ЛИТЕРАТУРА

1. **Азнакаев Э. Г.** Исследование явлений переноса в плотных однокомпонентных системах. Криогенные простые жидкости // Физика низких температур.— 1979.— № 10.
2. **Физика** простых жидкостей. Статистическая теория.— М.: Мир, 1971.
3. **Боголюбов Н. Н.** Микроскопические решения уравнения Больцмана — Энскога в кинетической теории для упругих шаров // ТМФ.— 1975.— Т. 24, № 2.
4. **Чепмен С., Каулинг Т.** Математическая теория неоднородных газов.— М.: ИЛ, 1960.
5. **Гроот С., Мазур П.** Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1964.
6. **Струминский В. В., Курочкин В. И.** К кинетической теории плотных газов // ДАН СССР.— 1981.— Т. 257, № 1.

г. Киев *Поступила 24/XI 1988 г., в окончательном варианте — 19/VII 1990 г.*

УДК 539.3

В. В. Кузнецов, Ю. В. Сойников

О КРИТЕРИИ ПРИМЕНИМОСТИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК В ОБЛАСТИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек при больших упругих перемещениях существует ряд подходов. В [1] получены соотношения теории оболочек при малых деформациях и произвольных перемещениях, а также проанализированы основные способы упрощений при ограниченных перемещениях. В [2, 3] предложены варианты нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении. В [4] выведены уравнения тонких оболочек путем выделения в перемещениях жесткого поворота. В [5] основные допущения теории тонких оболочек распространены и уточнены на случай больших деформаций, сопровождающихся изменением толщины оболочки. Обычно применяемые упрощающие допущения о малости наряду с деформациями некоторых других членов, связанных с перемещениями или поворотами, не применимы при произвольных перемещениях.

Теория, построенная в [1], явилась отправным пунктом многих исследований в области нелинейного деформирования оболочек. Подход [1] к выводу деформационных соотношений при произвольных поворотах и малых деформациях основан на рассмотрении общих уравнений трехмерной нелинейной теории упругости в ортогональных криволинейных координатах. С использованием геометрических гипотез Кирхгофа — Лява была получена система трех нелинейных алгебраических уравнений относительно направляющих косинусов ϑ, ψ, $(1 + \chi)$ вектора нормали к деформированной срединной поверхности оболочки:

$$\vartheta^2 + \psi^2 + (1 + \chi)^2 = 1,\ (1 + \chi)\widehat{e}_{13} + \psi\widehat{e}_{12} + \vartheta(1 + \widehat{e}_{11}) = 0,$$
$$(1 + \chi)\widehat{e}_{23} + \vartheta\widehat{e}_{21} + \psi(1 + \widehat{e}_{22}) = 0, \tag{0.1}$$

где $\widehat{e}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ — линейные компоненты деформаций срединной поверхности; $-\widehat{e}_{i3}$ $(i = 1, 2)$ — направляющие косинусы нормали к деформированной поверхности в линейном приближении.

В предположении, что величинами деформаций можно пренебречь по сравнению с единицей, дано приближенное решение системы (0.1) в виде $\vartheta = -\widehat{e}_{13}(1 + \widehat{e}_{22}) + \widehat{e}_{23}\widehat{e}_{12}$, $\psi = -\widehat{e}_{23}(1 + \widehat{e}_{11}) + \widehat{e}_{13}\widehat{e}_{21}$, $\chi = \widehat{e}_{11} + \widehat{e}_{22} + \widehat{e}_{11}\widehat{e}_{22} - \widehat{e}_{12}\widehat{e}_{21}$. По поводу правильности этого шага вывода деформационных соотношений, сделанного автором в рамках исходных гипотез, высказано сомнение в [6, 7]. Авторами этих работ в качестве основного критерия оценки соотношений [1] принята возможность их приведения к линейным выражениям [8] при малых перемещениях. Для удовлетворения этому критерию в [6] функция χ разлагается в ряд по степеням перемещений срединной поверхности и их производных с удержанием членов второго порядка малости. Такие допущения, как отмечено в [7], не применимы при произвольных перемещениях. При этом в [7] деформационные соотношения дополняются малыми членами порядка $\widehat{\varepsilon}_{ij}/R_j$ (R_j — главные радиусы кривизны, $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ — деформации срединной поверхности). Как указано в [8, с. 27]: «Некоторые авторы склонны придавать данному обстоятельству принципиальное значение... Однако достигаемое при этом уточнение не превосходит погрешности исходных допущений теории оболочек».

