag{1.3}$$

$$\frac{1-\nu}{2}\frac{d^2 v^{\mathrm{LF}}}{dx^2} - q^2 v^{\mathrm{LF}} - \frac{1+\nu}{2} iq \frac{du^{\mathrm{LF}}}{dx} = \frac{1}{c_1^2} p^2 v^{\mathrm{LF}},$$

решение которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} u^{\mathrm{LF}} \\ v^{\mathrm{LF}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\alpha/q & i\alpha/q & -iq/\beta & iq/\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \exp(\alpha x) \\ A_2 \exp(-\alpha x) \\ A_3 \exp(\beta x) \\ A_4 \exp(-\beta x) \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где A_j — постоянные; $\alpha = \sqrt{(p/c_2)^2 + q^2}$; $\beta = \sqrt{(p/c_1)^2 + q^2}$; i — мнимая единица.

Вычислим касательное напряжение на левом крае полосы ($x = 0$, j — номер волокна):

$$\sigma_{xy}^{\mathrm{LF}} = \mu \left(-iqu_j^{\mathrm{LF}} + \frac{dv_j^{\mathrm{LF}}}{dx} \right) = \mu \left(-2iqu_j^{\mathrm{LF}} - \frac{ip^2}{qc_2^2} (A_1 + A_2) \right).$$

При переходе через j-е волокно смещения непрерывны, поэтому скачок касательных напряжений

$$[\sigma_{xy}]_j^{\mathrm{LF}} = -\mu \frac{ip^2}{qc_2^2} [A_1 + A_2]_j.$$

Скачок суммы $A_1 + A_2$ при переходе от одного слоя связующего к другому вызван тем, что соседние слои имеют различные смещения на несмежных краях. Аналогично скачок нормальных напряжений

$$[\sigma_{xx}]_j^{\mathrm{LF}} = \frac{2\mu}{1 - \nu} \frac{p^2}{\beta c_1^2} [A_3 - A_4]_j.$$

Для нахождения постоянных A_i служит система уравнений, правыми частями которой являются смещения u_j^{LF}, v_j^{LF}, u_{j+1}^{LF}, v_{j+1}^{LF} на левом и правом краях полосы связующего:

$$(1.5)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{i\alpha}{q} & \frac{i\alpha}{q} & -\frac{i\beta}{q} & \frac{i\beta}{q} \\ e^{\alpha H} & e^{-\alpha H} & e^{\beta H} & e^{-\beta H} \\ -\frac{i\alpha}{q} e^{\alpha H} & \frac{i\alpha}{q} e^{-\alpha H} & -\frac{i\beta}{q} e^{\beta H} & \frac{i\beta}{q} e^{-\beta H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_j^{\mathrm{LF}} \\ v_j^{\mathrm{LF}} \\ u_{j+1}^{\mathrm{LF}} \\ v_{j+1}^{\mathrm{LF}} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой системы $\Delta = -\frac{4}{q^2\beta} D(\alpha, \beta)$, где

$$D(\alpha, \beta) = [(\alpha^2\beta^2 + q^4) \operatorname{sh} \alpha H \operatorname{sh} \beta H + 2\alpha\beta q^2 (1 - \operatorname{ch} \alpha H \operatorname{ch} \beta H)].$$

Скачки напряжений являются линейными формами от u_k^{LF}, v_k^{LF} ($k = j - 1, j, j + 1$). Вычислим для примера коэффициент при v_j^{LF} в выражении $\Delta [A_1 + A_2]_j$. На основании правила Крамера решения линейной системы он равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-\alpha H} & e^{\beta H} & e^{-\beta H} \\ \frac{i\alpha}{q} e^{-\alpha H} & -\frac{iq}{\beta} e^{\beta H} & \frac{iq}{\beta} e^{-\beta H} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -e^{-\alpha H} & e^{\beta H} & e^{-\beta H} \\ \frac{i\alpha}{q} e^{-\alpha H} & -\frac{iq}{\beta} e^{\beta H} & \frac{iq}{\beta} e^{-\beta H} \end{vmatrix} - \cdots$$

Многоточие означает два аналогичных слагаемых со знаком минус, в которых H заменено на $-H$. Складывая определители попарно, имеем

