

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА ПРОЦЕСС ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕВОЙ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ

Н. А. Абросимов, А. В. Елесин, Л. А. Игумнов

Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mails: abrosimov@mech.unn.ru, elesin@mech.unn.ru, igumnov@mech.unn.ru

На основе прикладной теории оболочек сформулирована энергетически согласованная разрешающая система уравнений и разработан комплексный численный метод, позволяющий с использованием явной вариационно-разностной схемы решать как квазистатические, так и динамические задачи нелинейного неосесимметричного деформирования и потери устойчивости композитных цилиндрических оболочек. Достоверность разработанного метода верифицирована путем сравнения результатов расчетов и экспериментальных данных. Для различных структур армирования проведен анализ критических нагрузок и характерных форм потери устойчивости композитных цилиндрических оболочек, предварительно подвергнутых квазистатическому нагружению внутренним давлением с последующим динамическим нагружением осевым сжатием.

Ключевые слова: композитные материалы, цилиндрические оболочки, динамическая устойчивость, численные методы, квазистатические и динамические нагрузки.

DOI: 10.15372/PMTF20210610

Введение. Композитные материалы широко используются в различных областях машиностроения. В процессе эксплуатации элементы конструкций из композитных материалов могут подвергаться воздействию комбинированных динамических и статических нагрузок, что сопровождается формоизменением и потерей устойчивости элементов конструкций. Для эффективного использования композитных материалов необходимо всестороннее исследование их динамического деформирования и потери устойчивости элементов конструкций, выполненных из композитных материалов, при действии комбинированных квазистатических и динамических нагрузок.

В большинстве работ изучаются нелинейное поведение и потеря устойчивости цилиндрических оболочек из изотропных материалов [1–4]. В [1] приведены результаты

Методика расчета композитных цилиндрических оболочек при комбинированных нагрузках разработана при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (код проекта 0729-2020-0054), численный анализ динамической потери устойчивости предварительно напряженных оболочек выполнен при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 19-08-00828).

экспериментально-теоретического исследования области неустойчивости стальной цилиндрической оболочки при импульсном нагружении внешним давлением и внешним (или внутренним) статическим давлением. В [2] представлены результаты экспериментальных исследований влияния внутреннего статического давления и скорости нагружения на устойчивость алюминиевых цилиндрических оболочек при импульсном нагружении внешним давлением.

Экспериментальное исследование выпучивания тонкостенных цилиндрических оболочек при локальном импульсном нагружении внешним давлением и различных значениях осевой статической сжимающей нагрузки проведено в работе [3]. В [4] предложен метод расчета динамической устойчивости цилиндрической оболочки при нагружении осевой нагрузкой, изменяющейся по нелинейному закону.

Численные исследования потери устойчивости композитных цилиндрических оболочек при динамических нагрузках проведены в работах [5–7].

В то же время нелинейные пространственные задачи динамического деформирования и потери устойчивости предварительно нагруженных композитных цилиндрических оболочек исследованы недостаточно [8].

Целью данной работы является разработка метода численного исследования нелинейного нестационарного деформирования и потери устойчивости композитных цилиндрических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления и подвергаемых динамическому нагружению осевым сжатием.

1. Постановка и метод решения задачи. В цилиндрической оболочке, образованной перекрестной намоткой однонаправленного композитного материала, введем ортогональную криволинейную систему координат α_i ($i = \overline{1,3}$), координатные линии которой совпадают с линиями главных кривизн и внешней нормалью к внутренней поверхности оболочки. Коэффициенты Ламе рассматриваемой оболочки равны $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + k_2\alpha_3$, $H_3 = 1$, главные кривизны $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$ (R — радиус внутренней поверхности оболочки).

