взаимодействия линии уровня вычислялись в соответствии с (1.25). Единственным материалом для сравнения с результатами проведенных расчетов являются численные расчеты случая (*б*), выполненные в работе [3]. Сравнение показывает удовлетворительное согласие результатов нелинейной теории и численных расчетов ($E = 0{,}175$, фиг. 3 работы [3]). Вне окрестности волновой границы области возмущений нелинейные решения согласуются с решениями линейной теории (1.12) и для $E < 0{,}04$ переходят в решения (1.12) практически непрерывным образом.

Поступила 26 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sakurai A.** The flow due to impulsive motion of a wedge and its similarity to the diffraction of shock wave.—«J. Phys. Soc. Japan», 1955, vol. 10, N 3.
2. **Strang W. J.** A physical theory of supersonic aerofoils in unsteady flow.—«Proc. Roy. Soc. L.», 1948, vol. A195, N 1041.
3. **Тугазаков Р. Я.** Нестационарная задача о внезапном движении клина и конуса с до- и сверхзвуковой скоростями.—«Учен. зап. ЦАГИ», 1973, т. 4, вып. 1.
4. **Липман Г. В., Рошко А.** Элементы газовой динамики. М., ИЛ, 1960.
5. **Lighthill M. J.** The shock strength in supersonic «conical fields».—«Phil. Mag.», 1949, vol. 40, ser. 7, N 311.
6. **De Mestre N. J.** Non-linear weak shock diffraction.—«J. Austral. Math. Soc.», 1968, vol. 8, N 4.
7. **Могилевич Л. И., Шиндяпин Г. П.** О нелинейной дифракции слабых ударных волн.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
8. **Шиндяпин Г. П.** Нерегулярное взаимодействие слабых ударных волн разной интенсивности.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
9. **Булах Б. М.** Нелинейные конические течения газа. М., «Наука», 1970.
10. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
11. **Христианович С. А.** Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва.— ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
12. **Рыжов О. С., Христианович С. А.** О нелинейном отражении слабых ударных волн.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
13. **Багдоев А. Г., Гургенян А. А.** Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости.—«Изв. АН Арм. ССР. Сер. Механика», 1968, № 1.
14. **Kuo Y. H.** A similarity rule for the interaction between a conical field and a plane shock.—«J. Aero. Sci.», 1955, vol. 22, N 7.
15. **Zahalak G. I., Myers M. K.** Conical flows near singular rays.—«J. Fluid Mech.», 1974, vol. 63, pt 3.

УДК 532.517.2

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

М. А. Гольдштик

(*Новосибирск*)

Результаты, приведенные в обзорной монографии [1], относятся в основном к капельным жидкостям, для которых влияние термического режима на течение связано с зависимостью вязкости от температуры.

В данной работе рассмотрено автомодельное течение вязкого газа в канале, температура стенки которого возрастает по линейному закону. Проанализировано влияние чисел Рейнольдса и Прандтля на теплообмен и гидродинамику потока.

1. Рассмотрим идеализированный случай, когда кинематическая вязкость ν и коэффициент температуропроводности $\varkappa$ считаются постоянными, а плотность ρ зависит от температуры T по закону

$$\rho = \rho_0 T_0 / T,$$

введенному Буссинеском в качестве приближенной аппроксимации уравнения $p = \rho R T$ для случая малых значений $\Delta p/p$.

В этих предположениях задача о стационарном течении вязкого газа в плоском канале с температурой стенки, возрастающей по линейному закону $T_w = T_0 x$, допускает автомодельное решение вида

$$v_x = v_0 u(y) x; \; v_y = 0; \; T = T_0 \theta(y) x. \tag{1.1}$$

Для такого решения уравнения движения и энергии можно записать в форме

$$v_x \partial v_x/\partial x = -(1/\rho)\partial p/\partial x + \nu d^2 v_x/\partial y^2;$$

$$v_x \partial T/\partial x = \varkappa \partial^2 T/\partial y^2, \tag{1.2}$$

где x, y — декартовы координаты; v_x, v_y — продольная и поперечная компоненты скорости газа; p — давление; ρ_0, T_0 — некоторые масштабные значения плотности и температуры; v_0 — средняя расходная скорость газа, предполагаемая заданной

$$v_0 = \frac{1}{\rho_0} \int\limits_0^1 \rho v_x dy. \tag{1.3}$$

За масштаб длины принимается полуширина канала h.

