ПМТФ, № 5, 1966

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ В ПЛОСКОСТНЫХ ДИОДАХ

Г. В. Гордеев

(Ленинград)

Рассмотрены продольные высокочастотные колебания плазмы в плоскостных диодах методом кинетического уравнения с учетом асимметрии граничных условий на границах плазмы с приэлектродными барьерами. Показано, что при условии, когда время прохождения волной расстояния между электродами в два раза меньше времени затухания волны в неограниченной плазме, возможно возникновение незатухающей волны за счет наложения волн, отраженных от электродов, на волну возмущения.

Во многих газоразрядных и полупроводниковых диодах имеются участки квазинейтральной плазмы, ограниченные потенциальными барьерами, создающими благоприятные условия для образования стоячих волн в плазме. Исследованию этих волн в электронной плазме, находящейся между плоскими электродами, посвящены работы [1,5]. Во всех этих работах, однако, условия на обоих границах плазмы принимались одинаковыми. На самом деле, в плазме тлеющего или дугового разряда, а также в полупроводниковых диодах, когда через диод проходит ток, условия на границах плазмы с областями объемного заряда являются не одинаковыми. Например, в $p — i — n$-диоде при прямом токе дырки и электроны, падающие из i-области на границу i-области с n и p-областями ведут себя по-разному. Дырки отражаются от границы i-области с p-областью и легко проходят в n-область, где они рекомбинируют; электроны же легко проходят в p-область, где рекомбинируют и отражаются от границы i-области с n-областью. Подобная асимметрия граничных условий имеет место на границах положительного столба с приэлектродными барьерами в тлеющем и дуговом разрядах, а также в плазме цезиевого диода. В этой статье рассматриваются продольные высокочастотные колебания плазмы в плоскостных диодах методом кинетического уравнения с учетом асимметрии граничных условий.

Рассмотрим плазму, находящуюся между плоскими электродами. Расстояние между границами плазмы с приэлектродными областями объемного заряда обозначим $2l$ и выберем начало отсчета в центре плазмы, направив ось x от анода (коллектора) к катоду (эмиттеру). Одномерная задача о продольных колебаниях плазмы в линейном приближении сводится к интегрированию системы уравнений

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + u\frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} = -\frac{f_\alpha}{\tau_\alpha} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi e}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f_2 - f_1)\,du \qquad (2)$$

Здесь $f_{\alpha 0}$ — невозмущенная функция распределения электронов ($\alpha = 1$) и ионов или дырок ($\alpha = 2$), f_α — малые возмущения ($f_\alpha \ll f_{\alpha 0}$), e_α, m_α — заряд и эффективная масса носителей тока, τ_α — время релаксации их импульса, E — возмущение электрического поля. Последнее нельзя считать малым по сравнению с невозмущенным внешним полем E_0, поэтому в уравнениях (1) пренебрежено членом $\sim E_0 \partial f_\alpha / \partial u$, так как он одинакового порядка с членом $\sim E\, \partial f_\alpha / \partial u \ll E df_{\alpha 0} / \partial u$. Здесь не учитывается влияние ионизации и рекомбинации частиц на высокочастотные колебания плазмы, так как внешнее поле E_0 в плазме слишком слабое для ударной ионизации, а время жизни носителей тока на несколько порядков больше периода высокочастотных колебаний. Плазма тлеющего и дугового разряда и плазма в i-области p — i — n-диода при прямом токе сильно ионизована [6, 7]. Это значит, что концентрация электронов в такой плазме настолько велика, что межэлектронные столкновения в обмене энергией между частицами становятся существенными и устанавливается электронная температура. Скорость же дрейфа электронов в поле становится значительно меньше их тепловой скорости. В такой плазме невозмущенная функция распределения носителей тока может быть записана в виде функции Максвелла, смещенной в пространстве скоростей на скорость дрейфа w_α

$$f_{\alpha 0} = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi \varkappa T_\alpha}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha (u - w_\alpha)^2}{2\varkappa T_\alpha}\right) \tag{3}$$