В соответствии с прикладной теорией цилиндрических оболочек выражения для компонент нелинейного тензора деформаций можно представить в виде [9]

$$\begin{aligned} e_{11} &= (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13}^2/2 + \alpha_3\chi_{11})/H_1, \\ e_{12} &= (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}/2 + \alpha_3\chi_{12})/H_1 + (\varepsilon_{21} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}/2 + \alpha_3\chi_{21})/H_2, \\ e_{13} &= (\varphi_1 + \varepsilon_{13})/H_1 \quad (1 \leftrightarrow 2), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3, \quad \chi_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1 \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t)$ ($i = \overline{1,3}$) — перемещения точек внутренней поверхности в направлениях осей α_i ; φ_j ($j = \overline{1,2}$) — углы поворота нормали к внутренней поверхности. Запись “ $1 \leftrightarrow 2$ ” означает, что приведенные соотношения дополняются соотношениями, полученными в результате замены индексов 1 на 2 и 2 на 1.

С учетом гипотез прикладной теории оболочек определяющие соотношения для элементарного слоя запишем в виде [10]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(A_{11} - \frac{A_{13}^2}{A_{33}} \right) e_{11} + \left(A_{12} - \frac{A_{13}A_{23}}{A_{33}} \right) e_{22}, \quad \sigma_{12} = A_{66}e_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ \sigma_{13} &= A_{44}e_{13}, \quad \sigma_{23} = A_{55}e_{23}, \end{aligned}$$

где A_{mn} — жесткости однонаправленного слоя, которые вычисляются через модули упругости и коэффициенты Пуассона элементарного слоя и являются ступенчато изменяющимися функциями переменной α_3 .

Энергетически согласованная система уравнений движения в прикладной теории цилиндрических оболочек выводится из условия минимизации функционала полной энергии оболочки, который для цилиндрической оболочки, нагруженной квазистатическим внутренним давлением и динамическим осевым сжатием, представляется в виде [10]

$$\begin{aligned}
& \iint_S \left(N_{11} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_1} + N_{21} \frac{\partial(\delta u_1)}{\partial \alpha_2} + N_{22} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_2} + N_{12} \frac{\partial(\delta u_2)}{\partial \alpha_1} - N_{23}^* k_2 \delta u_2 + \right. \\
& + N_{13}^* \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_1} + N_{23}^* \frac{\partial(\delta u_3)}{\partial \alpha_2} + N_{22} k_2 \delta u_3 + M_{11} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_1} + M_{21} \frac{\partial(\delta \varphi_1)}{\partial \alpha_2} + Q_{13} \delta \varphi_1 + \\
& \left. + M_{22} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_2} + M_{12} \frac{\partial(\delta \varphi_2)}{\partial \alpha_1} + Q_{23} \delta \varphi_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \iint_S [(\bar{B}_{11} \ddot{u}_1 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_1) \delta u_1 + (\bar{B}_{11} \ddot{u}_2 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_2) \delta u_2 + \bar{B}_{11} \ddot{u}_3 \delta u_3 + \\
& + (\bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_1 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_1) \delta \varphi_1 + (\bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_2 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_2) \delta \varphi_2] d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} N_{11}^0 \delta u_i^0 H_2 d\alpha_2 - \iint_S F_3 \delta u_3 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0, \quad (1)
\end{aligned}$$

где

$$(N_{11}, N_{12}, M_{11}, M_{12}, Q_{13}) = \int_0^h (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \alpha_3 \sigma_{11}, \alpha_3 \sigma_{12}, \sigma_{13}) H_2 d\alpha_3,$$

$$N_{13}^* = Q_{13} + N_{11} \varepsilon_{13} + N_{12} \varepsilon_{23} \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$\bar{B}_{11} = \rho(h + k_2 h^2/2), \quad \bar{B}_{22} = \rho(h^3/3 + k_2 h^4/4), \quad \bar{B}_{12} = \bar{B}_{21} = \rho(h^2/2 + k_2 h^3/3),$$

S — площадь внутренней поверхности оболочки; Γ_i — границы оболочки, совпадающие с линиями α_2 ($i = 1, 2$); F_j — составляющие нагрузки в направлениях координатных осей α_j ($j = 1, 3$); индексом “0” обозначены усилия и соответствующие перемещения, приложенные к торцам оболочки; $N_{11}^0 = \iint_{S_0} F_1 \delta u_1^0 d\alpha_2 d\alpha_3$; S_0 — площадь торцевых по-

верхностей оболочки; ρ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки.