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 \operatorname{sh} \alpha H & e^{\beta H} & e^{-\beta H} \\ 2\frac{i\alpha}{q} \operatorname{ch} \alpha H & -\frac{iq}{\beta} e^{\beta H} & \frac{iq}{\beta} e^{-\beta H} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 \operatorname{sh} \alpha H & e^{-\beta H} & e^{\beta H} \\ 2\frac{i\alpha}{q} \operatorname{ch} \alpha H & -\frac{iq}{\beta} e^{-\beta H} & \frac{iq}{\beta} e^{\beta H} \end{vmatrix}.$$

Во втором определителе меняем местами второй и третий столбцы, после чего меняем знаки в последней строке. Два определителя объединяются в один; раскрывая его, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4\operatorname{sh}\alpha H & e^{\beta H} & e^{-\beta H} \\ 4\dfrac{i\alpha}{q}\operatorname{ch}\alpha H & -\dfrac{iq}{\beta}e^{\beta H} & \dfrac{iq}{\beta}e^{-\beta H} \end{vmatrix} = \frac{8i}{\beta q}\left(\alpha\beta\operatorname{ch}\alpha H\operatorname{sh}\beta H - q^2\operatorname{sh}\alpha H\operatorname{ch}\beta H\right).$$

Так же вычисляются остальные коэффициенты при смещениях волокон, и скачок касательных напряжений запишем в виде

$$(1.6)\qquad [\sigma_{xy}]_j^{\mathrm{LF}} = \mu\frac{p^2}{c_2^2}P(\alpha,\beta)\left(v_{j-1}^{\mathrm{LF}} - 2Q(\alpha,\beta)\,v_j^{\mathrm{LF}} + v_{j+1}^{\mathrm{LF}} + R(\alpha,\beta)\left(u_{j+1}^{\mathrm{LF}} - u_{j-1}^{\mathrm{LF}}\right)\right),$$

где

$$(1.7)\qquad P(\alpha,\beta) = \beta\left(\alpha\beta\operatorname{sh}\beta H - q^2\operatorname{sh}\alpha H\right)/D(\alpha,\beta);$$

$$(1.8)\qquad Q(\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta\operatorname{ch}\alpha H\operatorname{sh}\beta H - q^2\operatorname{sh}\alpha H\operatorname{ch}\beta H}{\alpha\beta\operatorname{sh}\beta H - q^2\operatorname{sh}\alpha H};$$

$$(1.9)\qquad R(\alpha,\beta) = iq\,\frac{\alpha\left(\operatorname{ch}\beta H - \operatorname{ch}\alpha H\right)}{\alpha\beta\operatorname{sh}\beta H - q^2\operatorname{sh}\alpha H}.$$

Аналогично получим скачок нормальных напряжений

(1.10)

$$[\sigma_{xx}]_j^{\mathrm{LF}} = \frac{2\mu}{1-\nu}\frac{p^2}{c_1^2}P(\beta,\alpha)\left(u_{j-1}^{\mathrm{LF}} - 2Q(\beta,\alpha)\,u_j^{\mathrm{LF}} + u_{j+1}^{\mathrm{LF}} - R(\beta,\alpha)\left(v_{j+1}^{\mathrm{LF}} - v_{j-1}^{\mathrm{LF}}\right)\right).$$

Как и должно быть, коэффициент при u_j^{LF} в выражении для $[\sigma_{xy}]_j^{\mathrm{LF}}$ равен 0, так как горизонтальное смещение j-го волокна не приводит к скачку касательных напряжений на этом волокне. По аналогичным соображениям исчезает член с v_j^{LF} в выражении для $[\sigma_{xx}]_j^{\mathrm{LF}}$.

Если подставить найденные скачки напряжений в (1.1), то получим бесконечную систему линейных уравнений относительно смещений волокон u_j^{LF}, v_j^{LF}. Смещения связующего оказались исключенными. Их можно восстановить из (1.4), (1.5), задав смещения волокон, ограничивающих полосу связующего, в качестве правой части (1.5).