Подставляя соотношения (1.1) в уравнения (1.2), получаем

$$u'' = \mathrm{Re}\,(u^2 - \chi a^2 \theta); \tag{1.4}$$

$$\theta'' = \mathrm{Re}\, \sigma u \theta, \tag{1.5}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по y; $\mathrm{Re} = v_0 h/\nu$ — число Рейнольдса; $\sigma = \nu/\varkappa$ — число Прандтля; $a^2 = \left(h/\rho_0 v_0^2\right) |dp/dx|$ — коэффициент сопротивления; $\chi = \pm 1$. В выражении (1.4) значению $\chi = +1$ соответствует движение газа в положительном направлении, когда происходит его нагрев. При движении в обратном направлении знак градиента давления определяется двумя противоположными факторами: трением потока о стенки и замедлением газа в направлении его движения, так что возможен случай, соответствующий значению $\chi = -1$ (трение преобладает).

Полагая течение симметричным относительно оси канала ($y = 0$), можно поставить следующие граничные условия:

$$u'(0) = \theta'(0) = 0; \; u(1) = 0; \; \theta(1) = 1.$$

Кроме того, из (1.3) следует соотношение

$$\int\limits_0^1 \frac{u}{\theta}\, dy = 1, \tag{1.6}$$

которое служит для определения неизвестного параметра a, входящего в (1.4).

Для решения поставленной нелинейной краевой задачи введем замену переменных

$$u = aw, \; y = z/\sqrt{a\,\mathrm{Re}}, \tag{1.7}$$

которая приводит систему (1.4), (1.5) к виду

(1.8) $$w'' = w^2 - \chi\theta;$$

(1.9) $$\theta'' = \sigma w\theta.$$

Для решения полученной системы удобно рассмотреть вспомогательную задачу Коши

(1.10) $$w(0) = w_0;\ w'(0) = 0;\ \theta(0) = \theta_0;\ \theta'(0) = 0.$$

В соотношениях (1.8)—(1.10) штрихом обозначено дифференцирование по переменной z.

Поставленная задача содержит два свободных параметра w_0 и θ_0, для определения которых можно использовать следующие соображения. Пусть величина θ_0 зафиксирована. Тогда, как показано ниже, при некоторых значениях w_0 найдется точка z_0, где $w(z_0) = 0$. Если за счет варьирования параметра w_0 добиться выполнения соотношения $\theta(1) = 1$, то будут удовлетворены исходные краевые условия при $y = 1$, для чего, согласно (1.7), следует положить

(1.11) $$z_0 = \sqrt{a\,\mathrm{Re}}.$$

Соотношение (1.6) в новых переменных имеет вид

(1.12) $$\frac{a}{\sqrt{a\mathrm{Re}}}\int_0^{z_0}\frac{w}{\theta}\,dz = 1.$$

С помощью формул (1.11), (1.12) определяются величины a и Re

(1.13) $$a = z_0\left(\int_0^{z_0}\frac{w}{\theta}\,dz\right)^{-1};\ \mathrm{Re} = z_0\int_0^{z_0}\frac{w}{\theta}\,dz.$$

Величину θ_0 при данном σ можно считать основным параметром задачи, каждому значению которого соответствует одно или несколько значений Re. Коэффициент трения c_f и критерий Нуссельта Nu можно определить соотношениями

$$c_f = -\left(\nu/v_0^2\right)\partial v_x/\partial y|_{y=1} = -a\sqrt{(a/\mathrm{Re})}\,w'(z_0) = cx;$$

(1.14) $$\mathrm{Nu} = \alpha h/\lambda = [1/(T_w - T_0)]\partial T/dy|_{y=1} = [1/(1-\theta_0)]d\theta/dy|_{y=1} = z_0\theta'(z_0)/(1-\theta_0).$$

