

Переходя в (17) к пределу при $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow 0$, находим

$$\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\xi Q} = \frac{\pi^2}{4\kappa}.$$

Таким образом,

$$\omega \sim 2\kappa\tau \text{ при } \tau \rightarrow 0.$$

На фиг. 2 представлена зависимость ω от τ при $\kappa = 0,5; 1; 1,5$ (точки 1—3). Цифрами 4—7 обозначены линии $\omega = \tau$, $\omega = 2\tau$, $\omega = 3\tau$, $\omega = 1 - 1/4\tau$.

Автор выражает благодарность Л. Я. Рыбаку за проведение численных расчетов по формуле (16).

Поступила 12 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., ГИТТЛ, 1955.
2. Mallick D. D. Nonuniform rotation of an infinite circular cylinder in an infinite viscous liquid.—ZAMM, 1957, Bd 37, N 9/10.
3. Erdélyi A., Kermack W. O. Note on the equation $f(z)K_n'(z) - g(z)K_n(z) = 0$.—Proc. Cambr. Phil. Soc., 1945, vol. 41, p. 1.
4. Корнев Б. Г. Введение в теорию бесселевых функций. М., Наука, 1971.

УДК 532.529

ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВКЛЮЧЕНИЙ НА УРАВНЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ПУЗЫРЕЙ В ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕДАХ

А. Е. Крошилин, В. Е. Крошилин, Б. И. Нигматулин

(Москва)

При построении моделей многофазных сред необходимо учитывать влияние объемной концентрации включений на силовое или тепловое межфазное взаимодействие. Теоретическому изучению этой проблемы посвящено большое количество работ, обзор которых содержится, например, в [1, 2]. В [1] показано, что межфазные взаимодействия, вообще говоря, зависят от вида распределения включений в среде. Обычно рассматриваются дисперсные среды с двумя предельными схемами распределения частиц в объеме среды: с регулярной и хаотической структурой. Дисперсные среды с регулярной структурой исследуются в рамках метода ячеек [1, 2]. Для изучения среды с хаотической структурой используются зависимости характеристик взаимодействия отдельного включения с несущей средой при конкретном расположении остальных включений и проводится усреднение их по статистическому ансамблю с использованием функций распределения включений в объеме среды. В то же время сами функции распределения зависят от взаимодействия между включениями через несущую среду. Поэтому задача определения функций распределения с учетом этого взаимодействия существенно усложняется, и за редким исключением [3] при ее решении используется упрощающее предположение о независимости функций распределений от взаимодействия включений [4—6]. Задача определения средних характеристик среды остается достаточно сложной даже при известных функциях распределения, поэтому для ее упрощения конкретный вид взаимодействия включения с несущей средой при определенном расположении остальных задается приближенно. В [3] при описании этого взаимодействия ограничиваются дипольным приближением, в [5, 6] используется существенное предположение о применимости средних характеристик среды, полученных

путем осредненных по объему, содержащему много включений, для описания течения вблизи отдельного включения. По словам авторов [5, 6], это предположение не обосновано строго, но приводит к существенному упрощению выкладок, в [4] используется физически понятная идея самосогласования и т. д. Используемые в [3—6] предположения не позволяют теоретически оценить погрешность, вносимую ими в конечные зависимости. В то же время можно оценить погрешность различных приближенных подходов, сравнивая конечные приближенные формулы с точной, на примере тех немногих задач, где удастся получить результат точно.

В данной работе рассматривается задача о колебаниях газовых пузырей в идеальной жидкости в случае, когда объемная концентрация пузырей $\alpha_2 \ll 1$. Выписан потенциал течения жидкости при произвольном расположении пузырей. С точностью до α_2 вычислены средние значения потенциала и квадрата скорости на поверхности пробного пузыря при хаотическом расположении остальных, получено обобщенное уравнение Рэлея — Ламба. Проанализировано влияние неточности задания взаимодействия включений на уравнение Рэлея — Ламба.