Из анализа рассмотренных работ можно заключить, что при выводе различных вариантов деформационных соотношений на основе подхода [1] вопрос об их применимости в области произвольных перемещений исследован не достаточно полно.

В связи с возможностями численного решения задач изгиба оболочек при произвольных перемещениях выбор критерия оценки деформационных соотношений имеет теоретическое и прикладное значение. Отметим, что необходимость в использовании критериев возникает при оценках приближенных соотношений. В случае применения адекватных мер деформаций некоторого континуума, как например в [4, 9, 10], данные соотношения по определению удовлетворяют физически обоснованным критериям. Поскольку практическое использование самых общих формулировок затруднительно, то наиболее распространены в теории оболочек приближенные соотношения с установленной областью применимости. Однако, даже если исходить из первоначально адекватных определений, в процессе получения различных приближенных зависимостей можно нарушить некоторые обязательные критерии.

В настоящей работе на основе подхода [1] выводятся деформационные соотношения тонких оболочек в векторном виде, которые затем анализируются с помощью критерия отсутствия деформаций и искривлений при произвольных перемещениях оболочки как твердого тела. Критерий отсутствия взаимных смещений точек оболочки формулируется в терминах векторов, связанных с поверхностью («вмороженных векторов»). Показано, что в главном приближении деформационные соотношения [1] должны быть дополнены немногими, но значительными по величине членами. Проводится локальная аппроксимация деформационных соотношений, допускающая их использование в численных алгоритмах.

1. Выражения для деформаций $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ и искривлений $\varkappa_{ij}$ срединной поверхности оболочки, согласно [1], имеют вид

$$\widehat{\varepsilon}_{ij} = (1/2)(\widehat{e}_{ij} + \widehat{e}_{ji} + \widehat{e}_{im}\widehat{e}_{jm}); \tag{1.1}$$

$$\varkappa_{ij} = (1/2)(k_{ij} + k_{ji} + k_{im}\widehat{e}_{jm} + k_{jm}\widehat{e}_{im}) \tag{1.2}$$

(i, $j = 1$, 2 и производится суммирование по $m = 1$, 2, 3). Компоненты $\widehat{\varepsilon}_{ij}$ и $\varkappa_{ij}$ образуют тензоры деформаций и искривлений; $\widehat{\varepsilon}_{12}$ и $\varkappa_{12}$ отличаются от соответствующих величин [1] множителем 1/2. Смысл остальных обозначений сохранен.

Для геометрического анализа запишем (1.1), (1.2) в векторной форме. Введем векторы $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{n}_i$ ($\widehat{\mathbf{r}}_i$, $\widehat{\mathbf{n}}_i$) с помощью соотношений

$$\mathbf{r}_i = \frac{1}{A_i}\mathbf{r}_{,i}, \quad \widehat{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{A_i}\widehat{\mathbf{r}}_{,i}, \quad \mathbf{n}_i = \frac{1}{A_i}\mathbf{n}_{,i}, \quad \widehat{\mathbf{n}}_i = \frac{1}{A_i}\widehat{\mathbf{n}}_{,i}. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{r}$, $\mathbf{n}$ ($\widehat{\mathbf{r}}$, $\widehat{\mathbf{n}}$) — радиус-вектор и вектор нормали недеформированной (деформированной) срединной поверхности; A_i — параметры Ламе; $\widehat{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{r}}_1 \times \widehat{\mathbf{r}}_2$; индексом после запятой обозначены производные по координатам α_i ($i = 1$, 2).

Векторы $\widehat{\mathbf{r}}_i$, $\widehat{\mathbf{n}}_i$ можно непосредственно записать через $\widehat{e}_{ij}$, k_{ij}:

$$\widehat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \widehat{e}_{im}\mathbf{r}_m, \quad \widehat{\mathbf{n}}_i = \mathbf{n}_i + k_{im}\mathbf{r}_m \tag{1.4}$$

($i = 1$, 2 и производится суммирование по $m = 1$, 2, 3, $\mathbf{r}_3 \equiv \mathbf{n}$ — тождественное обозначение вектора нормали к исходной поверхности).