2. В случае $\sigma = 0$ постановка задачи должна быть несколько изменена, поскольку, согласно (1.9), $\theta \equiv 1$, и удовлетворять условию $\theta(1) = 1$ путем подбора w_0 не нужно. В данном случае решению подлежит задача

(2.1) $$w'' = w^2 - \chi;\ w(0) = w_0;\ w'(0) = 0.$$

Соотношения (1.13) при этом сохраняют силу, так что связь между w_0 и Re может быть установлена непосредственно.
Умножение (2.1) на w' и интегрирование дает соотношение

(2.2) $$w'^2 = \frac{2}{3}(w^3 - w_0^3) - 2\chi(w - w_0) \equiv F(w).$$

Здесь учтено граничное условие $w'(0) = 0$. Исходя из (2.2), получим $w' = \sqrt{F(w)}$, откуда

$$z = \pm \int\limits_{w_0}^{w} \frac{dw}{\sqrt{F(w)}}. \tag{2.3}$$

Следовательно, для величины z_0, определяемой условием $w(z_0) = 0$, можно записать

$$z_0 = \pm \int\limits_{w_0}^{0} \frac{dw}{\sqrt{F(w)}}. \tag{2.4}$$

В выражениях (2.3), (2.4) знак должен выбираться из условия положительности z_0, так что этот знак противоположен знаку w_0. В случае $\chi = -1$ задача (2.1) имеет только нарастающее решение, обладающее положительной кривизной, поэтому исходной краевой задаче могут соответствовать лишь отрицательные значения w_0. Значению корня в (2.3) следует приписать знак минус. Функция $w(z)$ имеет единственный корень z_0, и всюду на интервале $0 \leqslant z \leqslant z_0$ $w(z) \leqslant 0$, так что, согласно (1.13), (1.7), (1.1) $a < 0$; $\mathrm{Re} < 0$; $u \geqslant 0$; $v_0 < 0$ и $v_x \leqslant 0$, что характеризует движение в отрицательном направлении.

После замены переменных $w = w_0 t$ выражение (2.4) может быть записано в виде

$$z_0 = \sqrt{-w_0} \int\limits_0^1 \frac{dt}{\Delta};\ \Delta = \sqrt{2/3 w_0^2 (1 - t^3) - 2\chi (1 - t)}\ . \tag{2.5}$$

При $|w_0| \ll 1$, согласно (2.5), $z_0 \sim (-w_0)^{1/2}$, а при $|w_0| \gg 1$ $z_0 \sim (-w_0)^{-1/2}$, поэтому при некотором w_0 существует максимальное значение z_0. Используя (1.13), (2.5), можно записать

$$\mathrm{Re} = -w_0^2 \int\limits_0^1 \frac{dt}{\Delta} \int\limits_0^1 \frac{tdt}{\Delta}.$$

Отсюда видно, что при $|w_0| \ll 1$ $\mathrm{Re} \sim w_0^2$, а при $|w_0| \to \infty$ Re стремится к некоторому конечному числу, равному, согласно расчетам, $-1{,}814$. Следовательно, при положительном градиенте давления обратное движение с большими числами Рейнольдса невозможно.

В случае $\chi = +1$ функцию $F(w)$, определенную выражением (2.2), удобно представить в виде

$$F(w) = 2/3(w - w_0)(w - w_1)(w - w_2), \tag{2.6}$$

где

$$w_{1,2} = 1/2 \left(\pm \sqrt{12 - 3w_0^2} - w_0\right).$$

Если $w(z)$ есть решение исходной краевой задачи, то $w(z_0) = 0$, так что $F(0) = 2w_0(1 - 1/3w_0^2)$. Поскольку по определению $F(w) \geqslant 0$, допустимы лишь значения w_0, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leqslant w_0 \leqslant \sqrt{3} \text{ или } w_0 \leqslant -\sqrt{3}.$$