Рассмотрим односкоростную монодисперсную смесь маловязкой несжимаемой жидкости с хаотически распределенными в ней сферическими пузырями радиуса R в предположении, что характерный масштаб изменения средних параметров смеси (R , α_2 и т. д.) много больше R .

Потенциал течения φ жидкости при произвольном расположении центров N пузырей, находящихся в объеме V_0 , ограниченном поверхностью Γ_0 , определяется как решение следующего уравнения с граничными условиями:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_i} = v_i \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

где Γ_i ($i = 1, \dots, N$) — поверхность i -го пузыря; n — нормаль к поверхности; v_i ($i = 1, \dots, N$) — нормальная составляющая скорости жидкости на границе i -го пузыря; v_0 — нормальная составляющая скорости жидкости, вызванной колебаниями пузырей, на границе рассматриваемой области.

Будем находить φ методом последовательных приближений $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n$ путем зеркальных отображений [7]. Определим сначала φ^0 — нулевое приближение φ

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^N \varphi_i^0,$$

где φ_i^0 определяются как решения следующих уравнений с граничными условиями:

$$\Delta\varphi_i^0 = 0, \quad \frac{\partial\varphi_i^0}{\partial n}\Big|_{\Gamma_i} = v_i, \quad \varphi_i^0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой определяется значение потенциала; $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор центра i -го пузыря.

Определим φ^1 — первое приближение φ

$$\varphi^1 = \varphi^0 + \sum_{i=0}^N \varphi_i^1,$$

где φ_i^1 определяются как решения следующих уравнений с граничными условиями:

$$\Delta\varphi_i^1 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}(\varphi^0 + \varphi_i^1)\Big|_{\Gamma_i} = v_i \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

для $i \neq 0$, $\varphi_i^1 \rightarrow 0$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \rightarrow \infty$.

Следующие приближения φ делаются аналогично. Можно показать, что члены φ_i^n убывают как $\varphi_i^n \sim \varphi_i^{n-1} \left(\frac{R}{r_i}\right)^k$, где $k \geq 1$; R — радиус пузыря; r_i — расстояние между пузырями. А значит, метод последовательных приближений определяет потенциал φ в виде ряда по параметру R/r_i . Заметим, что построенный таким способом ряд для потенциала вокруг двух пузырей сходится очень быстро к точному потенциалу [7—10] при любых (включая случай соприкосновения) расстояниях между пузырями.

Из построения следует, что потенциал φ представляется в виде суммы членов φ_i , каждый из которых при $i = 1, \dots, N$ не имеет особенностей вне i -й границы, φ_0 не имеет особенностей во всей рассматриваемой области.

Изложенный метод на каждом приближении (начиная с первого) учитывает условия на границе смеси. Это затрудняет анализ потенциала.

Поэтому удобно вместо φ_0^1 использовать $(\varphi_0^1)' = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0^n$, теперь границу нужно учитывать только в первом приближении, т. е. $(\varphi_0^n)' = 0$ при $n > 1$. Везде ниже будет использоваться описанный выше измененный алгоритм, а штрихи в соответствующих потенциалах опускаться. Далее будут рассматриваться пузыри, находящиеся далеко от границы, поэтому для них можно пренебречь влиянием конкретного расположения пузырей на (φ_0^1) . Тогда из построения следует, что φ представляется в виде ряда, члены которого либо не зависят от расположения ни одного из пузырей (φ_0^1) , либо зависят от расположения только одного — φ_i^0 , либо от двух пузырей (такие члены содержатся в φ_i^n при $n \geq 1$) и т. д. Просуммируем слабые φ , зависящие от расположения именно l пузырей ($l = 0, 1, \dots, \dots, N$), тогда

$$(4) \quad \varphi(\mathbf{r} | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{l=0}^N \chi_l^0(\mathbf{r}), \quad \chi_0^0 = \chi_0(\mathbf{r}),$$

$$\chi_l^0 = \sum_{\omega_{\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}}^N} \chi_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}),$$

где χ_l^0 зависит от расположения только l пузырей; $\omega_{\mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l}}^N$ — сочетания l из N пузырей (выбраны пузыри $i_1, \dots, i_l$); $\chi_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_l})$, зависит только от расположения пузырей $i_1, \dots, i_l$.