Вычислив следующие скалярные произведения, получим

$$\widehat{\mathbf{r}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j - \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = \widehat{e}_{ij} + \widehat{e}_{ji} + \widehat{e}_{im}\widehat{e}_{jm}; \tag{1.5}$$

$$(\widehat{\mathbf{n}}_i - \mathbf{n}_i)\widehat{\mathbf{r}}_j + (\widehat{\mathbf{n}}_j - \mathbf{n}_j)\widehat{\mathbf{r}}_i = k_{ij} + k_{ji} + k_{im}\widehat{e}_{jm} + k_{jm}\widehat{e}_{im}, \tag{1.6}$$

где использовано соотношение $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера).

Сравнивая (1.5), (1.6) с (1.1), (1.2), находим векторную запись для $\widehat{\varepsilon}_{ij}$, $\varkappa_{ij}$:

$$\widehat{\varepsilon}_{ij} = (1/2)(\widehat{\mathbf{r}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j - \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j); \tag{1.7}$$

$$\varkappa_{ij} = (1/2)(\widehat{\mathbf{n}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j + \widehat{\mathbf{n}}_j\widehat{\mathbf{r}}_i - \mathbf{n}_i\widehat{\mathbf{r}}_j - \mathbf{n}_j\widehat{\mathbf{r}}_i). \tag{1.8}$$

Для деформаций ε_{ij} в слое, отстоящем на расстоянии z от срединной поверхности, согласно [1], имеем $\varepsilon_{ij} = \widehat{\varepsilon}_{ij} + z\varkappa_{ij} + z^2\nu_{ij}$ или в векторной форме

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)[(\widehat{\mathbf{R}}_i - \mathbf{R}_i)\mathbf{r}_j + (\widehat{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_j)\mathbf{r}_i + (\widehat{\mathbf{R}}_i - \mathbf{R}_i)(\widehat{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_j)]; \tag{1.9}$$

$$\widehat{\mathbf{R}}_i = \widehat{\mathbf{r}}_i + z\widehat{\mathbf{n}}_i, \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{r}_i + z\mathbf{n}_i. \tag{1.10}$$

Поскольку для тонких оболочек обычно ограничиваются укороченными соотношениями $\varepsilon_{ij} = \widehat{\varepsilon}_{ij} + z\varkappa_{ij}$, величины ν_{ij} в дальнейшем не рассматриваются [1] *.

2. Положим, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, неразрывно связанные с поверхностью («вмороженные в поверхность»). При перемещении поверхности оболочки как твердого тела без деформаций и искривлений векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ также совершают некоторое перемещение в пространстве и переходят в новые положения $\widehat{\mathbf{a}}$ и $\widehat{\mathbf{b}}$. Однако изменение положения векторов относительно друг друга при этом будет отсутствовать; в результате сохраняется величина скалярного произведения

$$\widehat{\mathbf{a}}\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{ab}. \tag{2.1}$$

В частном случае $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ из (2.1) вытекает свойство сохранения длины вектора $\widehat{\mathbf{a}}^2 = \mathbf{a}^2$.

К векторам, неразрывно связанным с поверхностью, относятся производные любого порядка от радиуса-вектора по криволинейным координатам и их линейные комбинации: $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{R}_i$ и т. д. Как следствие «вмороженности» этих векторов выступает свойство сохранения коэффициентов первой и второй квадратичных форм поверхности при перемещениях твердого тела, поскольку эти коэффициенты выражаются через первые и вторые производные от радиуса-вектора. Отметим, что сам радиус-вектор не относится к типу «вмороженных». Таким образом, согласно (2.1), при перемещениях твердого тела имеем

$$\widehat{\mathbf{r}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j,\ \widehat{\mathbf{n}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j = \mathbf{n}_i\mathbf{r}_j,\ \widehat{\mathbf{R}}_i\widehat{\mathbf{R}}_j = \mathbf{R}_i\mathbf{R}_j. \tag{2.2}$$

При этом соотношения (1.7)—(1.9) показывают, что $\widehat{\varepsilon}_{ij} = 0$, $\varkappa_{ij} = (1/2)[\mathbf{n}_i(\mathbf{r}_j - \widehat{\mathbf{r}}_j) + \mathbf{n}_j(\mathbf{r}_i - \widehat{\mathbf{r}}_i)]$, $\varepsilon_{ij} = (1/2)[(\widehat{\mathbf{R}}_i - \mathbf{R}_i)(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_j) + (\widehat{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_j)(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_i)]$.