В бесстолкновительной плазме, например в пролетном режиме цезиевого диода, невозмущенную функцию распределения также можно принять в виде (3), причем в этом случае

$$w_\alpha = \left(\frac{\varkappa T_\alpha}{2\pi m_\alpha}\right)^{1/2}$$

Уравнения (1), (2) будем интегрировать при следующих начальных и граничных условиях:

$$f_2 |_{t=0} = q_2 (u^2,\ x) \tag{4}$$

$$f_1 (-u) = f_1 (u), \qquad f_2 (u)|_{u<0} = 0 \quad \text{при } x = l \tag{5}$$

$$f_1 (u)|_{u>0} = 0, \qquad f_2 (-u) = f_2(u) \quad \text{при } x = -l \tag{6}$$

Условие (4) означает, что возмущение выбирается зависящим от величины скорости, но не от ее направления. Условие (5) означает, что электроны, захваченные волной возмущения и падающие из плазмы на ее катодную границу, отражаются от этой границы, а ионы (дырки) проходят эту границу и рекомбинируют на катоде, не возвращаясь обратно в плазму. Условие (6) означает, что ионы (дырки), захваченные волной возмущения и падающие на анодную границу плазмы, отражаются от этой границы, а электроны проходят эту границу и исчезают на аноде. Отражение электронов и ионов (дырок) предполагается мгновенным и происходящим от плоскости, а не от слоя. Такое предположение является оправданным, если время отражения значительно меньше периода колебаний плазмы, а ширина отражающего слоя значительно меньше длины волны. Оно тем лучше выполняется, чем выше потенциальный барьер и чем уже область объемного заряда. Учет конечности слоя приводит к добавочному затуханию порядка затухания из-за столкновений частиц с нейтральными атомами или меньше его.

Не будем как-либо ограничивать возмущенное поле. Будем предполагать только, что поле $E\ (x,\ t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$E\,(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\,(k, t)\, e^{ikx}, \qquad E\,(k, t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} E\,(x, t)\, e^{-ikx}\, dx \tag{7}$$

$(lk = n\pi,\ n$—целое число$)$

При начальных и граничных условиях (4)—(7) система уравнений (1), (2) разрешима.

Интегрирование уравнений (1), (2) будем проводить при помощи преобразований Лапласа по времени и преобразований Фурье по координатам.

Пользуясь преобразованием Лапласа, получим вместо (1), (2)

$$qf_{q\alpha} + u\frac{\partial f_{q\alpha}}{\partial x} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}E_q\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} + \frac{f_{q\alpha}}{\tau_\alpha} = g_\alpha \tag{8}$$

$$\frac{\partial E_q}{\partial x} = \frac{4\pi e}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f_{q2} - f_{q1})\,du \tag{9}$$

$$\left(f_{q\alpha} = \int\limits_0^\infty e^{-qt}f_\alpha\,dt, \quad E_q = \int\limits_0^\infty e^{-qt}E\,dt, \quad \operatorname{Re} q > 0\right)$$

Интегрируя уравнение (8) по координате при граничных условиях (5), (6), получим

$$f_{q1} = -\exp\frac{-q_1(x-l)}{u}\int\limits_{-l}^{x}\left[\frac{e_1E_q}{m_1}\frac{\partial f_{10}(u-w_1)}{u\,\partial u} - g_1\right]\exp\frac{q_1(y-l)}{u}\,dy \quad (u>0)$$

$$f_{q1} = \exp\frac{-q_1(x-l)}{u}\left\{\int\limits_{x}^{l}\left[\frac{e_1E_q}{m_1}\frac{\partial f_{10}(u-w_1)}{u\,\partial u} - g_1\right]\exp\frac{q_1(y-l)}{u}\,dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-l}^{l}\left[\frac{e_1E_q}{m_1}\frac{\partial f_{10}(u+w_1)}{u\,\partial u} - g_1\right]\exp\frac{-q_1(y-l)}{u}\,dy\right\} \quad (u<0) \tag{10}$$

$$f_{q2} = \exp\frac{-q_2(x+l)}{u}\int\limits_{x}^{l}\left[\frac{e_2E_q}{m_2}\frac{\partial f_{20}(u-w_2)}{u\,\partial u} - g_2\right]\exp\frac{q_2(y+l)}{u}\,dy \quad (u<0)$$