Отметим, что χ_l^0 строилось так, чтобы оно учитывало специфику взаимодействия именно l пузырей, в дальнейшем χ_l^0 будем называть l -частичным взаимодействием.

Динамика пузырей (например, уравнение Рэлея — Ламба) определяется разностью $\langle \varphi_d \rangle = \langle \varphi_b \rangle - \langle \varphi_m \rangle$, где $\langle \varphi_b \rangle$ — средний потенциал жидкости около поверхности пузыря; $\langle \varphi_m \rangle$ — среднее значение потенциала жидкости в точке, соответствующей центру пузыря, когда его там нет

$$(2) \quad \langle \varphi_b \rangle = \frac{1}{V_0} \int \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \varphi(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) f_{N+1}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N,$$

$$\langle \varphi_m \rangle = \int \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \varphi(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) f_N^m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \mathbf{r}_0) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N,$$

где $f_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ — k -частичная функция распределения; f_N^m — N -частичная функция распределения при условии, что точка $\mathbf{r}_0$ не принадлежит

ни одному из пузырей. Выберем систему координат с началом в центре пробного пузыря. Функция $\langle \varphi_d \rangle$, вообще говоря, принимает различные значения в разных точках поверхности пузыря. Это приводит к различию давления на поверхности пузыря, которое для медленных процессов (таких, чтобы давление в пузыре было постоянно) будет уравниваться малыми деформациями пузыря. Поэтому в рамках модели о сферичности пузырей для вывода обобщенного уравнения Рэлея — Ламба необходимо использовать величину $\langle \langle \varphi_d \rangle \rangle$, усредненную по ансамблю и по поверхности пузыря. Для $\langle \langle \varphi_d \rangle \rangle$ с учетом (1), (2) можно получить

$$(3) \quad \langle \langle \varphi_d \rangle \rangle = -\frac{R^2 \dot{R}}{|\mathbf{r}|} + \sum_{l=1}^N \langle \chi_l^b \rangle + \sum_{l=1}^N \langle \chi_l^f \rangle,$$

где R и $\dot{R}$ — радиус пузырей в смеси и его производная по времени. Первое и второе слагаемые формулы (3) отвечают перестройке течения, вызванной наличием пробного пузыря в начале координат, причем второе слагаемое соответствует регулярной в окрестности пробного пузыря части этого течения, а третье слагаемое появляется из-за различия функций распределения $f_N^m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N|0)$ и $f_{N+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$

$$(4) \quad \begin{aligned} \langle \chi_l^b \rangle &= (\alpha_2)^l \left(\frac{3}{4\pi R^3} \right)^l \frac{1}{V_0} \int \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l} \chi_{l+1}^b(0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) \times \\ &\quad \times f_{l+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_l, \\ \langle \chi_l^f \rangle &= (\alpha_2)^l \left(\frac{3}{4\pi R^3} \right)^l \int \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l} \chi_l(0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) [f_l^m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l|0) - \\ &\quad - f_{l+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)] d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_l, \end{aligned}$$

где $\chi_{l+1}^b(0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l)$ — слагаемые в потенциал (за счет $l+1$ частичного взаимодействия (1) пробного и l — других пузырей), имеющие особенности в любом, кроме пробного, пузыря.

