

УДК 536.24.01

## Расчет теплопереноса в пленках жидкости на основе метода взвешенных невязок\*

С.П. Актершев, М.В. Барташевич

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

E-mail: sergey-aktershev@mail.ru

Рассматривается применение метода взвешенных невязок для расчета теплопереноса в движущихся тонких пленках жидкости. В качестве примера решена задача о пленке, движущейся под действием газового потока по нагреваемой горизонтальной стенке. Получено хорошее совпадение с численным решением задачи конечно-разностным методом.

**Ключевые слова:** пленка жидкости, теплоперенос, полуаналитический метод.

Обширная область использования жидких пленок мотивирует их многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, начиная с классических работ Нуссельта [1, 2]. Большинство теоретических исследований теплопереноса в тонких пленках жидкости проводится с использованием численных методов (см. [3]), однако эти вычисления не всегда позволяют выяснить физическую природу соотношений между определяющими параметрами задачи. По этой причине большую ценность представляют аналитические решения, даже если они получены для простых частных случаев. Так, в работе [4] полуаналитический метод применен в задаче о нагреве ламинарной пленки жидкости с параболическим профилем скорости при условии постоянной температуры стенки и постоянной температуры поверхности пленки. Решение получено в виде ряда слагаемых, выраженных через специальные функции Витакера.

В настоящей работе предложен более общий полуаналитический подход к проблеме теплопереноса в движущихся пленках жидкости, основанный на методе взвешенных невязок, который позволяет учесть теплообмен между жидкостью и газом. Предполагается, что ламинарная пленка жидкости постоянной толщины  $h$  движется по горизонтальной стенке под действием касательного напряжения  $\tau$  со стороны газового потока, при этом профиль скорости жидкости в пленке  $u(y) = \tau y / \mu$ . На участке нагрева ( $x > 0$ ) задается либо температура стенки  $T_w$ , либо постоянный тепловой поток  $q_w$ ; при  $x < 0$  температура жидкости совпадает с температурой газа  $T_g$  (см. рис. 1). Плотность  $\rho$ , динамическую вязкость  $\mu$ , теплопроводность  $\lambda$ , температуропроводность  $a$  жидкости будем считать постоянными; коэффициент теплообмена с газом  $\alpha$  считаем заданным. Выберем  $l = \tau h^3 / \mu \alpha$  в качестве масштаба по оси  $Ox$ , в качестве масштаба по оси  $Oy$  — толщину пленки  $h$ .

\* Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект № 15-19-10025).

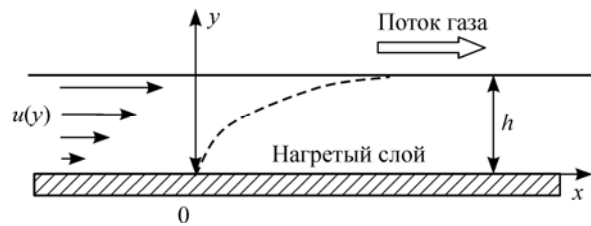


Рис. 1. Схема течения нагреваемой пленки на горизонтальной стенке.

За масштаб температуры примем  $T_m = T_w - T_g$  для случая заданной температуры стенки или  $T_m = q_w h / \lambda$  для случая заданного теплового потока на стенке. Распределение температуры жидкости описывается уравнением энергии, которое в безразмерных переменных  $x/l, y/h, (T - T_g) / T_m$  имеет вид

$$y(\partial T / \partial x) = \partial^2 T / \partial y^2. \quad (1)$$

Граничные условия определяются следующим образом: в случае заданной температуры стенки —  $T|_{y=0} = 1$ , а в случае заданного теплового потока —  $\partial T / \partial y|_{y=0} = -1$ . Условие теплообмена с газом на поверхности пленки имеет вид  $(\partial T / \partial y + \text{Bi} \cdot T)|_{y=1} = 0$ , где  $\text{Bi} = \alpha h / \lambda$  — число Био. Для корректности постановки задачи следует выбрать профиль температуры жидкости на входе  $T|_{x=0} = F(y)$ . Следуя методу взвешенных невязок [5], представим температуру в виде

$$T(x, y) = T_{\text{eq}} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \psi_k(y). \quad (2)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой установившееся распределение температуры при заданной температуре стенки  $T_{\text{eq}} = 1 - y \cdot \text{Bi} / (1 + \text{Bi})$  и при заданном тепловом потоке на стенке  $T_{\text{eq}} = 1 - y + 1 / \text{Bi}$ ; ряд описывает процесс установления равновесной температуры. Пробные функции  $\psi_k(y)$ , определенные как  $\psi_k(y) = \sin \omega_k y$  при заданной температуре стенки или как  $\psi_k(y) = \cos \omega_k y$  при заданном тепловом потоке, должны удовлетворять соответствующим краевым условиям:

$$\text{— при заданной температуре стенки — } \psi(0) = 0, \quad \psi'(1) + \text{Bi} \psi(1) = 0, \quad (3)$$

$$\text{— при заданном тепловом потоке — } \psi'(0) = 0, \quad \psi'(1) + \text{Bi} \psi(1) = 0. \quad (4)$$