Полученная бесконечная система сводится к двум уравнениям с помощью дискретного преобразования Фурье по индексу j. Для этого умножаем каждое уравнение (1.1) на $\exp(ijs)$, где $-\pi < s < \pi$ — параметр преобразования, и суммируем по j уравнения каждой группы от $-\infty$ до $+\infty$. При дискретном преобразовании Фурье скачков напряжений следует учитывать, что сумма вида $(v_{j+1}^{\mathrm{LF}} + v_{j-1}^{\mathrm{LF}})$ переходит в $2v^{\mathrm{LFF}}\cos s$, а разность вида $(v_{j+1}^{\mathrm{LF}} - v_{j-1}^{\mathrm{LF}})$ — в $-2iv^{\mathrm{LFF}}\sin s$. Формула обращения дискретного преобразования выражает коэффициент v_j^{LF} ряда Фурье через его сумму $v^{\mathrm{LFF}}(s)$:

$$v_j^{\mathrm{LF}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v^{\mathrm{LFF}}(s)\exp(-ijs)\,ds.$$

Представив скачки напряжений как

$$(1.11)\qquad \begin{pmatrix}[\sigma_{xx}]^{\mathrm{LFF}} \\ [\sigma_{xy}]^{\mathrm{LFF}}\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^{\mathrm{LFF}} \\ v^{\mathrm{LFF}}\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{4p^2P(\beta,\alpha)}{(1-\nu)c_1^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2p^2}{c_2^2}P(\alpha,\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos s - Q(\beta,\alpha) & iR(\beta,\alpha)\sin s \\ -iR(\alpha,\beta)\sin s & \cos s - Q(\alpha,\beta)\end{pmatrix},$$

и подставив (1.11) в (1.1), приходим к системе

$$(1.12)\quad \begin{pmatrix} q^4 + \frac{12}{h^2c^2}p^2 - \frac{12}{h^3}\frac{\mu}{E}a_{11} & -\frac{12}{h^3}\frac{\mu}{E}a_{12} \\ -\frac{1}{h}\frac{\mu}{E}a_{21} & q^2 + \frac{p^2}{c^2} - \frac{\mu}{Eh}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{\mathrm{LFF}} \\ v^{\mathrm{LFF}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{h^2}\frac{X^{\mathrm{LFF}}}{E} \\ \frac{Y^{\mathrm{LFF}}}{E} \end{pmatrix}.$$

Определитель полученной системы отличен от нуля. Это вытекает из единственности решения, которую можно обычным образом вывести из закона сохранения энергии. Как следует из анализа явных выражений, матрица, переводящая объемные силы X^{LFF}, Y^{LFF} в смещения волокон u^{LFF}, v^{LFF}, состоит из ограниченных функций, убывающих достаточно быстро при p, $q \to \infty$, и существуют обратные преобразования, восстанавливающие оригиналы $u_j(y, t)$, $v_j(y, t)$, которые вместе с производными, входящими в уравнения движения, принадлежат классу, описанному в начале пункта. Поэтому выкладки, ранее выполнявшиеся формально, оказываются законными.

Аналогично или предельным переходом $p \to 0$ в (1.1), (1.6)—(1.10) можно получить систему уравнений относительно смещений волокон u_j^{F}, v_j^{F} в статическом случае. Статические скачки напряжений, как и в динамике, имеют вид (1.7), (1.9), но функции $P(\alpha, \beta)$, $Q(\alpha, \beta)$, $R(\alpha, \beta)$ превращаются в следующие:

$$(1.13)\qquad P(\alpha, \beta) = 2\frac{a}{p^2}c_1^2c_2^2\frac{(c_2^2 - c_1^2)\,qH\,\mathrm{ch}\,qH + (c_2^2 + c_1^2)\,\mathrm{sh}\,qH}{(c_1^2 + c_2^2)^2\,\mathrm{sh}^2\,qH - (c_1^2 - c_2^2)^2q^2H^2};$$

$$(1.14)\qquad Q(\alpha, \beta) = \frac{\mathrm{sh}\,qH\,\mathrm{ch}\,qH\,(c_1^2 + c_2^2) + (c_2^2 - c_1^2)\,qH}{(c_1^2 + c_2^2)\,\mathrm{sh}\,qH + (c_2^2 - c_1^2)\,qH\,\mathrm{ch}\,qH};$$

$$(1.15)\qquad R(\alpha, \beta) = \frac{iqH\,\mathrm{sh}\,qH\,(c_2^2 - c_1^2)}{\mathrm{sh}\,qH\,(c_1^2 + c_2^2) + (c_2^2 - c_1^2)\,qH\,\mathrm{ch}\,qH}.$$