$$f_{q2} = -\exp\frac{-q_2(x+l)}{u}\left\{\int\limits_{-l}^{x}\left[\frac{e_2E_q}{m_2}\frac{\partial f_{20}(u-w_2)}{u\,\partial u} - g_2\right]\exp\frac{q_2(y+l)}{u}\,dy - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-l}^{l}\left[\frac{e_2E_q}{m_2}\frac{\partial f_{20}(u+w_2)}{u\,\partial u} - g_2\right]\exp\frac{-q_2(y+l)}{u}\,dy\right\} \quad (u>0) \tag{11}$$

$$(q_\alpha = q + 1/\tau_\alpha)$$

При помощи (10), (11) уравнение (9) запишется так:

$$\frac{\partial E_q(x)}{\partial x} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon}\left\{\int\limits_x^l [K_1^+(y-x) + K_2^+(y-x)]\,E_q(y)\,dy - \right.$$

$$-\int\limits_{-l}^{x}[K_1^-(x-y) + K_2^-(x-y)]\,E_q(y)\,dy +$$

$$+\int\limits_{-l}^{l}[K_2^+(2l+x+y) - K_1^-(2l-x-y)]\,E_q(y)\,dy + \Phi(g_1, g_2) \tag{12}$$

$$K_\alpha^\pm(\zeta) = \frac{1}{m_\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{1}{u}\exp\frac{-q_\alpha\zeta}{u}\frac{\partial f_{\alpha 0}(u \pm w_\alpha)}{\partial u}\,du$$

Здесь $\Phi(g_1, g_2)$ — функция начальных возмущений. Продолжим формально $K_\alpha^\pm(\zeta)$ в область $\zeta < 0$ при помощи определения

$$K_\alpha^\pm(-\zeta) = -K_\alpha^\mp(\zeta) \tag{13}$$

Пользуясь (13), запишем уравнение (12) в более компактном виде

$$\frac{\partial E_q(x)}{\partial x} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \int\limits_{-l}^{l} \{K_2^+(2l + x + y) - K_1^-(2l - x - y) -$$
$$- K_2^-(x - y) - K_1^-(x - y)\} E_q(y)\,dy + \Phi(g_1, g_2) \qquad (14)$$

и будем решать его методом Фурье. Тогда уравнение (14) запишется системой алгебраических уравнений (15)

$$E_q(k)\,[1 + A_1(k) + A_2(k)] + \sum_{k_1} E_q(k_1)\,[B_1(-k, -k_1) + B_2(k, k_1)] = \Phi_k$$

где

$$E_q(k) = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} E_q(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

а k_1 подчиняется тому же условию (7), что и k,

$$A_\alpha(k) = \frac{4\pi e^2}{ikm_\alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{\alpha 0}(u - w_\alpha)}{\partial u} \frac{1}{q_\alpha + iku}\, du \qquad (16)$$

$$B_\alpha(k, k_1) = \frac{4\pi e^2}{iklm_\alpha} \int\limits_0^{\infty} \left\{ \frac{\mathrm{sh}\,[(q_\alpha - ik_1 u)\,l/u]}{q_\alpha - ik_1 u} \frac{\partial f_\alpha(u + (-1)^\alpha w_\alpha)}{\partial u} \times \right.$$
$$\times \left[\frac{\exp(iku - q_\alpha)\,l/u}{q_\alpha - iku} - 2\,\frac{\exp(-2q_\alpha l/u)\,\mathrm{sh}\,[(q_\alpha + iku)\,l/u]}{q_\alpha + iku} \right] -$$
$$\left. - \frac{\mathrm{sh}\,[(q_\alpha + ik_1 u)\,l/u]\exp[-(iku + q_\alpha)\,l/u]}{(q_\alpha + ik_1 u)(q_\alpha + iku)} \frac{\partial f_{\alpha 0}(u - (-1)^\alpha w_\alpha)}{\partial u} \right\} u\, du \qquad (17)$$
$$(\mathrm{Re}\, q_\alpha > 0)$$

Зависимость поля от времени можно искать для каждой компоненты Фурье, воспользовавшись инверсионной формулой

$$E(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} e^{qt} E_q(k)\, dq \qquad (\sigma > 0)$$