Минимизация функционала полной энергии оболочки (1) позволяет получить систему уравнений движения

$$\begin{aligned}
L_1(N) &= \bar{B}_{11} \ddot{u}_1 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_1, & L_2(N) + N_{13}^* k_2 &= \bar{B}_{11} \ddot{u}_2 + \bar{B}_{12} \ddot{\varphi}_2, \\
L_1(M) - Q_{13} &= \bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_1 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_1, & L_2(M) - Q_{23} &= \bar{B}_{22} \ddot{\varphi}_2 + \bar{B}_{21} \ddot{u}_2, \\
L_1(T) &= \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_2} & (1 \leftrightarrow 2), & \\
\frac{\partial N_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{23}^*}{\partial \alpha_2} - k_2 N_{22} + F_3 &= \bar{B}_{11} \ddot{u}_3 & &
\end{aligned} \quad (2)$$

и естественные граничные условия, которые в данном случае можно записать в виде

$$N_{11} = N_{11}^0, \quad u_2 = u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \quad (3)$$

Дополняя соотношения (2), (3) необходимыми начальными условиями

$$\begin{aligned} u_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= u_i^0(\alpha_1, \alpha_2), & \varphi_j(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \varphi_j^0(\alpha_1, \alpha_2), \\ \dot{u}_i(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{u}_i^0(\alpha_1, \alpha_2), & \dot{\varphi}_j(\alpha_1, \alpha_2, 0) &= \dot{\varphi}_j^0(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2), \end{aligned}$$

получаем полную систему уравнений для анализа нелинейных волновых процессов деформации и потери устойчивости цилиндрических оболочек, полученных укладкой элементарных слоев однонаправленного композитного материала и нагруженных квазистатическим внутренним давлением и подвергаемых осевому динамическому сжатию. При этом осевое нагружение осуществляется через абсолютно жесткое кольцо.

Критическая нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости, определяется по характерному излому на кривой зависимости амплитуды воздействия от максимального прогиба.

Численный метод решения сформулированной задачи основан на использовании явной вариационно-разностной схемы [10]. В результате преобразования вариационного уравнения динамики (1) с использованием известных разностных процедур [10] имеем системы сеточных уравнений, описывающие движение внутренних и граничных узлов:

$$\bar{B}_{11}\ddot{u}_j + \bar{B}_{12}\ddot{\varphi}_j = F_{u_j}, \quad \bar{B}_{11}\ddot{u}_3 = F_{u_3}, \quad \bar{B}_{22}\ddot{\varphi}_j + \bar{B}_{21}\ddot{u}_j = F_{\varphi_j} \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь F_{u_i} , F_{φ_j} — разностные аналоги левых частей системы (2).

Разрешая систему алгебраических уравнений (4) относительно обобщенных ускорений \ddot{u}_i , $\ddot{\varphi}_j$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени, для интегрирования которой применяется явная схема “крест” [10]. В результате решение системы (4) сводится к вычислениям по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(t^{\varkappa+1/2}) &= \dot{u}_j(t^{\varkappa-1/2}) + \frac{\Delta t}{\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}\bar{B}_{21}} (F_{u_j}\bar{B}_{22} - F_{\varphi_j}\bar{B}_{12}), \\ \dot{u}_3(t^{\varkappa+1/2}) &= \dot{u}_3(t^{\varkappa-1/2}) + \frac{\Delta t}{\bar{B}_{11}} F_{u_3}, \\ \dot{\varphi}_i(t^{\varkappa+1/2}) &= \dot{\varphi}_i(t^{\varkappa-1/2}) + \frac{\Delta t}{\bar{B}_{11}\bar{B}_{22} - \bar{B}_{12}\bar{B}_{21}} (F_{\varphi_i}\bar{B}_{11} - F_{u_i}\bar{B}_{21}), \\ u_i(t^{\varkappa+1}) &= u_i(t^{\varkappa}) + \Delta t \dot{u}_i(t^{\varkappa+1/2}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \varkappa = \overline{0, \infty}, \\ \varphi_j(t^{\varkappa+1}) &= \varphi_j(t^{\varkappa}) + \Delta t \dot{\varphi}_j(t^{\varkappa+1/2}). \end{aligned}$$