На интервалах $0 \leqslant w_0 \leqslant \sqrt{3}$ и $-2 \leqslant w_0 \leqslant -\sqrt{3}$ корни w_1 и w_2 вещественны, при $w_0 < -2$ — комплексны. Функция (2.6) является кубической параболой, причем $F \to \pm\infty$, когда $w \to \pm\infty$. Если $w_0 < -2$, то $F(w)$ имеет единственный вещественный корень w_0 и $w(z)$ монотонно возрастает до бесконечности. Это следует из (2.1), (2.2). При $w_0 \to -\infty$ $\mathrm{Re} \to -1{,}814$, как и для $\chi = -1$. В случае $w_0 = -2$ $w(z)$, монотонно возрастая, асимптотически стремится к значению $w_1 = w_2 = 1$. Если $-2 < w_0 \leqslant -3$, то $w(z)$ возрастает, пока функция $F(z)$ не достигает следующего нуля $0 \leqslant w_1 < 1$, где w имеет максимум. Дальше с ростом z $w(z)$ убывает, что соответствует движению вспять по фазовой траектории на плоскости (F, w). В этом случае функция w периодическая, колеблющаяся между значениями w_0 и w_1 с периодом

$$\zeta = \sqrt{\frac{3}{2}} \int\limits_{w_0}^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{(w - w_0)(w - w_1)(w - w_2)}}. \tag{2.7}$$

При $w_0 = -\sqrt{3}$ $w_1 = 0$, так что $w(z)$ достигает максимума при $w = 0$ и колеблется между значениями $-\sqrt{3}$ и 0 с периодом $\zeta = (3/4)^{1/4}(2\sqrt{2\pi})^{-1} \times \Gamma^2(1/4) \simeq 2{,}45$, которому соответствует число Рейнольдса $\mathrm{Re} = -3/2\pi = -4{,}71$. В интервале $-\sqrt{3} < w_0 < 0$ функция $w(z)$ является периодической и отрицательной, так что исходная краевая задача, как уже отмечалось, решения не имеет, т. е. обратное движение газа не может осуществляться при достаточно больших по модулю числах Re.

При $0 < w_0 < 1$ функция $w(z)$ также периодическая с периодом (2.7). Она может быть получена сдвигом на половину периода решений, соответствующих значениям $-2 < w_0 \leqslant -\sqrt{3}$. Поэтому минимумы функции $w(z)$ лежат в интервале $(-2; -\sqrt{3})$, значит, для каждого w_0 из рассматриваемого интервала существует конечное значение z_0.

Для периодических решений под величиной z_0 можно понимать первый корень функции $w(z)$. Существуют автомодельные периодические решения, определяемые входным знакопеременным распределением скорости, но такие здесь не рассматриваются.

В случае $w_0 = 0$ уравнение (2.2) однородно и поэтому $w(z) \equiv 0$. Если считать, что при малых w_0 всюду на интервале $(0, z_0)$ $w(z)$ мало, то, согласно (2.1), следует положить $w'' = -1$;

$$w = w_0 = 1/2z^2;\ z_0 = \sqrt{2w_0};\ \mathrm{Re} = 4/3w_0^2;\ a = 3/2w_0.$$

Отсюда, согласно (1.7), получается парабола Пуазейля

$$u = 3/2(1 - y^2),$$

причем коэффициенты a и c определяются соотношениями

$$a = \sqrt{3/\mathrm{Re}},\ c = a^2 = 3/\mathrm{Re}.$$

В другом предельном случае при $w_0 = 1$ $w_1 = 1$; $w_2 = -2$;

$$\zeta = \infty;\ F(w) = 2/3(1 - w)^2(2 + w);$$

$$w' = -(1 - w)\sqrt{2/3(2 + w)};\ w(0) = 1.$$

Последнее уравнение имеет тривиальное решение $w \equiv 1$, с помощью которого нельзя построить решения исходной краевой задачи. Поэтому положим $w_0 = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$.