Из условий (3), (4) следует, что все частоты  $\omega_k$  являются корнями трансцендентного уравнения, которое имеет следующий вид:

$$\text{— при заданной температуре стенки — } \omega / \text{Bi} = -\text{tg} \omega, \quad (5)$$

$$\text{— при заданном тепловом потоке — } \omega / \text{Bi} = \text{ctg} \omega. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) имеют счетное множество корней, которые легко вычисляются методом итераций. Нетрудно показать, что на интервале  $0 \leq y \leq 1$  система функций  $\psi_k(y), k = 1, 2, 3, \dots$  представляет собой ортогональный базис, т.е. любая функция переменной  $y$  представляется в виде ряда по  $\psi_k$ . Подстановка (2) в уравнение (1) дает невязку

$$R(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(x, y), \quad \text{где } R_k(x, y) \equiv \left( y \frac{da_k}{dx} + \omega_k^2 a_k \right) \psi_k.$$

Согласно методу взвешенных невязок, из условия равенства нулю проекции  $R_k(x, y)$  на соответствующую пробную функцию  $\psi_k(y)$  для амплитуд  $a_k(x)$  получаем уравнение

$$\frac{da_k}{dx} \int_0^1 y \psi_k^2 dy + \omega_k^2 a_k \int_0^1 \psi_k^2 dy = 0, \text{ которое имеет решение } a_k(x) = A_k \exp(-\beta_k x).$$

Значения  $\beta_k = \omega_k^2 \int_0^1 \psi_k^2 dy / \int_0^1 y \psi_k^2 dy > 0$  вычисляются аналитически. Таким образом, поле температуры жидкости в пленке имеет следующий вид:

– при заданной температуре стенки —

$$T(x, y) = 1 - \frac{\text{Bi}}{1 + \text{Bi}} y - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\beta_k x) \sin \omega_k y, \quad (7)$$

– при заданном тепловом потоке —

$$T(x, y) = 1 - y + \frac{1}{\text{Bi}} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\beta_k x) \cos \omega_k y. \quad (8)$$

Константы  $A_k$  являются коэффициентами разложения функции  $T_{\text{eq}} - F$  в ряд по  $\psi_k(y)$  и определяются формулой

$$A_k = \int_0^1 (T_{\text{eq}}(y) - F(y)) \psi_k dy / \int_0^1 \psi_k^2 dy. \quad (9)$$

Исходя из известных функций  $T_{\text{eq}}$  и  $F$ , числитель в уравнении (9) можно найти численным методом. Для определения функции  $F(y)$  рассмотрим асимптотику  $x \ll 1$ . Вблизи края нагреваемого участка изменение температуры жидкости происходит в тонком слое около стенки, поэтому для термического начального участка можно получить аналитическое решение уравнения (1). Для случая заданной температуры стенки такое решение было получено в работе [6]:

$$T = \varphi(\xi) = 1 - \int_0^{\xi} \exp(-z^3/9) dz / \int_0^{\infty} \exp(-z^3/9) dz, \text{ где } \xi = y/x^{1/3} \text{ — автомодельная переменная.}$$

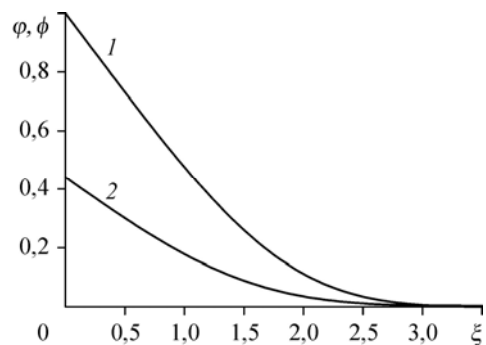
Для случая заданного теплового потока решение было получено в работе [7] в виде

$$T = x^{1/3} \Phi(\xi), \text{ где } \Phi(\xi) = -\xi \cdot (1 - G(\xi)) + 3 \exp(-\xi^3/9) / \int_0^{\infty} z \cdot \exp(-z^3/9) dz,$$

$$G(\xi) = \int_0^{\xi} z \cdot \exp(-z^3/9) dz / \int_0^{\infty} z \cdot \exp(-z^3/9) dz.$$

На рис. 2 показаны графики функций  $\varphi(\xi)$  и  $\Phi(\xi)$ . Видно, что в обоих случаях значение  $\xi_0 = 3,5$ , при котором температура близка к нулю, можно принять за условную толщину нагретого слоя. Тогда безразмерное расстояние  $x_0$ , на котором граница нагретого слоя достигает поверхности пленки, определяется соотношением  $x_0 = 1/\xi_0^3$ . Профиль температуры в этом сечении будет  $F(y) = \varphi(3,5y)$  при заданной температуре стенки или  $F(y) = x_0^{1/3} \Phi(3,5y)$  при заданном тепловом потоке. Поскольку  $x_0 \ll 1$ , можно считать, что эти соотношения задают профиль температуры при  $x = 0$ . Предложенный

Рис. 2. Профиль температуры на термическом начальном участке для случаев заданной температуры стенки (1) и заданного теплового потока на стенке (2).