Шаг интегрирования по времени Δt определяется на основе спектрального признака Неймана:

$$\Delta t \leq 2/\omega_{\max}$$

(ω_{\max} — максимальная собственная частота полудискретной системы (4)) [10]. При этом квазистатический режим нагружения моделируется внутренним давлением, заданным в виде линейно возрастающей функции с выходом на стационарное значение в течение трех периодов колебаний по низшей форме композитной цилиндрической оболочки.

2. Результаты исследования. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных с использованием разработанного метода, и экспериментальных данных [11]. Исследовалось влияние предварительного нагружения внутренним давлением на потерю устойчивости при динамическом нагружении осевым сжатием цилиндрической оболочки, выполненной из композитного материала со следующими геометрическими и физико-механическими параметрами: $R = 0,072$ м, $R/h = 112$, $L/R = 2,22$, $E_{11} = 200$ ГПа, $E_{22} = E_{11}/30$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_{22}/2$, $\nu_{12} = 0,25$, $\rho = 1800$ кг/м³.

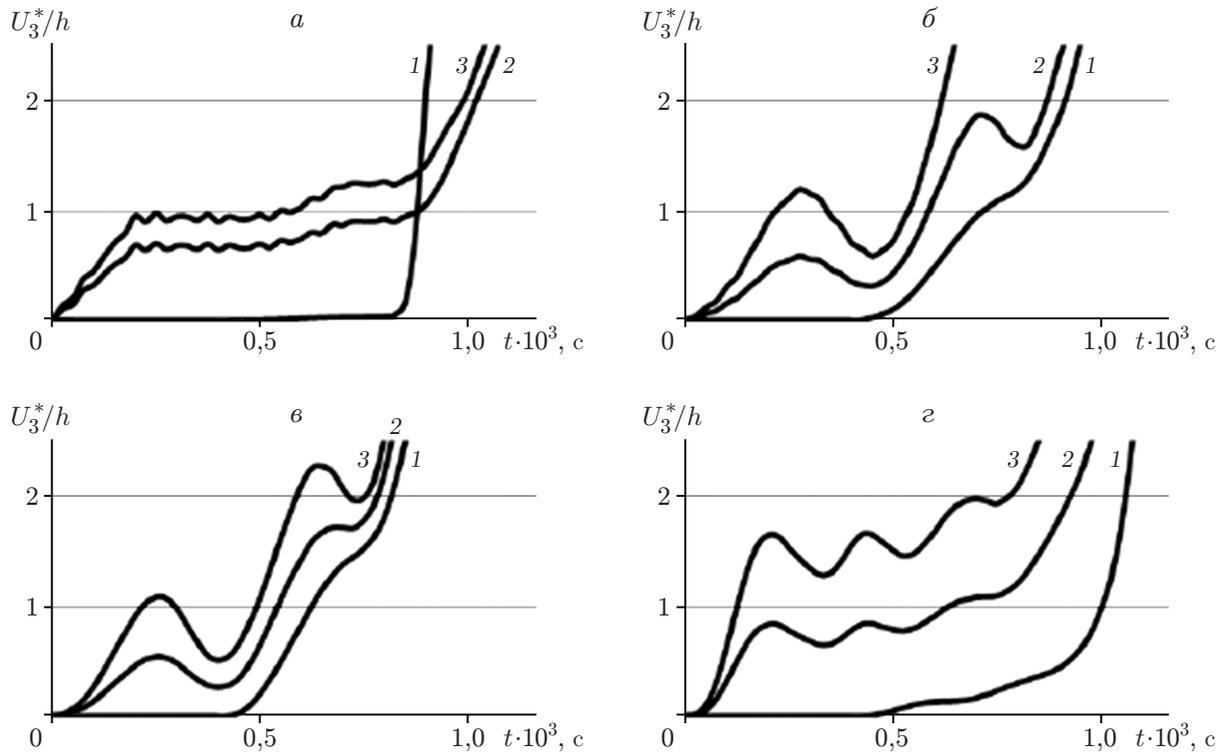


Рис. 1. Зависимости абсолютных значений максимального прогиба оболочки от времени при различных значениях угла армирования относительно образующей оболочки:

a — $\theta = 90^\circ$, $б$ — $\theta = 60^\circ$, $в$ — $\theta = 45^\circ$, $г$ — $\theta = 15^\circ$; 1 — без учета предварительного нагружения, 2, 3 — с учетом предварительного нагружения внутренним статическим давлением (2 — $\bar{F}_3^+ = 0,6$, 3 — $\bar{F}_3^+ = 0,9$)