Заметим, что выражение (1.9) является определяющим в данном вопросе, так как формулы для $\varkappa_{ij}$ выводятся из (1.9) с помощью (1.10) и находятся как коэффициенты при первых степенях z [1]. При вычислении деформаций на расстоянии z от срединной поверхности радиус-вектор и его производные в исходном состоянии следует также считать зависящими от z. В результате, заменяя в (1.9) $\mathbf{r}_i$ на $\mathbf{R}_i(z)$ согласно (1.10) и приводя подобные члены, приходим к выражению

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(\widehat{\mathbf{R}}_i\widehat{\mathbf{R}}_j - \mathbf{R}_i\mathbf{R}_j), \tag{2.3}$$

которое совпадает с определением компонент тензора деформаций Грина, отнесенных к метрике срединной поверхности.

Согласно (2.2), при перемещениях твердого тела имеем $\varepsilon_{ij} = 0$. Подставляя (1.10) в (2.3) и собирая члены при первых степенях z, находим

$$\varkappa_{ij} = (1/2)(\widehat{\mathbf{n}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j + \widehat{\mathbf{n}}_j\mathbf{r}_i - \mathbf{n}_i\mathbf{r}_j - \mathbf{n}_j\mathbf{r}_i). \tag{2.4}$$

Применяя равенства (2.2), получаем $\varkappa_{ij} = 0$. Подстановка (1.4) в (2.4) приводит к соотношениям (суммирование по $m = 1, 2, 3$)

$$\varkappa_{ij} = \frac{1}{2}\left(k_{ij} + k_{ji} + k_{im}\widehat{e}_{jm} + k_{jm}\widehat{e}_{im} + \frac{1}{R_j}\widehat{e}_{ij} + \frac{1}{R_i}\widehat{e}_{ji}\right). \tag{2.5}$$

Здесь R_i — главные радиусы кривизны, получающиеся при раскрытии выражения $\mathbf{n}_i\mathbf{r}_j = (1/R_i)\delta_{ij}$. Оценим добавочные члены в (2.5). Поскольку сумма $\delta_{ij} + e_{ij}$, согласно (1.4), с точностью до членов порядка деформаций совпадает с величиной направляющих косинусов вектора $\widehat{\mathbf{r}}_i$, то при любых перемещениях имеем

$$-1 \leqslant \delta_{ij} + \widehat{e}_{ij} \leqslant 1. \tag{2.6}$$

---

* Заметим, что при сильных локальных изгибах в пластической области деформирования вклад членов с $z^2\nu_{ij}$ может быть значительным.

Из (2.6) при $i = j$ находим $-2 \leqslant \widehat{e}_{ii} \leqslant 0$ и при $i \neq j$ $-1 \leqslant \widehat{e}_{ij} \leqslant 1$. Граничные значения этих неравенств могут изменяться на величину порядка деформаций. Выражения (2.5) отличаются от деформационных соотношений [6, 7].

Рассмотрим (2.5) в случае цилиндрического изгиба нерастяжимой ($\widehat{\varepsilon}_{ij} = 0$) искривленной полосы радиуса $R_1(\alpha_1)$. Отличной от нуля будет $\varkappa_{11}$. В качестве параметра α_1 примем длину дуги срединной поверхности в недеформированном состоянии, тогда $A_1 = 1$. Из $\widehat{e}_{ij}$, k_{ij} отличными от нуля будут [1] $\widehat{e}_{11} = \widehat{u}_{,1} + \widehat{w}/R_1$, $\widehat{e}_{13} = w_{,1} - \widehat{u}/R_1$, $k_{11} = -\widehat{e}_{13,1} + \widehat{e}_{11}/R_1$, $k_{13} = \widehat{e}_{11,1} + \widehat{e}_{13}/R_1$. Здесь $\widehat{u}$, $\widehat{w}$ — продольное и поперечное перемещения, индексом после запятой обозначены производные по α_1. Выражение (2.5) для $\varkappa_{11}$ с учетом $\widehat{\varepsilon}_{11} = 0$ принимает форму $\varkappa_{11} = -(1 + \widehat{e}_{11})\widehat{e}_{13,1} + \widehat{e}_{13}\widehat{e}_{11,1}$, которая совпадает с точной формулой для изменения кривизны плоской кривой.