Из (4) видно, что для определения $\langle \langle \varphi_d \rangle \rangle$ с точностью до $(\alpha_2)^1$ достаточно знать двухчастичную (бинарную) функцию распределения и двухчастичное взаимодействие для определения $\langle \langle \varphi_d \rangle \rangle$, с точностью до $(\alpha_2)^2$ нужно знать трехчастичную функцию распределения и трехчастичное взаимодействие и т. д.

Представление (4) имеет смысл, если существует конечный предел интегралов $\langle \chi_l^b \rangle$ и $\langle \chi_l^f \rangle$ при $\alpha_2 \rightarrow 0$ и $V_0 \rightarrow \infty$. Отметим, что при регулярной структуре дисперсной среды функции распределения f^m и f имеют резкие всплески и эти интегралы стремятся к бесконечности при $\alpha_2 \rightarrow 0$. Отсюда следует, что разложение (4) величины $\langle \langle \varphi_d \rangle \rangle$ по $(\alpha_2)^l$ не справедливо для дисперсных сред с регулярной структурой (можно показать, что первые члены корректного разложения $\langle \chi_{-1}^b \rangle$ и $\langle \chi_1^f \rangle$ в этом случае пропорциональны $\alpha_2^{1/3}$).

Покажем, что для сред с хаотической структурой разложение (4) справедливо. Для исследования сходимости коэффициентов при $(\alpha_2)^1$ важно поведение подынтегральных функций при $|\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$, поэтому в (4) можно ограничиться главными членами разложения χ_{l+1}^b по $R/|\mathbf{r}_1|$

$$\chi_1 = -\frac{R^2(\mathbf{r}_1)\dot{R}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1|}, \quad \chi_{l+1}^b \sim R\dot{R}\left(\frac{R}{|\mathbf{r}_1|}\right)^4.$$

Из (4) видно, что для сходимости интегралов $\langle \chi_i^b \rangle$ и $\langle \chi_i^f \rangle$ достаточно, чтобы бинарная коррелятивная функция $f_2(0, \mathbf{r}_1)$ была ограничена $f_2(0, \mathbf{r}_1) < k_1$ и отличалась от одночастичной функции распределения $f_1^m(\mathbf{r}_1|0)$ не более чем на $k_2/|\mathbf{r}_1|^3$, где k_1 и k_2 — константы. Отметим, что бинарная коррелятивная функция, соответствующая модели твердых шаров [11], имеет экспоненциальную сходимость к одночастичной функции, бинарная коррелятивная функция, полученная из взаимодействия включений с несущей средой в стоковом приближении [3], также обеспечивает сходимость коэффициентов при α_2 в (4).

Пусть l -частичная функция распределения $f_l(r_1, \dots, r_l)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f_{l+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) < k_3, \quad |f_{l+1}(0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l) - f_l^m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l|0)| < \frac{k_4}{[\min(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_l)]^3},$$

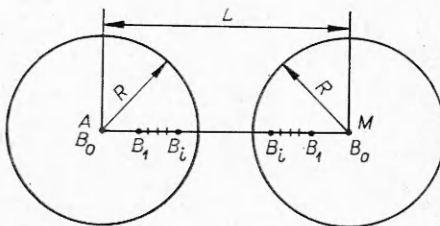
где k_3 и k_4 — константы. При исследовании сходимости интегралов при $(\alpha_2)^2$ в (4) аналогично рассмотренным выше интегралам можно ограничиться главными по $R/|\mathbf{r}_1|$ членами разложения величин χ_2 и χ_{2+1}^b , которые имеют вид

$$(5) \quad \chi_2 \sim R\dot{R} \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right)^2 \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_1|} \right)^2 \cos \theta, \quad \chi_{2+1}^b \sim R\dot{R} \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_1|} \right)^2 \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right)^3 \left(\frac{R}{|\mathbf{r}_2|} \right)^2,$$

где θ — угол между вектором $\mathbf{r}_1$ и вектором $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Используя (5) для точки, не лежащей у границы области V_0 , можно доказать сходимость коэффициентов при α_2^2 . Отметим, что оценки по модулю величины χ_2 (как, например, оценено χ_{2+1}^b) недостаточно для сходимости интеграла $\langle \chi_2^f \rangle$. Аналогично можно показать сходимость коэффициентов при $(\alpha_2)^l$. Проведенные рассуждения доказывают, что в разложении (4) правильно показано убывание слагаемых при $\alpha_2 \rightarrow 0$.