где $E_q(k)$ — решение уравнения (15), определенное в правой полуплоскости q. Аналитически продолжая $E_q(k)$ в левую полуплоскость q, можно убедиться, что единственными особенностями $E_q(k)$ будут полюса, представляющие собой корни уравнения

$$\mathrm{Det}\,|[1 + A_1(k) + A_2(k)]\delta_{kk_1} + B_1(-k, -k_1) + B_2(k, k_1)| = 0 \qquad (18)$$

При больших t решение $E(k, t)$ будет пропорционально e^{qt}, где $q = -i\omega - \gamma$ — корень уравнения (16), имеющий наибольшую вещественную часть. Здесь ω — частота колебаний, γ — коэффициент затухания. Уравнение (16) является дисперсионным уравнением колебаний ограниченной плазмы во внешнем электрическом поле; оно справедливо как для высокочастотных, так и для низкочастотных колебаний плазмы. При $l \to \infty$ члены B_α, входящие в уравнение (18), обращаются в нуль, и последнее принимает вид

$$1 + A_1(k) + A_2(k) = 0 \qquad (19)$$

Уравнение (19) совпадает с уравнением (10) работы [8], выведенным для колебаний неограниченной плазмы, находящейся во внешнем электрическом поле.

Рассмотрим высокочастотные колебания плазмы, частота которых порядка лэнгмюровской частоты электронных колебаний

$$\omega \approx \omega_1 = \left(\frac{4\pi e^2 n_1}{\varepsilon m_1}\right)^{1/2}$$

Будем считать, что фазовая скорость волн ω / k значительно больше тепловой скорости частиц $s_\alpha = \sqrt{\varkappa T_\alpha / m_\alpha}$. Задачу о высокочастотных колебаниях плазмы с граничными условиями при фазовой скорости волн, сравнимой или меньше тепловой скорости электронов, не имеет смысла рассматривать, так как в этом случае затухание Ландау сравнимо или больше частоты колебаний, и граничные условия никак не сказываются на них.

Введем безразмерную переменную и параметры

$$U = \frac{u}{s_\alpha}, \qquad v_\alpha = \frac{w_\alpha}{s_\alpha}, \qquad \beta_\alpha = \frac{iq_\alpha}{|k| s_\alpha}$$

В этих переменных для рассматриваемых волн величину $A_\alpha(k)$ можно представить в виде асимптотического ряда [8]

$$A_\alpha(k) = -\frac{1}{k^2 a_\alpha^2}\left(\frac{1}{\gamma_\alpha^2} + \frac{3}{\gamma_\alpha^4} + \ldots\right) + i\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\gamma_\alpha}{k^2 a_\alpha^2} \exp\frac{-\gamma_\alpha^2}{2} \tag{20}$$

$$\left(a_\alpha = \left(\frac{\varepsilon x T_\alpha}{4\pi e^2 n_\alpha}\right)^{1/2}, \qquad \gamma_\alpha = \frac{|k|}{k}\beta_\alpha - v_\alpha\right)$$

где a_α — дебаевский радиус частицы α. В интеграле B_α ограничимся линейными членами разложения подынтегрального выражения в ряд по степеням $v_\alpha \ll 1$ и представим его в виде суммы трех интегралов

$$B_\alpha(k, k_1) = (-1)^{n-m} \frac{i}{k^2 a_\alpha^2 kl}(I_0 + I_1 + I_2) \tag{21}$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[C_\alpha(u) - \frac{1}{2} D_\alpha(u)\right] e^{-1/2 u^2} du$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty [-C_\alpha(u) + D_\alpha(u)]\, e^{\varphi_1(u)} du$$

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{\varphi_\alpha(u)}}{(\beta_\alpha + uk_1/|k|)(\beta_\alpha - uk/|k|)} du$$

$$C_\alpha = \frac{(-1)^\alpha (\beta_\alpha^2 + u^2 k_1/|k|)\, u (1 - u^2) v_\alpha - u^3 \beta_\alpha (k + k_1)/|k|}{(\beta_\alpha^2 - u^2 k_1^2/|k^2|)(\beta_\alpha^2 - u^2)}$$

$$D_\alpha = \frac{u^2 + (-1)^\alpha v_\alpha (1 - u^2) u}{(\beta_\alpha + uk_1/|k|)(\beta_\alpha - uk/|k|)}$$

$$\varphi_1(u) = \frac{2i|k| l\beta_\alpha}{u} - \frac{u^2}{2}, \qquad \varphi_2(u) = \frac{4i|k| l\beta_\alpha}{u} - \frac{u^2}{2}$$

$$n = kl/\pi, \qquad m = k_1 l/\pi, \qquad \operatorname{Re}\beta_\alpha > 0, \quad \operatorname{Im}\beta_\alpha > 0, \qquad \operatorname{Re}\beta_\alpha \gg \operatorname{Im}\beta_\alpha$$