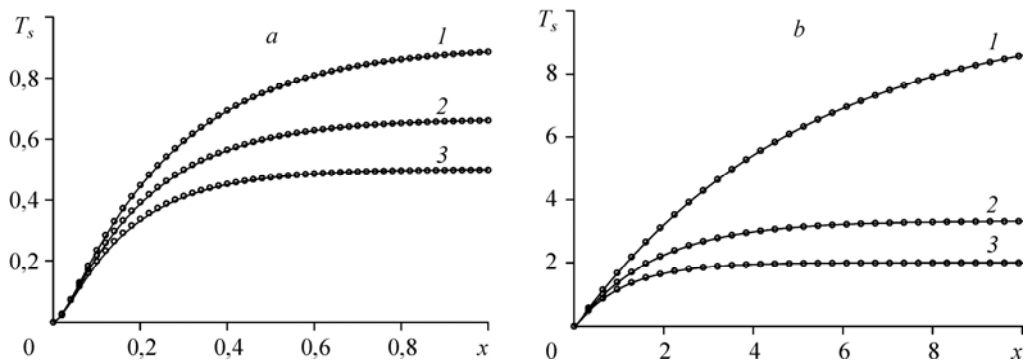


Рис. 3. Температура поверхности пленки в зависимости от расстояния при заданной температуре стенки (а) и при заданном тепловом потоке на стенке (б).

Сплошные линии — конечно-разностный метод, символы — предложенный метод;  
а:  $Bi = 0,1$  (1),  $0,5$  (2),  $1$  (3); б:  $Bi = 0,1$  (1),  $0,3$  (2),  $0,5$  (3).

подход позволяет получить аналитическое выражение для коэффициента теплоотдачи  $\alpha_w$  от стенки к жидкости. Величина  $\alpha_w$  определяется соотношением  $q_w = \alpha_w(T_w - T_g)$  в случае заданной температуры стенки или  $q_w = \alpha_w(T_w - T_f)$  в случае заданного теплового потока на стенке, где  $T_f$  — среднерасходная температура жидкости в пленке. Используя толщину пленки  $h$  в качестве масштаба длины, коэффициент теплоотдачи можно записать в терминах безразмерного числа Нуссельта:  $Nu = \alpha_w h / \lambda$ . Вычислив  $\partial T / \partial y|_{y=0}$  и  $T_f$  из выражений (7) и (8), при заданной температуре стенки получим

$$Nu = Bi / (1 + Bi) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega_k \exp(-\beta_k x), \text{ а при заданном тепловом потоке — } Nu = (T_w - T_f) - 1.$$

$$\text{Здесь } T_w - T_f = \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp(-\beta_k x) (1 - 2J_k), \text{ } J_k = (\cos \omega_k (Bi + 1) - 1) / \omega_k^2.$$

Результаты расчетов методом взвешенных невязок с использованием десяти базисных функций сопоставлены с численным решением уравнения (1) конечно-разностным методом. На рис. 3 кривыми 1–3 представлены зависимости температуры поверхности пленки от расстояния для различных значений параметра  $Bi$ . Из рисунка видно, что расчеты по формулам (7), (8) практически совпадают с результатами численного решения. Отметим, что метод применим для произвольного (заранее заданного) профиля скорости в пленке.

### Список литературы

1. Nusselt W. Der Oberflächen-Kondensation des Wasserdampfes // Zeitschrift der VDI. 1916. No. 27. P. 541–546, No. 28. P. 569–575.
2. Nusselt W. Der Wärmeaustausch am Berieselungskühler // Zeitschrift der VDI. 1923. Bd. 67, H. 9. P. 206–210.
3. Холпанов Л.П., Шкадов В.Я. // Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела. М: Наука, 1990. 271 с.
4. Aubert A., Candelier F., Solliec C. Semi-analytical solution for heat transfer in a water film flowing over a heated plane // J. of Heat Transfer. 2010. Vol. 132, No. 6. P. 064501-1–064501-4.
5. Флетчер К.М. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М: Мир, 1991. 504 с.
6. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М: Химия, 1974. 688 р.
7. Актершев С.П., Барташевич М.В. Пленочное охлаждение стенки в условиях постоянного теплового потока // Материалы 6-ой Междунар. научной школы молодых ученых “Волны и вихри в сложных средах”. М.: МАКС Пресс, 2015. С. 46–50.

Статья поступила в редакцию 24 декабря 2015 г.,  
после доработки — 23 мая 2016 г.