Выведем обобщенное уравнение Рэлея — Ламба с точностью до α_2 . Отметим, что при этом можно пренебречь потенциалом ϕ_0^1 , входящим в $\chi_{l+1}^b(0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l)$, $\chi_l(0|\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_l)$, который пропорционален α_2 и, следовательно, как видно из (4), дает, по крайней мере, квадратичный по α_2 вклад в уравнение Рэлея — Ламба.

Проведенный выше анализ показал, что для определения $\langle \langle \phi_d \rangle \rangle$ с точностью до $(\alpha_2)^1$ достаточно знать лишь двухчастичное взаимодействие. Поэтому найдем потенциал течения жидкости ϕ_2 для двух растущих пузырей радиуса R , центры которых находятся на расстоянии L . Методом последовательных приближений, путем зеркальных отображений [7, 8] можно получить, что ϕ_2 представляется в виде суммы потенциалов от точечных источников и распределенных стоков, расположенных на прямой, соединяющей центры пузырей. Точечные источники находятся в точках B_i (см. фигуру) на расстояниях L_i от центров пузырей. Величины L_i и мощности источников C_i определяются следующими рекуррентными соотношениями: $L_i = R^2/(L - L_{i-1})$, $L_0 = 0$; $C_i = C_{i-1}L_i/R$, $C_0 = R^2\dot{R}$. Стоки равномерно распределены на отрезках B_iB_{i+1} с мощностью, приходящейся на единицу длины, $d_i = C_{i+1}/(L_{i+1} - L_i)$. Описанный потен-



пиал является точным решением поставленной задачи. Он позволяет определить двухчастичное взаимодействие пробного пузыря A с пузырем M (см. фигуру), расположенным на расстоянии L . Как видно из (3), взаимодействие χ_{i+1}^v совпадает с потенциалом, вызванным всей системой точечных источников и распределенных стоков, расположенных в пузыре M , кроме источника в центре пузыря M , соответствующего одночастичному взаимодействию.

При вычислении $\langle\langle\varphi_d\rangle\rangle$ с точностью до α_2 можно пренебречь линейными по α_2 поправками к бинарной коррелятивной функции и использовать следующее простое выражение [11], полученное в случае невзаимодействующих шаров:

$$(6) \quad f_2(\mathbf{r}_1) = \begin{cases} 0, & R < |\mathbf{r}_1| < 2R, \\ 1, & 2R < |\mathbf{r}_1|. \end{cases}$$

Отметим, что, когда влияние взаимодействия пузырей на бинарную коррелятивную функцию пропорционально α_2 , при выводе уравнения Рэлея — Ламба также можно использовать формулу (6).

Интегралы $\langle\chi_i^v\rangle$, $\langle\chi_i^t\rangle$ с точностью до α_2 можно вычислить численно. Окончательная формула для $\langle\langle\varphi_d\rangle\rangle$ между средним потенциалом на поверхности пузыря и средним потенциалом в жидкости имеет вид

$$(7) \quad \langle\langle\varphi_d\rangle\rangle \approx -R^2\dot{R}/|\mathbf{r}| + 3,6\alpha_2 R\dot{R}.$$

Подставим значение $\langle\langle\varphi_d\rangle\rangle$ в интеграл Коши — Лагранжа

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle\varphi_d\rangle\rangle \Big|_{|\mathbf{r}|=R} + \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{\langle v_\tau^2 \rangle}{2} + \frac{p_2 - 2\sigma/R}{\rho} = \frac{\langle v^2 \rangle}{2} + \frac{p_1}{\rho},$$