3. Рассмотрим возможность применения векторного аналога соотношений (1.1), (2.5):

$$\widehat{\varepsilon}_{ij} = (1/2)(\widehat{\mathbf{r}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j - \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j), \quad \varkappa_{ij} = (1/2)(\widehat{\mathbf{n}}_i\widehat{\mathbf{r}}_j + \widehat{\mathbf{n}}_j\widehat{\mathbf{r}}_i - \mathbf{n}_i\mathbf{r}_j - \mathbf{n}_j\mathbf{r}_i). \tag{3.1}$$

В окрестности регулярной точки O произвольной поверхности имеют место аппроксимационные соотношения [11] (начало координат α_1, α_2 помещено в точку O)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^p + \zeta\mathbf{n}^p, \quad A_i^2 \simeq (\mathbf{r}^p_{,i})^2 = 1, \quad \zeta \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}\alpha_1^2 + \frac{1}{R_2}\alpha_2^2\right)$$

($\mathbf{r}^p(\alpha_1, \alpha_2)$— радиус-вектор на плоскости, касательной к поверхности в данной точке, $\mathbf{n}^p$ — нормаль к плоскости, $\zeta(\alpha_1, \alpha_2)$— функция, задающая форму поверхности). Используя аналогичную аппроксимацию для деформированной поверхности [12], с учетом выражений (1.3) представим (3.1) в виде

$$\widehat{\varepsilon}_{ij} \simeq (1/2)(\widehat{\mathbf{r}}^p_{,i}\widehat{\mathbf{r}}^p_{,j} - \mathbf{r}^p_{,i}\mathbf{r}^p_{,j}); \tag{3.2}$$

$$\varkappa_{ij} \simeq (1/2)(\widehat{\mathbf{n}}_{,i}\widehat{\mathbf{r}}^p_{,j} + \widehat{\mathbf{n}}_{,j}\widehat{\mathbf{r}}^p_{,i} - \mathbf{n}_{,i}\mathbf{r}^p_{,j} - \mathbf{n}_{,j}\mathbf{r}^p_{,i}). \tag{3.3}$$

Отброшенные члены в (3.2), (3.3) имеют порядок $O(\alpha^2)$ [12], где $\alpha = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}$ — радиус окрестности точки касания. Выражение (3.3) можно записать в следующей эквивалентной форме с учетом равенства $\widehat{\mathbf{r}}^p_{,ij} = 0$:

$$\varkappa_{ij} = (1/2)(\Theta_{i,j} + \Theta_{j,i}), \quad \Theta = \widehat{\mathbf{n}}\,\widehat{\mathbf{r}}^p_{,i} - \mathbf{n}\mathbf{r}^p_{,i}, \tag{3.4}$$

что делает его близким по смыслу аналогичным выражениям в линейной теории пластин и оболочек, но при этом Θ_i вычисляются по нелинейной формуле. Можно также показать [12], что соотношения (3.2), (3.4) инвариантны к повороту координат α_1, α_2. По смыслу используемого понятия касательной плоскости к исходной и деформированной поверхности $\mathbf{r}^p_{,i}$ — «вмороженный вектор». Значит, при перемещениях твердого тела

$$\widehat{\mathbf{r}}^p_{,i}\widehat{\mathbf{r}}^p_{,j} = \mathbf{r}^p_{,i}\mathbf{r}^p_{,j}, \quad \widehat{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad \widehat{\mathbf{n}}\,\widehat{\mathbf{r}}^p_{,i} = \mathbf{n}\mathbf{r}^p_{,i}, \quad \varkappa_{ij} = 0.$$

Таким образом, выражения (3.2)—(3.4) применимы в качестве мер деформаций и искривлений при произвольных перемещениях.