Можно видеть, что $F(0) = 4/3(1 - 1/2\varepsilon^2 - 1/2\varepsilon^3)$. Следовательно, с точностью до линейных по ε членов

$$F(w) = 2/3(1 - w)^2(2 + w).$$

Подстановка этого выражения в (2.2) и интегрирование при условии $w(0) = 1 - \varepsilon$ дает

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2+w}}{\sqrt{3} - \sqrt{2+w}} \frac{1 - \sqrt{1 - 1/3\varepsilon}}{1 + \sqrt{1 - 1/3\varepsilon}}.$$

Если положить $w = 0$, то при удержании членов порядка ε

$$z_0 \simeq (1/\sqrt{2}) \ln (1{,}21/\varepsilon).$$

Далее можно найти, что

$$\int_0^{z_0} w dz = \int_0^{w_0} z' w dw = \int_0^{w_0} \frac{w dw}{\sqrt{F(w)}} \simeq z_0 - 0{,}777.$$

С учетом этого результата, согласно (1.13),

$$a = 1 + 0{,}778/z_0; \ \mathrm{Re} = z_0(z_0 - 0{,}777).$$

Из последней формулы видно, что малым ε отвечают большие значения Re. Асимптотическая зависимость $\varepsilon(\mathrm{Re})$ имеет вид

$$\varepsilon = 0{,}697 \exp(-\sqrt{2\,\mathrm{Re}}).$$

С помощью этого соотношения можно получить

$$a \simeq 1; \ z_0 \simeq \sqrt{\mathrm{Re}}; \ w'(z_0) \simeq -2\sqrt{3}; \ c \simeq 2/\sqrt{3\,\mathrm{Re}}.$$

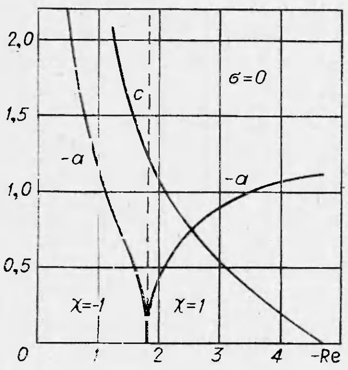
Эти результаты позволяют заключить, что в пристенной зоне при больших числах Рейнольдса найденное решение имеет характер ламинарного пограничного слоя; в ядре потока скорость практически постоянна. Эта перестройка профиля по сравнению с изотермическим случаем происходит при постоянной по сечению температуре и связана лишь с осевым ускорением потока, которое приводит не только к возрастанию полного сопротивления a^2, но и существенно увеличивает сопротивление трения по сравнению с течением Пуазейля, для которого $c = 3/\mathrm{Re}$.

В общем случае решение уравнения (2.2) выражается в виде эллиптического интеграла

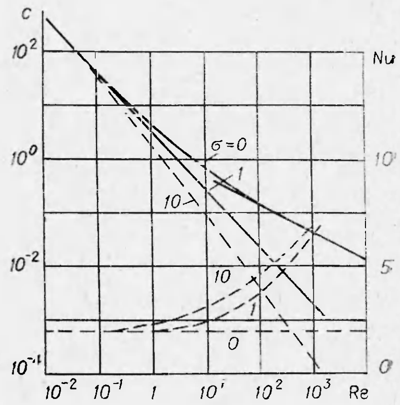
$$z = \int_w^{w_0} \frac{dw}{\sqrt{F(w)}}.$$

Следовательно, $w(z)$ можно записать в виде эллиптической функции. Проще, однако, эту задачу решить численно для разных w_0. Результаты таких расчетов для $\mathrm{Re} < 0$ показаны на фиг. 1, а для $\mathrm{Re} > 0$ — на фиг. 2.

В случае малых чисел Рейнольдса задача может быть решена для любых значений σ.