Обмен α и β в выражении (1.10) для скачка $[\sigma_{xy}]_j^{\mathrm{LF}}$ теперь означает обмен местами c_1 и c_2. При выполнении предельного перехода в (1.8)—(1.10) нужно заменить α, β их приближенными разложениями по степеням p:

$$\alpha \cong q\left(1 + \frac{p^2}{2c_2^2q^2} - \frac{p^4}{8c_2^4q^4}\right),\quad \beta \cong q\left(1 + \frac{p^2}{2c_1^2q^2} - \frac{p^4}{8c_1^4q^4}\right).$$

2. Проанализировать решение уравнений (1.12) довольно сложно. Упругие волны в связующем, взаимодействуя с волокнами, порождают запутанную картину. Мелкомасштабные подробности этой картины в большинстве случаев, по-видимому, не влияют на качественные свойства композита (например, волноводные или прочностные). Ситуация сходна с кинетической теорией газов, где знание поведения каждой частицы, во-первых, практически недостижимо, а во-вторых, бесполезно.

Упростим задачу, используя обстоятельство, практически всегда имеющее место в реальных композитах,— модуль Юнга арматуры намного превосходит модуль сдвига связующего, т. е. $\mu/E \ll 1$.

Посмотрим, как ведут себя скачки напряжений при $\mu/E \to 0$. Анализ системы (1.12) показывает, что если $\left(q^4 + \frac{12}{h^2c^2}p^2\right)\left(q^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)$ отлично от нуля, то при $\mu/E \to 0$ скачки напряжений (1.11) стремятся к нулю, а если равно нулю $q^2 + 12\frac{p^2}{c^2}$, то скачок напряжений $[\sigma_{xy}]^{\mathrm{LFF}}$ при $\mu/E \to 0$ стремится к конечному ненулевому значению. При этом зависимость скачка напряжений от q имеет вид произведения $\sqrt{\mu/E}$ на δ-образную функцию, локализованную вблизи $q^2 = -p^2/c^2$. Если $q^4 + \frac{12}{h^2c^2} p^2$ равно нулю, то к ненулевому пределу стремится $[\sigma_{xx}]^{\mathrm{LFF}}$.

Таким образом, при малых μ/E скачки напряжений локализуются вблизи $q^2 = -p^2/c^2$, $q^4 = -12p^2/h^2c^2$. Поэтому при достаточно малом отношении μ/E можно в (1.11) заменить коэффициенты a_{1j} их значениями при $q^4 = -12p^2/h^2c^2$, а коэффициенты a_{2j} — при $q^2 = -p^2/c^2$. Это даст правильные предельные значения скачков напряжений при $\mu/E \to 0$, $\left(q^4 + \frac{12}{h_2^2c_2^2} p^2\right) \left(q^2 + \frac{p^2}{c_2^2}\right) = 0$. Ошибка, вызванная такой заменой при ненулевом значении указанного произведения, несущественна, так как a_{ij} входят в систему (1.12) в виде произведения с малым множителем μ/E, причем при $\mu/E = 0$ определитель системы отличен от нуля. В a_{ij}, а следовательно, и в P, Q, R из (1.7)—(1.9) после такой замены появятся отношения c_1^2/c^2, c_2^2/c^2, пропорциональные μ/E. Допустим, что отношения плотностей связующего и арматуры таковы, что при $\mu/E \to 0$ стремятся к нулю отношения скоростей c_1/c, c_2/c. (Как правило, в реальных композитах плотности волокон и связующего близки, и указанные отношения скоростей действительно стремятся к нулю.) Тогда в (1.7)—(1.9) можно пренебречь квадратами этих отношений по сравнению с единицей, что формально равносильно предельному переходу $q \to 0$.

Таким образом, при $\mu/E \to 0$, $c_1/c \to 0$, $c_2/c \to 0$ скачки напряжений локализуются вблизи $q = 0$. Сделаем в (1.7)—(1.9) предельный переход $q \to 0$. Это приводит к приближенной теории, которую естественно назвать длинноволновым приближением. Разумеется, предельный переход $q \to 0$ относится только к a_{ij} и не распространяется на все остальные функции, в частности на смещения волокон, входящие в (1.6), (1.10).