Интеграл I_0 легко вычисляется. Асимптотически при $\beta_\alpha \gg 1$ он равен

$$I_0 = \frac{1}{\beta_\alpha^2}\left[\frac{1}{4} + (-1)^\alpha \frac{v_\alpha}{2\sqrt{2\pi}}\right] \tag{22}$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся методом стационарной фазы. Для этого заменим $\varphi_1(u)$ первыми членами разложения в ряд по степеням $(u - u_1)$

$$\varphi_1(u) = \varphi_1(u_1) + {}^1/_2\,\varphi_1''(u_1)(u - u_1)^2$$

где u_1 — корень уравнения $\varphi'(u_1) = 0$, равный

$$u_1 = e^{-{}^1/_6 i\pi}\sqrt[3]{2\,|k|\,l\,|\beta_\alpha|} \tag{23}$$

причем

$$\varphi_1(u_1) = -\,{}^3/_2\,u_1^2, \qquad \varphi_1''(u_1) = -3 \tag{24}$$

Выберем путь интегрирования параллельно вещественной оси, проходящей через точку $u = u_1$. Особые точки $u = \beta_\alpha$ и $u = \beta_\alpha k_1 / k$ будут находиться выше этого пути интегрирования даже при $\mathrm{Im}\,\beta_\alpha < 0$, если $|\mathrm{Im}\,\beta_\alpha| < |\mathrm{Im}\,u_1|$. Последнее неравенство считаем выполненным, так как рассматриваем колебания, для которых $u = \beta_\alpha$ близка к вещественной оси. Вычисляя интеграл I_1 по методу стационарной фазы, получим

$$I_1 = \frac{D_\alpha(u_1) - C_\alpha(u_1)}{\sqrt{3}}\, e^{-{}^3/_2 u_1^2} \tag{25}$$

При $|\beta_\alpha| \gg 1$, очевидно, модуль квадрата $|u_1^2|$ значительно больше единицы при всех значениях $n = kl / \pi$ и тем больше, чем больше n. Поэтому поправка I_1 будет иметь значение только для целых чисел n, близких к единице. Для таких n, очевидно, $|\beta_\alpha^2| \gg |u_1^2|$, и из (25) имеем приближенно

$$I_1 = \frac{|u_1^2|}{2\sqrt{3}\,|\beta_\alpha^2|}\, e^{-{}^3/_4 u_1^2} \left\{\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}|u_1^2|\right) + 3\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}|u_1^2|\right) + \right.$$
$$\left. + i\left[\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}|u_1^2|\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}|u_1^2|\right)\right]\right\} \tag{26}$$

Для I_2 получается аналогичная формула, но в ней нужно заменить

$$|u_1^2| \text{ на } |u_2^2| = \sqrt[3]{2}\,|u_1^2|$$

Заметим, что вещественные части I_1 и I_2 значительно меньше вещественной части I_0, поэтому в выражении (21) ими можно пренебречь, сохранив только мнимые части. Таким образом, можно записать окончательно

$$B_\alpha(k, k_1) \approx \frac{(-1)^{n-m}}{k^2 a_\alpha^2 \beta_\alpha^2 kl} \left\{\sum_{\delta=1}^{2} \frac{|u_\delta^2|}{2\sqrt{3}} \left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}|u_\delta^2|\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\sin\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}|u_\delta^2|\right)\right] e^{-{}^3/_4 |u_\delta^2|} - i\left[\frac{1}{4} + (-1)^\alpha \frac{v_\alpha}{2\sqrt{2\pi}}\right]\right\} \tag{27}$$

Подстановка (20) и (27) в уравнение (16) позволяет решить задачу об определении частоты и декремента затухания в плоскостном диоде.