Результаты исследования влияния угла армирования и предварительного квазистатического нагружения внутренним давлением на потерю устойчивости оболочки при последующем нагружении динамическим осевым сжатием, приложенным к торцевым сечениям оболочки, представлены на рис. 1–3.

На рис. 1 показаны зависимости абсолютных значений максимальных прогибов U_3^* оболочки от времени, рассчитанные для скорости осевого динамического сжатия $\dot{F}_1 = 40$ ГПа/с при различных значениях угла армирования и предварительном нагружении внутренним квазистатическим давлением, которое в безразмерном виде определяется выражением $\bar{F}_3^+ = (R/h)^2 F_3^+ / E_{11}$. Значение максимального прогиба определяется на каждом временном шаге как максимальное значение модуля прогиба во всех узлах расчетной области оболочки. Из рис. 1 следует, что при всех углах армирования, кроме $\theta = 90^\circ$, увеличение внутреннего давления приводит к уменьшению критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости.

На рис. 2, 3 представлены конфигурации деформированных оболочек, зафиксированные в момент потери устойчивости и рассчитанные для различных значений угла армирования, внутреннего давления и скорости осевого динамического сжатия.

Для оболочек, армированных под углом $\theta = 90^\circ$ и предварительно нагруженных внутренним давлением, наблюдается потеря устойчивости с образованием ромбовидных вмятин, вытянутых вдоль окружной координаты. С увеличением внутреннего давления реализуются формы потери устойчивости с образованием множественных кольцевых складок,