В выражениях (1.7)—(1.9) умножим числители и знаменатели дробей на такие степени H, чтобы получить комбинации αH, βH, qH, и перейдем к пределу при $qH \to 0$. За предельными значениями сохраним те же обозначения. В результате вместо (1.7)—(1.9) имеем

$$(2.1) \qquad \alpha H = pH/c_2, \quad \beta H = pH/c_1, \qquad R(\alpha, \beta) = R(\beta, \alpha) = 0,$$

$$P(\alpha, \beta) = \frac{c_2}{p \operatorname{sh}(pH/c_2)}, \qquad P(\beta, \alpha) = \frac{c_1}{p \operatorname{sh}(pH/c_1)},$$

$$Q(\alpha, \beta) = \operatorname{ch}(pH/c_2), \qquad Q(\beta, \alpha) = \operatorname{ch}(pH/c_1).$$

Вместо (1.6)—(1.10) получим выражения для скачков напряжений

$$(2.2) \qquad [\sigma_{xy}^{\mathrm{LF}}]_j = \mu \frac{p}{c_2} \frac{1}{\operatorname{sh}(pH/c_2)} (v_{j+1}^{\mathrm{LF}} - 2 \operatorname{ch}(pH/c_2) v_j^{\mathrm{LF}} + v_{j-1}^{\mathrm{LF}}),$$

$$[\sigma_{xx}^{\mathrm{LF}}]_j = \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{p}{c_1} \frac{1}{\operatorname{sh}(pH/c_1)} (u_{j+1}^{\mathrm{LF}} - 2 \operatorname{ch}(pH/c_1) u_j^{\mathrm{LF}} + u_{j-1}^{\mathrm{LF}}),$$

первое из которых получено в [3, 4].

Как видно из (1.12), (2.1), задача о движении арматуры в длинноволновом приближении распалась на две независимые задачи относительно горизонтальных и вертикальных смещений. В точной постановке $R \neq 0$ и существует взаимное влияние этих смещений.

Чтобы в длинноволновой постановке найти смещение связующего, нужно иметь выражения констант A_i из системы (1.5). Для избежания громоздких выкладок, несущих ненужную информацию, которая теряется при предельном переходе $qH \to 0$, упростим сначала саму систему, после чего легко вычислим неизвестные

$$A_1 = \frac{q}{2i\alpha \operatorname{sh} \alpha H} (e^{-\alpha H} v_j^{\mathrm{LF}} - v_{j+1}^{\mathrm{LF}}), \quad A_2 = \frac{q}{2i\alpha \operatorname{sh} \alpha H} (e^{\alpha H} v_j^{\mathrm{LF}} - v_{j+1}^{\mathrm{LF}}),$$

$$A_3 = \frac{q}{2 \operatorname{sh} \beta H} (-e^{-\beta H} u_j^{\mathrm{LF}} + u_{j+1}^{\mathrm{LF}}), \quad A_4 = \frac{q}{2 \operatorname{sh} \beta H} (e^{\beta H} u_j^{\mathrm{LF}} - u_{j+1}^{\mathrm{LF}}),$$

где под α, β понимаются их предельные значения pH/c_2, pH/c_1 (2.1). Подставим найденные A_i в (1.4). Горизонтальные и вертикальные движения связующего тоже оказались независимыми:

$$\text{(2.3)} \qquad \operatorname{sh}(pH/c_1)\, u^{LF} = -u_j^{LF} \operatorname{sh}(p(x-H)/c_1) + u_{j+1}^{LF} \operatorname{sh}(px/c_1),$$
$$\operatorname{sh}(pH/c_2)\, v^{LF} = -v_j^{LF} \operatorname{sh}(p(x-H)/c_2) + v_{j+1}^{LF} \operatorname{sh}(px/c_2).$$

Изображения u^{LF}, v^{LF} в (2.3) состоят из слагаемых вида $f(p) \times \times \exp(px/c)$, которые описывают стационарные волны, бегущие вправо и влево со скоростью c. Действительно, если подвергнуть преобразованию Лапласа волну $F(x-ct)$, бегущую вправо, получим изображение требуемого вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-ct) \exp(-pt)\, dt = f(p) \exp(-px/c).$$

Следовательно, в длинноволновом приближении смещения связующего описываются одномерными волновыми уравнениями

$$\text{(2.4)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_1^2 = \frac{2}{1-\nu} c_2^2$$

(μ — модуль сдвига связующего, ρ — его плотность).