Рассмотрим электронные колебания плазмы в газоразрядном плоскостном диоде. Для определения частоты и декремента затухания электронных колебаний плазмы можно не учитывать движение ионов и в уравнении (16) положить $A_2 = B_2 = 0$. В первом приближении не будем учитывать вещественной части поправки $B_1(-k, -k_1)$. Перейдем к размерным величинам и введем обозначения

$$A_1'(k) \equiv -\mathrm{Re}\,A_1(k) = \frac{\omega_i^2}{(\omega - wk)^2}(1 + 3k^2 a_1^2)$$

$$A_1''(k) \equiv \mathrm{Im}\,A_1 = \frac{\gamma_0 + 1/\tau_1 - \gamma}{\omega_i}$$

$$B_1''(k) \equiv (-1)^{n-m}\,\mathrm{Im}\,B_1(-k, -k_1) = \frac{1}{kl}\left(\frac{1}{4} + \frac{|w_1|}{2\sqrt{2\pi}s_1}\right)$$

Уравнение (16) запишется в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{k-1,\,l-1} & a_{k-1,\,l} & a_{k-1,\,l+1} & \cdots \\ \cdots & a_{k,\,l-1} & a_{k,\,l} & a_{k,\,l+1} & \cdots \\ \cdots & a_{k+1,\,l-1} & a_{k+1,\,l} & a_{k+1,\,l+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

$$a_{k-1,\,l-1} = 1 - A_1'(k-1) + i\,[A_1''(k-1) + \beta_1''(k-1)]$$

$$a_{k-1,\,l} = -\,i\beta_1''(k-1), \qquad a_{k-1,\,l+1} = i\beta_1''(k-1)$$

$$a_{k,\,l-1} = -\,i\beta_1''(k), \qquad a_{k,\,l} = 1 - A_1'(k) + i\,[A_1''(k) + \beta_1''(k)]$$

$$a_{k,\,l+1} = -\,i\beta_1''(k)$$

$$a_{k+1,\,l-1} = i\beta_1''(k+1), \qquad a_{k+1,\,l} = -i\beta_1''(k+1)$$

$$a_{k+1,\,l+1} = 1 - A_1'(k+1) + i\,[A_1''(k+1) + \beta_1''(k+1)]$$

Выделяя вещественную часть определителя и учитывая, что $A_1''(k) \ll A_1'(k)$, получим

$$\mathrm{Re}\,\Delta = \prod_k (1 - A_1'(k)) = 0 \tag{29}$$

Как видно из (29), поправки B_1'' не входят в вещественную часть определителя. Это значит, что в рассматриваемом приближении наличие границ не сказывается на частоте колебаний, и для данного волнового числа k частота определяется из уравнения

$$1 - A_1'(k) = 0 \tag{30}$$

решение которого дается формулой Власова

$$\omega = \omega_1 (1 + {}^3/_2\, k^2 a_1^2) + (\mathbf{wk}) \tag{31}$$

В следующем приближении к частоте добавляется незначительная поправка, равная $-{}^1/_2$, $\mathrm{Re}\, B_1(-k, -k_1)$. При определении мнимой части определителя заметим, что произведение недиагональных членов iB_1'' компенсируется произведением тех же членов, входящих в диагональные элементы определителя. Следовательно,

$$\mathrm{Im}\,\Delta = \sum_k [A_1''(k) + B_1''(k)] \prod_{k' \neq k} (1 - A_1'(k') + O(B_1''^3)) \tag{32}$$

Для тех k, для которых выполняется равенство (30), а следовательно,

$$\prod_{k' \neq k} (1 - A_1'(k')) \neq 0$$

и из (32) получаем

$$A_1''(k) + B_1''(k) = 0 \tag{33}$$

Отсюда определяется затухание волн

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{1}{\tau_1} + \frac{\omega_1}{2kl}\left(\frac{1}{2} + \frac{|w_1|}{\sqrt{2\pi}s_1}\right) \tag{34}$$