Аппроксимационные деформационные соотношения удобно использовать в прямых численных методах, например в методе конечных элементов. При этом в качестве геометрических характеристик исходной поверхности используется информация о радиусе-векторе и векторе нормали в ограниченном числе точек.

На рис. 1 показано решение задачи о симметричной деформации полукольца, отнесенного к координатам x_1, x_2, радиуса $R = 1$, нагруженного

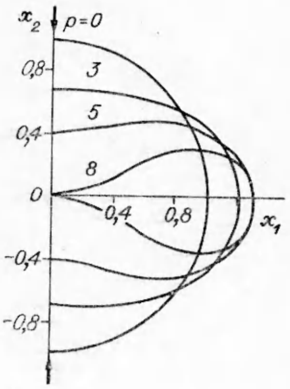

Рис. 1

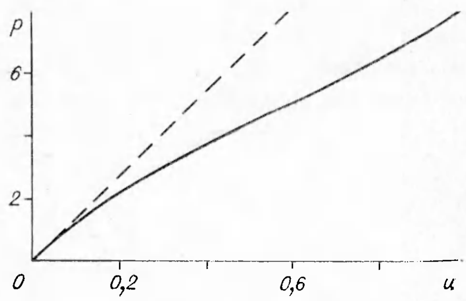

Рис. 2

двумя сосредоточенными силами, величиной p^+. На рис. 2 приведена зависимость нагрузки $p = 2p^+R^2/D$ от смещения $u = u^+/(2R)$ (u^+ — взаимное смещение точек приложения сил, D — изгибная жесткость). Штриховая линия — линеаризованная зависимость. Решение получено методом конечных элементов на основе выражений (3.2), (3.4) для $\tilde{\varepsilon}_{11}$, $\varkappa_{11}$. Характеристика нелинейного деформирования и равновесные формы хорошо согласуются с точным решением, найденным методом эллиптических интегралов [13].

Применение метода определения деформированного состояния оболочек, основанного на использовании соотношений (3.2), (3.4), канонических форм энергии [14] и вариационных формул векторной алгебры [15], дано в [12, 16, 17].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости.— Л.; М.: Гостехиздат, 1948.
2. **Шаповалов Л. А.** Об одном простейшем варианте геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1968.— № 1.
3. **Григолюк Э. И., Мамай В. И.** Об одном варианте уравнений теории конечных перемещений непологих оболочек // Прикл. механика.— 1974.— Т. 10, № 2.
4. **Шкутин Л. И.** Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек // Прикл. пробл. прочности и пластичности.— 1977.— № 7.
5. **Черных К. Ф.** О нелинейной теории тонких упругих оболочек из эластомеров // Деформация сплошных сред и управление движением.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.
6. **Tsao C. H.** Strain displacement relations in large displacement theory of shells // AIAA J.— 1964.— V. 2, N 11.
7. **Берковиц Х. М.** Соотношения между деформациями и смещениями теории больших прогибов оболочек // РТК.— 1965.— Т. 3, № 11.
8. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек.— Л.; М.: Судпромгиз, 1951.
9. **Галимов К. З.** Общая теория упругих оболочек при конечных перемещениях // Изв. Казан. фил. АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук.— 1950.— № 2.
10. **Алумяэ Н. А.** Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии // ПММ.— 1949.— Т. 13, вып. 1.
11. **Рашевский П. К.** Курс дифференциальной геометрии.— Л.; М.: Гостехиздат, 1950.
12. **Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.** Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 1.
13. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней.— М.: Наука, 1986.
14. **Кузнецов В. В.** Канонический тензор в теории упругости // ПМТФ.— 1987.— № 5.
15. **Кузнецов В. В.** К определению вращений в трехмерном пространстве на основе понятия вариации вектора // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 4.
16. **Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.** Метод конечных элементов в задачах нелинейного деформирования подкрепленных оболочек произвольной формы // Изв. АН СССР. МТТ.— 1988.— № 3.
17. **Кузнецов В. В., Сойников Ю. В.** Решение задач равновесия тонких упругих тел при больших перемещениях и поворотах // Тр. XIV Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек.— Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987.— Т. 2.

г. Новосибирск

Поступила 26/I 1990 г.,
в окончательном варианте — 5/VI 1990 г.