Можно, наоборот, найти u^{LF}, v^{LF}, подвергнув (2.4) интегральным преобразованиям и задавая в качестве краевых условий для (2.4) смещения волокон. Такой путь использован в [3, 4]. Это приводит к смещениям связующего (2.3) и скачкам напряжений (2.2). Можно получить (2.4) и из системы (1.3), полагая в ней $q = 0$ и переходя в пространство оригиналов.

Проведенное упрощение целесообразно, если вклад в интеграл Фурье — Лапласа, преобразующий трансформанту в оригинал, в основном сосредоточен в области $|qH| \ll 1$. Решение в таком случае не испытывает резких изменений вдоль y на длинах порядка H. Это обычное условие применимости приближенных теорий тонких тел. В частности, рассмотрение армирующих волокон как одномерных стержней допустимо тогда, когда решение не испытывает резких изменений на длинах порядка поперечного размера h волокна. В композитах обычно $H \simeq h$, так что условия применимости предлагаемой теории поведения связующего практически те же, что и для уравнений движения арматуры.

Рассмотрим два частных случая, когда длинноволновое приближение совпадает с точной теорией. Пусть волокна являются жесткими стержнями. Это значит, что движение каждого волокна складывается из вращательного и поступательного. Допустим, что вследствие характера внешней нагрузки вращательная компонента отсутствует. Тогда краевые условия для полосы связующего, т. е. для системы (1.2), не зависят от y; таким же будет и решение. Поэтому в данном частном случае вместо (1.2) после вычеркивания производных по y для смещений связующего получим соотношения (2.4). По тем же причинам соотношения (2.4) выполняются точно и тогда, когда жесткость волокна произвольна, но нагрузки X, Y не зависят от y. Разумеется, в этих случаях волокна нагружаются бесконечными силами.

Представляется вероятным, что соотношения (2.4) достаточно хорошо описывают поведение связующего, если волокна достаточно жестки по сравнению со связующим и внешние нагрузки не слишком быстро меняются вдоль волокна. Отсутствие производных по y в (2.4) не означает, что смещения u, v связующего не зависят от y. Эта зависимость проникает в решение через краевые условия в точках скрепления связующего и волокна. Важно только, чтобы изменение вдоль y функций u, v было не слишком быстрым.

В случае статики рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что если параметр $\mu H/Eh$, характеризующий отношение жесткостей арматуры и связующего, достаточно мал, то скачки напряжений локализуются при $q = 0$ и длинноволновое приближение (предельный переход

$qH \to 0$ в (1.6), (1.10), (1.13)—(1.15)) приводит к следующим выражениям для скачков напряжений [1]:

$$[\sigma_{xy}]_j^{\mathrm{F}} = \mu \frac{1}{H}(v_{j+1}^{\mathrm{F}} - 2v_j^{\mathrm{F}} + v_{j-1}^{\mathrm{F}}),$$

$$[\sigma_{xx}]_j^{\mathrm{F}} = \frac{2\mu}{1-\nu}\frac{1}{H}(u_{j+1}^{\mathrm{F}} - 2u_j^{\mathrm{F}} + u_{j-1}^{\mathrm{F}}).$$

Эти формулы могут быть также получены из (2.2) предельным переходом $p \to 0$. Смещения связующего в статике являются линейными функциями координаты x. Параметры c_1/c, c_2/c исчезли из рассмотрения.

3. Приведем соображения механического характера, оправдывающие замену (1.2) на (2.4). Поскольку упрощения используют характер упругого взаимодействия компонентов, они не могут быть получены из отдельного рассмотрения уравнений (1.2). Вырежем мысленно прямоугольный элемент, содержащий и волокна, и связующее. Полное усилие на горизонтальной площадке (перпендикулярной волокнам) складывается из усилий в волокнах и в связующем, так как волокна и связующее «включены параллельно». Вследствие сцепления компонентов и большой жесткости волокон по сравнению со связующим можно считать, что вся нормальная нагрузка сосредоточена в волокнах. По тем же соображениям можно считать, что касательное усилие локализовано в волокнах в виде перерезывающей силы. Полагая в уравнениях движения связующего напряжение на горизонтальных площадках равным нулю ($\sigma_{xy} = 0$ для движения в направлении x и $\sigma_{yy} = 0$ для движения в направлении y), получим укороченные уравнения движения связующего