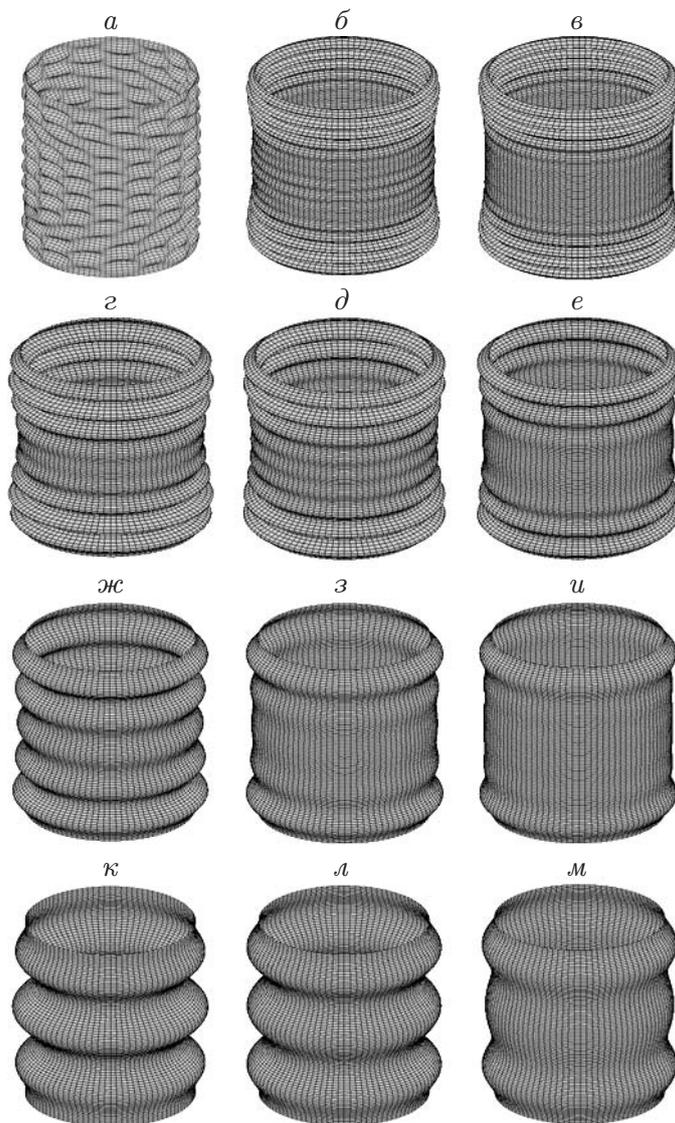


Рис. 2. Характерные формы потери устойчивости композитных цилиндрических оболочек при нагружении импульсом осевого сжатия со скоростью $\dot{F}_1 = 40$ ГПа/с для различных значений угла армирования и внутреннего давления: a - $в$ — $\theta = 90^\circ$, $г$ - $е$ — $\theta = 60^\circ$, $ж$ - $и$ — $\theta = 45^\circ$, $к$ - $м$ — $\theta = 15^\circ$; a , $г$, $ж$, $к$ — $\bar{F}_3^+ = 0$, $б$, $д$, $з$, $л$ — $\bar{F}_3^+ = 0,6$, $в$, $е$, $и$, $м$ — $\bar{F}_3^+ = 0,9$

количество которых уменьшается в средней части оболочки. Для оболочек, армированных под углом $\theta = 60^\circ$, число кольцевых складок в средней части оболочки уменьшается более существенно. Для оболочек, армированных под углом $\theta = 45^\circ$, по мере увеличения внутреннего давления наблюдается трансформация от гофрообразной формы потери устойчивости к форме с двумя кольцевыми складками, образующимися на нагруженных торцах оболочки. При потере устойчивости оболочек, армированных под углом $\theta = 15^\circ$, образуются три гофра, причем высота среднего гофра уменьшается с увеличением внутреннего давления.

Результаты анализа влияния скорости осевого сжатия на процесс потери устойчивости оболочек, армированных под углом $\theta = 45^\circ$ (см. рис. 3), показывают, что с увеличением скорости нагружения происходит трансформация от гофрообразной формы потери устой-