где $\langle v_\tau^2 \rangle$ — средний квадрат тангенциальной составляющей скорости жидкости на поверхности пузыря; $\langle v^2 \rangle$ — средний квадрат скорости жидкости в точке, соответствующей центру пробного пузыря; p_2 и p_1 — давление в пузыре и жидкости; σ, ρ — соответственно коэффициент поверхностного натяжения и плотность жидкости. При выводе (8) было использовано, что нормальная составляющая скорости жидкости на поверхности пузыря в силу предположения о его сферичности равна $\dot{R}$.

Из (1) можно получить следующие выражения для величин $\langle v^2 \rangle$ и $\langle v_\tau^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int \int_{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \nabla \chi_l \right]^2 f_N^m(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | 0) d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N; \\ \langle v_\tau^2 \rangle &= \frac{4}{V} \int \int \int \int_0 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \nabla \chi_{l+1}^v \right)^2 f_{N+1}(0 | \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) dS d^3 \mathbf{r}_1 \dots d^3 \mathbf{r}_N, \end{aligned}$$

где S — поверхность пробного пузыря.

Проводя оценки, аналогичные сделанным при выводе формулы (4), можно показать, что величины $\langle v^2 \rangle$ и $\langle v_\tau^2 \rangle$ можно разложить в ряд по α_2 . При этом с точностью до $(\alpha_2)^1$ величины $\langle v^2 \rangle$ и $\langle v_\tau^2 \rangle$ определяются лишь одночастичным и двухчастичным взаимодействием соответственно. Тогда

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3}{R^3} \int_{L=R}^{\infty} \left(\frac{R^2 \dot{R}}{L^2} \right)^2 L^2 dL, \quad \langle v_\tau^2 \rangle = \frac{3}{R^3} \int_{L=2R}^{\infty} \int_S v_\tau^2 dS dL,$$

где v_τ — тангенциальная составляющая скорости жидкости на поверх-

ности пузыря, определяемая потенциалом течения φ_2 , когда расстояние между пузырями L .

Величина $\langle v^2 \rangle$ определяется аналитически, $\langle v_t^2 \rangle$ вычисляется численно:

$$(9) \quad \langle v^2 \rangle \approx 3\alpha_2 \dot{R}^2, \quad \langle v_t^2 \rangle \approx 3,25\alpha_2 \dot{R}^2.$$

Подставив (7), (9) в (8), получим обобщенное уравнение Рэлея — Ламба

$$(10) \quad R\ddot{R}(1 - 3,6\alpha_2) + \frac{3}{2}(\dot{R})^2(1 - 9,7\alpha_2) = \frac{p_2 - 2\sigma/R - p_1}{\rho}.$$

Проведенный анализ и выведенное точно уравнение Рэлея — Ламба (10) позволяют проанализировать погрешность, которую вносят упрощения, часто используемые в теории дисперсных сред с хаотическим расположением включений.

Из (4) видно, что квадратичные по α_2 поправки в обобщенном уравнении Рэлея — Ламба зависят, вообще говоря, от трехчастичного взаимодействия включений, трехчастичной функции распределения и условия на границе области (φ_0^1).

Проанализируем погрешность, вносимую неточностью задания двухчастичного взаимодействия между включениями. Если использовать (аналогично [3]) только главный по R/r_1 член при вычислении взаимодействия между пузырями, то обобщенное уравнение Рэлея — Ламба примет вид

$$(11) \quad R\ddot{R}(1 - 4,5\alpha_2) + \frac{3}{2}(\dot{R})^2(1 - 12\alpha_2) = \frac{p_2 - 2\sigma/R - p_1}{\rho}.$$

Тот же вид имеет обобщенное уравнение Рэлея — Ламба при использовании идеи самосогласования, принятой в [4]. При сравнении (10) с (11) видно, что ошибка в определении коэффициентов составляет приблизительно 20%. Однако, учитывая существенные упрощения, получающиеся при использовании этих предположений (уравнение (11) выводится аналитически), их можно рекомендовать для приближенного учета влияния объемной концентрации на межфазное взаимодействие.