Как видно из (34), наличие границ плазмы сказывается на затухании волн таким образом, что волна, распространяющаяся от анода к катоду ($k > 0$), затухает сильнее, а от катода к аноду ($k < 0$) — слабее, чем волна в неограниченной плазме. Ослабление затухания волны, движущейся от катода к аноду, связано с тем, что на нее накладывается волна от того же возмущения, отразившаяся от катода и имеющая ту же длину волны и фазовую скорость. Причем при условии, когда время прохождения волной расстояния между электродами в два раза меньше времени затухания волны в неограниченной плазме

$$t \equiv \frac{2kl}{\omega} \approx \frac{1}{2} t_1 \equiv \frac{1}{2} \frac{\tau_1}{1 + \gamma_0 \tau_1} \tag{35}$$

волна, движущаяся от катода к аноду, становится незатухающей в течение того отрезка времени, пока действует возмущение. Скорость дрейфа электронов при этом играет незначительную роль, так как $|w_1| / s_1 \ll 1$. Но все же она способствует установлению незатухающей волны, движущейся в направлении дрейфа электронов.

В полупроводниковом диоде, наряду с колебаниями электронов, нужно учитывать и колебания дырок. Для высокочастотных колебаний имеем в полупроводниковом диоде

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \frac{3}{2} \frac{k^2 (\omega_1^2 s_1^2 + \omega_2^2 s_2^2)}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + (\mathbf{w}_1 \mathbf{k}) + (\mathbf{w}_2 \mathbf{k}) \tag{36}$$

$$\gamma = \frac{\omega_1^2 / \tau_1 + \omega_2^2 / \tau_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \times$$
$$\times \left(\exp\left[-\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2 k^2 a_1^2} \right] \frac{1}{\omega_1 k^3 a_1^3} + \exp\left[-\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_2^2 k^2 a_2^2} \right] \frac{1}{\omega_2 k^3 a_2^3} \right) +$$
$$+ \frac{\omega_1^2 (1/2 + |w_1| / \sqrt{2\pi} s_1) - \omega_2^2 (1/2 + |w_2| / \sqrt{2\pi} s_2)}{2kl \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \tag{37}$$

Как видно из (36), влияние границ не сказывается на частоте колебаний. Как видно из (37), влияние границ не сказывается и на затухании волн, если $\omega_1 = \omega_2$, что имеет место при равенстве $m_1 = m_2$ эффективных масс электронов и дырок в собственном полупроводнике (например, в i-области $p - i - n$-диода) или при равенстве $n_1 / m_1 = n_2 / m_2$ в легированном полупроводнике. Если же $\omega_1 \gg \omega_1$, то имеем чисто электронные колебания плазмы, для которых возможно соблюдение условия (35), когда возникают незатухающие колебания, распространяющиеся от эмиттера к коллектору. Так как $1 / \tau_1 \approx 10^{12}$ *сек*$^{-1}$, а для соблюдения условия (35) нужно, чтобы ω_1 была больше $1 / \tau_1$, по крайней мере, на порядок, то концентрация электронов должна быть $n_1 > 4 \cdot 10^{17} m_1 / m_0$ *см*$^{-3}$, где m_0 — масса свободного электрона. Если же $\omega_2 \gg \omega_1$, то имеем чисто дырочные колебания, для которых также возможно выполнение условия (35), когда возникают незатухающие колебания, распространяющиеся от коллектора к эмиттеру. Так как $1 / \tau_2 \approx 10^{12}$ *сек*$^{-1}$, то для соблюдения условия (35) нужно, чтобы $n_2 > 4 \cdot 10^{17} m_2 / m_0$ *см*$^{-3}$.

Приношу благодарность А. И. Губанову за просмотр рукописи и ценные замечания.

Поступила 6 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Bom D., Gross E. Effects of Plasma Boundaries in Plasma Oscillations. Phys. Rev., 1950, vol. 79, No. 6.
2. Стратонович Р. Л. Переходные процессы в плоско-ограниченной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1953, т. 24, № 3.
3. Иорданский С. В. Об электронных колебаниях плазмы между двумя электродами. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, № 5.
4. Taylor E. C. Excitation of Longitudinal Waves in a Bounded Collisionless Plasma. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 9,
5. Gold L. On the stability of a plasma Diode. J. Electr. and Control, 1963, vol. 15, No 4.
6. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, 1960.
7. Fröhlich H., Paranjape B. V. Dielectric Breakdown in solids. Proc. Phys. Soc. B, 1956, vol. 69, No. 21.
8. Гордеев Г. В. Низкочастотные колебания плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1954, т. 27, № 1 (7).