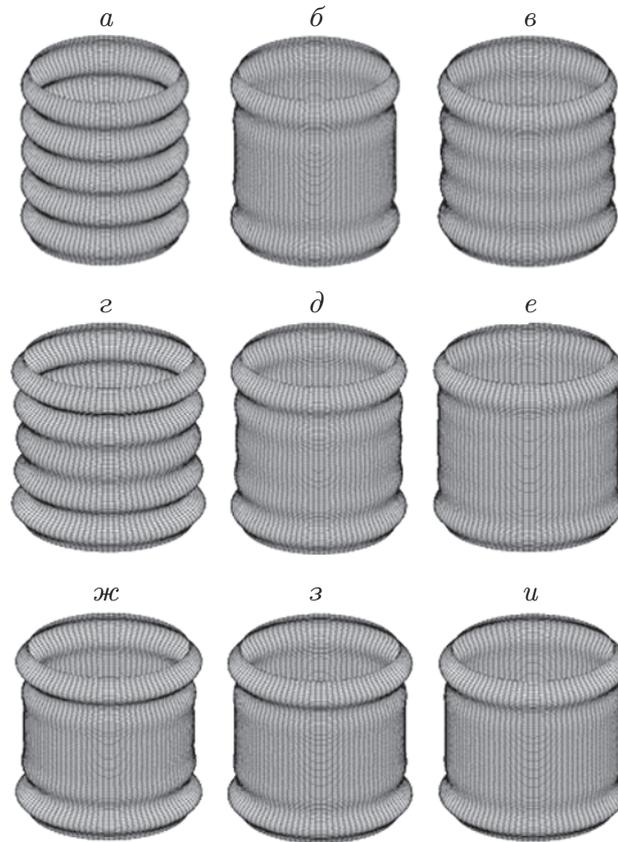


Рис. 3. Характерные формы потери устойчивости при различных значениях скорости осевого сжатия и внутреннего давления:

$a-v$ — $\dot{F}_1 = 10$ ГПа/с, $г-е$ — $\dot{F}_1 = 40$ ГПа/с, $ж-и$ — $\dot{F}_1 = 80$ ГПа/с; $a, г, ж$ — $\bar{F}_3^+ = 0$, $б, д, з$ — $\bar{F}_3^+ = 0,6$, $в, е, и$ — $\bar{F}_3^+ = 0,9$

чивости к форме в виде двух кольцевых складок на нагруженных торцах оболочки, при этом в средней части оболочки сохраняется практически цилиндрическая форма.

Заключение. Проведен анализ динамической потери устойчивости композитных цилиндрических оболочек с различными структурами армирования, предварительно нагруженных внутренним квазистатическим давлением с последующим осевым сжатием. Установлено, что при всех рассмотренных значениях угла армирования предварительное нагружение внутренним давлением и скорость осевого сжатия оказывают существенное влияние на характерные формы потери устойчивости и в меньшей степени — на критические значения импульса осевого сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич Л. И., Михайлов Г. В., Павленко И. Д., Прокопало Е. Ф. Исследование устойчивости оболочек при совместном действии статических и динамических нагрузок // Прикл. механика. 1977. Т. 13, № 1. С. 27–32.
2. Баскаков В. Н., Костоглотов А. И., Швецова Л. А. Исследование динамической устойчивости гладких цилиндрических оболочек // Пробл. прочности. 1982. № 5. С. 31–33.
3. Бендюков В. В., Дерюшев В. В. Динамическая коротковолновая неустойчивость тонкостенных цилиндрических оболочек при локальном действии импульса внешнего давления // Пробл. прочности. 1995. № 4. С. 36–43.

4. **Дубровин В. М., Бутина Т. А.** Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей нагрузки // Мат. моделирование и численные методы. 2015. № 6. С. 46–57.
5. **Jansen E. L.** Dynamic stability problems of anisotropic cylindrical shells via a simplified analysis // Nonlinear Dynamics. 2005. V. 39. P. 349–367.
6. **Bisagni C.** Dynamic buckling of fiber composite shells under impulsive axial compression // Thin-Walled Structures. 2005. V. 43. P. 499–514.
7. **Rahman T., Jansen E. L., Gürdal Z.** Dynamic buckling analysis of composite cylindrical shells using a finite element based perturbation method // Nonlinear Dynamics. 2011. V. 66, N 3. P. 389–401.
8. **Викторов И. В., Товстик П. Е.** Некоторые задачи устойчивости анизотропных цилиндрических оболочек // Тр. 13-й Междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, Ростов-на-Дону, 12–15 окт. 2009 г. Ростов н/Д: Южный федер. ун-т, 2009. Т. 1. С. 57–62.
9. **Шаповалов Л. А.** Об учете поперечного обжатия в уравнениях нелинейной динамики оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 3. С. 156–168.
10. **Абросимов Н. А.** Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2002.
11. **Абросимов Н. А., Елесин А. В.** Численный анализ динамического деформирования и потери устойчивости предварительно напряженных композитных цилиндрических оболочек // Пробл. прочности и пластичности. 2017. Т. 79, № 4. С. 450–461.

*Поступила в редакцию 21/VII 2020 г.,
после доработки — 21/VII 2020 г.
Принята к публикации 31/VIII 2020 г.*