Отметим, что идея самосогласования и некоторые другие предположения позволяют получить квадратичную по α_2 поправку к уравнению Рэлея — Ламба. Как было показано выше, эта поправка не может быть определена точно и вызывает сомнения в связи с неточностью линейного члена. Однако, учитывая большую физическую наглядность метода самосогласования и полученное в некоторых работах улучшение согласования с экспериментом [4], при учете этих поправок можно надеяться, что эти методы позволяют приближенно вычислить коэффициенты при $(\alpha_2)^2$, как это было с линейными по α_2 поправками.

Поступила 22 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М., Наука, 1978.
2. Халпелл Д., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир, 1976.
3. Batchelor G. K., Green J. T. The determination of bulk stress in suspension of spherical particles to order c^2 . — J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt. 3.
4. Головин А. М., Чижов В. Е. К расчету скорости осаждения однородной суспензии. — ИММ, 1978, № 1.

5. Бувич Ю. А., Марков В. Г. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензий измеренной концентрации. — ПММ, 1973, № 6.
6. Бувич Ю. А., Корнеева Ю. А. О переносе тепла и массы в дисперсной среде. — ПМТФ, 1974, № 4.
7. Ламб Г. Гидродинамика. М., 1947.
8. Милн-Томсон. Теоретическая гидродинамика. М., 1964.
9. Воинов О. В. Движение двух сфер переменных радиусов в идеальной жидкости. — В сб.: Научная конференция. М., изд. Ин-та механ. МГУ, 1970.
10. Гарипов Р. М. Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. — ПМТФ, 1973, № 6.
11. Головин А. М., Чижев В. Е. К расчету бинарной коррелятивной функции в двухфазной системе. — ПММ, 1977, № 6.

УДК 532.526

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ СТРУЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Бобнев, С. М. Хайтман
(Новосибирск)

В [1] было получено автомодельное решение для температуры в плоской полуограниченной струе. Для нахождения температурной константы автомодельности $\alpha_T = 1/2$ использовалось интегральное условие сохранения

$$\int_0^{\infty} uT \left(\int_0^y u dy \right) dy = \text{const},$$

которое вообще не выполняется (этот интеграл не зависит от продольной координаты только в предположении о подобии профилей скорости и температуры при числе Прандтля, равном единице). В данной работе построены автомодельные решения при разных числах Прандтля, установлена зависимость константы автомодельности от числа Прандтля.

Задачу о плоской ламинарной полуограниченной струе, движущейся вдоль твердой стенки, в приближении пограничного слоя можно записать в безразмерном виде

$$(1) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$(2) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

$$(3) \quad u = v = 0 \text{ при } y = 0, \quad u = 0 \text{ при } y \rightarrow \infty;$$

$$(4) \quad T = 0 \text{ при } y = 0, \quad T = 0 \text{ при } y \rightarrow \infty,$$

где $x, yR^{-3/4}$ — декартовы прямоугольные координаты (x, y — внутренние координаты в соответствующем пределе пограничного слоя асимптотическом разложении по малому параметру R^{-1}); $R = (L_m I_m / \rho_m)^{1/3} / \mu_m$ — некоторый аналог числа Рейнольдса; $uR^{1/2}, vR^{-1/4}$ — продольная и поперечная составляющие скорости; T — разность температур в данной точке и на бесконечности; $\text{Pr} = c_{pm} \mu_m / \lambda_m$ — число Прандтля. При безразмеривании считались заданными масштабы удельной теплоемкости при постоянном давлении c_{pm} , динамической вязкости μ_m , теплопровод-