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{3.1}$$

Рассматривая силы на вертикальных площадках, учтем, что волокна и связующее «включены последовательно». Поэтому напряжения σ_{xx}, σ_{xy} в связующем на этих площадках могут быть достаточно большими, несмотря на малую жесткость связующего, так как его деформации не стеснены волокнами. Взаимодействие волокон осуществляется именно через эти напряжения; их отбрасывание дает набор изолированных волокон, а не композит, работающий как целое. Близкие соображения были высказаны в [1, 2] для случая статики. Однако их недостаточно для вывода (2.4). Чтобы прийти к (2.4), требуется кроме усечения уравнений движения использовать укороченный закон Гука

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu}{1-\nu}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = \mu\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.2}$$

получающийся отбрасыванием в полном законе Гука производных по y. Такое отбрасывание разумно лишь в предположении о медленном изменении смещений вдоль y, характерном для длинноволнового приближения. Использованные выше «силовые» соображения приводят к другой системе уравнений движения связующего, которая получается при подстановке в (3.1) напряжений из неукороченного закона Гука:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{3.3}$$

Система (3.3) может быть полезна при описании напряженного состояния, быстро меняющегося вдоль направления армирования, например вблизи кончика трещины. Сравнение (3.3) с (1.3) показывает, что при получении (3.3) происходят отбрасывание в (1.3) слагаемых с q^2, удержание членов первого порядка малости по q и переход в пространство оригиналов. Следовательно, (3.3) является более высоким приближением по q к точной теории упругости, чем (2.4). Это приводит к мысли о получении все более точных приближений путем замены P, Q, R из (1.7)—(1.9) их тейлоровскими разложениями в окрестности точки $q = 0$ или путем решения системы (1.3) методом разложения по степеням малого параметра q.

Отбрасывание касательных напряжений на горизонтальных площадках и сохранение их на вертикальных приводят к нарушению парности касательных напряжений в связующем, которая основана на законе сохранения момента количества движения. Однако этот закон выполняется для элемента композита, содержащего волокна и связующее, так как касательные усилия со связующего перенесены на волокна и включены в перерезывающую силу. Следовательно, связующее уже не может считаться сплошной двумерной упругой средой, а должно рассматриваться как набор бесконечно тонких полосок, передающих сдвиговые и продольные волны в направлении оси x. Полоски не взаимодействуют друг с другом непосредственно, а только через волокна, к которым они прикреплены.

Таким образом, правдоподобные рассуждения в пространстве оригиналов и формальная процедура перехода к длинноволновому приближению в пространстве трансформант приводят к сходным результатам. Формальный вывод согласуется с нестрогими соображениями, потому что дифференцирование оригинала по y соответствует умножению образа Фурье — Лапласа на $-iq$, благодаря чему порядок малости при $q \to 0$ соответствующего слагаемого в (1.3) оказывается выше, чем у остальных слагаемых. Отбрасывание производных по y в пространстве оригиналов отвечает отбрасыванию членов с множителями q, q^2 в (1.3).

4. Из рассуждений п. 2 следует, что при

$$\mu/E \to 0, \quad c_1/c \to 0, \quad c_2/c \to 0 \tag{4.1}$$

трансформанты скачков напряжений поточечно стремятся к трансформантам (2.2) скачков напряжений длинноволнового приближения. Значит, то же самое можно утверждать относительно решения системы (1.1) и относительно напряжений. Однако сходимость трансформант не влечет сходимости оригиналов (трансформанта Лапласа $\omega/(p^2+\omega^2)$ функции, равной нулю при $t<0$ и $\sin \omega t$ при $t>0$, стремится к нулю при $\omega \to \infty$, но оригинал не стремится к нулю). С другой стороны, переход к длинноволновому приближению в пространстве трансформант равносилен отбрасыванию членов с малыми параметрами q, q^2 при младших производных в системе уравнений (1.3). Поэтому при $q \to 0$ решение (1.3) стремится к решению укороченной системы длинноволнового приближения. В условиях (4.1) решение в постановке теории упругости локализуется вблизи $q=0$ (см. п. 2), этим и обеспечивается сходимость в пространстве трансформант к длинноволновому решению. В пространстве же оригиналов переход от (1.2) к (2.4) заключается в отбрасывании некоторых старших производных, и поэтому неясно, стремится ли ее решение к решению укороченной системы, если выполняется (4.1). Таким образом, сходимость длинноволнового решения к точному в пространстве оригиналов требует специального исследования. Все сказанное выше о динамике относится и к статической постановке с заменой (4.1) условием $\mu H/Eh \to 0$.