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение системы (1.4), (1.5) строится в виде разложения

$$u = u_1 \operatorname{Re} + u_2 \operatorname{Re}^2 + \ldots; \quad \theta = 1 + \theta_1 \operatorname{Re} + \theta_2 \operatorname{Re}^2 + \ldots$$

Для старших коэффициентов разложения получается система уравнений

$$u_1'' = -\chi a^2; \quad \theta_1'' = 0; \quad \theta_2'' = \sigma u_1,$$

для которой ставятся граничные условия

$$u_1'(0) = u_1(1) = \theta_1'(0) = \theta_1(1) = \theta_2'(0) = \theta_2(1) = 0.$$

Решение имеет вид

$$u_1 = (\chi a^2/2)(1 - y^2); \quad \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = (\sigma\chi a^2/24)(6y^2 - y^4 - 5).$$

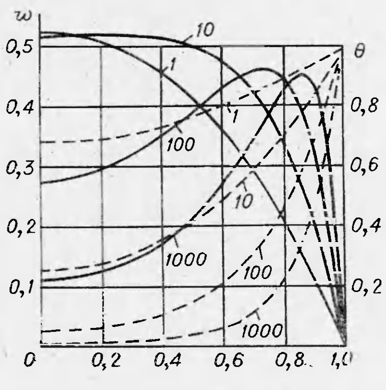
Следовательно,

$$\theta = 1 + (\sigma\chi a^2/24)\operatorname{Re}^2 (6y^2 - y^4 - 5); \quad \theta_0 = 1 - (5/24)\sigma\chi a^2 \operatorname{Re}^2.$$

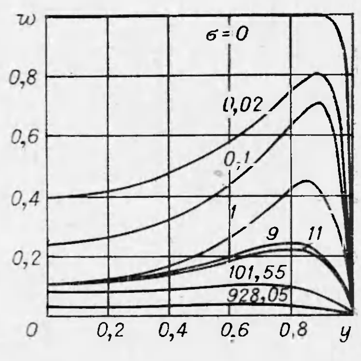
Подстановка этих результатов в (1.14) дает

$$\mathrm{Nu} = 1{,}6. \tag{2.8}$$

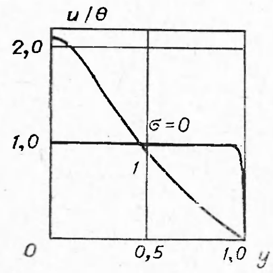
Можно показать, что и при $\sigma \to 0$ имеет место предельное соотношение (2.8).



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Результаты численного решения задачи в виде зависимостей $c(\mathrm{Re})$ и $\mathrm{Nu}(\mathrm{Re})$ представлены на фиг. 2 штрихом для трех значений параметра $\sigma = 0$; 1; 10. Наиболее характерным свойством профилей скорости при $\sigma > 0$ является немонотонность распределения скоростей по сечению канала при больших числах Рейнольдса (фиг. 3, где для случая $\sigma = 1$ сплошными линиями показаны зависимости $w(y)$ при разных числах Re, а штриховыми —распределения температур $\theta(\mathrm{Re})$). Числам Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1$; 10; 100; 1000 соответствуют значения $a = 2{,}05$; 0,861; 0,361 и 0,148. Семейство профилей $w(y)$ при $\mathrm{Re} = 1000$ и различных числах Прандтля ($0 < \sigma < 1000$) представлено на фиг. 4. Профили массовой скорости $\rho v_x \sim u/\theta$ являются монотонными (фиг. 5, где приведено сравнение профилей u/θ для $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ при $\mathrm{Re} = 1000$).

Таким образом, неравномерность распределения плотности по сечению канала приводит к снижению объемной и увеличению массовой скорости в приосевой зоне.

Автор благодарит А. Ф. Селезневу за проведение расчетов и В. Н. Штерна за обсуждение работы.

Поступила 30 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петухов Б. С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М., «Энергия», 1967.

УДК 532.517

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ РАДИУСА ВОЗДУШНОГО ВИХРЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКЕ

Ю. З. Нехамкин, Б. Д. Стрелков, Ю. И. Хавкин

(*Ленинград*)

В существующих теориях центробежной форсунки, например [1], для определения радиуса воздушного вихря r_0 используется условие максимального расхода или другие экстремальные принципы. В данной работе радиус воздушного вихря определен из уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости.

Схема форсунки приведена на фиг. 1. Явления, происходящие в пограничных слоях вблизи торцов, не рассматриваются. Область течения разбивается на две зоны.

Все величины в данной работе безразмерные, масштаб длин — радиус выходного сопла r_1, масштаб скоростей — скорость во входных каналах V.