Работа выполнена по гранту № 2-41-7-26 «Механика композитов, учитывающая разрушение их структуры» Министерства науки, высшей школы и технической политики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hedgepeth I. M., Van Dyke P.** Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials // J. Composite Materials.— 1967.— V. 1, N 3.
2. **Outwater J. O.** The mechanics of plastics reinforced in tension // Modern plastics.— 1956.— V. 33, N 7.
3. **Михайлов А. М.** Динамика однонаправленного стеклопластика // ПМТФ.— 1974.— № 4.
4. **Михайлов А. М.** Неосесимметричное динамическое нагружение оболочки с ребрами жесткости // Изв. АН СССР. МТТ.— 1979.— № 1.
5. **Михайлов А. М.** О разрушении однонаправленного стеклопластика // Изв. АН СССР. МТТ.— 1973.— № 5.
6. **Михайлов А. М.** Трещина сдвига в однонаправленном стеклопластике // Изв. АН СССР. МТТ.— 1975.— № 1.

7. **Михайлов А. М.** Динамическая концентрация напряжений около дефекта в стеклопластике // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1974.— Вып. 19, 20.
8. **Ермак А. А., Михайлов А. М.** Динамическая концентрация напряжений в стеклопластике // ПМТФ.— 1978.— № 6.
9. **Ермак А. А., Михайлов А. М.** Теоретическое определение разброса прочности в стеклопластике // ПМТФ.— 1980.— № 6.
10. **Михайлов А. М., Слепян Л. И.** Стационарное движение трещины в однонаправленном композите // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 2.

г. Новосибирск *Поступила 12/XI 1992 г., в окончательном варианте — 16/II 1993 г.*

УДК 539.374+534.222.2

С. П. Киселев, В. М. Фомин

О МОДЕЛИ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОРЫ

1. Постановка задачи. Точное решение задачи о деформировании пористого материала, содержащего большое число сферических пор, практически невозможно. Поэтому широкое распространение получил приближенный подход, в котором с помощью методов осреднения переходят от пористого материала к сплошному с эффективными модулями упругости и поверхностью текучести. В настоящее время существует большое число методов осреднения [1—6].

В данной работе выбирается простейший метод вириального разложения, справедливый при малой объемной концентрации пор с точностью до членов $O(m_1^2)$, $m_1 \ll 1$. Это ограничение связано с тем, что в методе вириального разложения пренебрегается упругим взаимодействием между порами [3]. Средние напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} пористого материала определяются формулами из [3, гл. 5, § 4], которые в наших обозначениях имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = m_1\varepsilon_{ij}^0 + m_2\varepsilon_{ij}^s, \quad \sigma_{ij} = m_2\sigma_{ij}^s, \tag{1.1}$$

где ε_{ij}^0, ε_{ij}^s — средние деформации поры и материала; σ_{ij}^s — среднее напряжение в материале; m_1, m_2 — объемные концентрации пор и материала, для которых справедливы формулы

$$m_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 n, \quad m_1 + m_2 - 1$$

(n, a — концентрация и радиус сферических пор). Величина ε_{ij}^s в упругом случае определяется согласно закону Гука [3]

$$\varepsilon_{ij}^s = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^s\delta_{ij} + e_{ij}^s, \quad e_{ij}^s = S_{ij}/(2\mu_s m_2), \tag{1.2}$$
$$\varepsilon_{kk}^s = -p/(K_s m_2), \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}.$$

Здесь μ_s, K_s — модуль сдвига и объемного сжатия материала; p — давление; S_{ij}, e_{ij} — девиаторы напряжений и деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера. В пластическом случае ε_{ij}^s находится из соотношений Прандтля — Рейса (см. п. 3).

Деформация поры ε_{ij}^0 при упругом деформировании определяется из решения Эшелби [2]. Если напряжения достаточно велики, то вследствие концентрации напряжений в окрестности поры возникает пластическая зона и деформации становятся упругопластическими. В этом случае точное решение отсутствует и необходимо построить приближенное решение