ПМТФ, № 4, 1971

УДК 536.24

ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИЯ ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В. В. Никитин

(Новосибирск)

Исследована зависимость пондеромоторных сил, вызывающих электроконвекцию, от свойств жидкости и напряженности электростатического поля бесконечной заряженной пластины и на основе полученных решений введен параметр относительной интенсификации теплообмена в различных диэлектриках во внешнем электростатическом поле.

Известно, что электрическое поле интенсифицирует теплоотдачу к жидкостям и газам. Необходимыми условиями возникновения электроконвекции являются градиенты напряженности поля и коэффициента поляризации среды вблизи теплопередающей поверхности, однако экспериментально обнаружено также влияние однородного электростатического поля на свободную конвекцию диэлектрика [1]. В данном случае можно пренебречь краевыми эффектами и считать поле однородным всюду, исключая области вблизи пластин конденсатора. Здесь напряженность поля уменьшается в результате поляризации среды, которая возникает вследствие ориентации молекул с постоянным и (или) индуцированным дипольным моментом, а также в результате разделения зарядов в электрическом поле поверхности. Используемые жидкие диэлектрики имеют малую, но все же отличную от нуля проводимость $\sigma = 10^{-4}$—10^{-12} *ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$ и в этом смысле могут рассматриваться как весьма слабые растворы электролитов. Наблюдавшееся Сентфлебеном [2] значительное влияние ничтожных следов загрязнения диэлектриков на теплопередачу подтверждает это положение. При этом характерный масштаб области пространственного заряда на поверхности лежит в диапазоне $1 / \varkappa = 10^{-8}$—10^{-4} *м*, что обычно значительно меньше области изменения электростатического потенциала. Однако именно в области экранирования локализованы пондеромоторные силы, вызывающие дополнительный конвективный поток жидкости.

Ниже в качестве модели рассчитано электростатическое поле в полубесконечной жидкости с заданным потенциалом на плоской границе при экранировании заряда границы ионами противоположного знака. Полученные решения позволяют найти распределение электрострикционных сил в неоднородном температурном поле жидкости, их отношение к термическому изменению гравитационных сил и критерии подобия, характеризующие интенсификацию теплообмена в электростатическом поле. Так как рассмотрен лишь один механизм поляризации среды, возможно обобщение полученных результатов на случай находящихся во внешнем электрическом поле цилиндра, радиус которого превышает радиус экранирования, и нагретой плоскости.

1. Пусть плоская заряженная поверхность $y = 0$ граничит с полубесконечным объемом слабого раствора бинарного электролита. Среднюю концентрацию n_∞ ионов каждого знака в единице объема считаем настолько малой, что дебаевский радиус экранирования $1 / \varkappa$ значительно превышает масштаб осреднения электрического поля.

Найдем зависимости безразмерных величин суммарной концентрации ионов, объемной плотности заряда, напряженности и потенциала электростатического поля

$$n = \frac{n_+ + n_-}{2n_\infty}, \quad q = \frac{n_+ - n_-}{2n_\infty}, \quad \varepsilon = \frac{eE}{\varkappa kT}, \quad \varphi = \frac{e\Phi}{kT} \tag{1.1}$$

от безразмерной координаты по нормали к поверхности

$$\theta = \varkappa y, \quad \varkappa = (8\pi e^2 n_\infty / \varepsilon_d kT)^{1/2} \tag{1.2}$$

Здесь E, Φ — размерные значения напряженности и потенциала поля, n_+, n_- — концентрации положительных и отрицательных ионов, e —

абсолютный заряд иона, kT — температура (в энергетических единицах), ε_d — диэлектрическая проницаемость.

Для простоты считаем электролит симметричным (модули зарядовых чисел равны $|z_+| = |z_-| = 1$) и коэффициенты диффузии равными $D_i = D = \text{const}$, что приближенно справедливо для наиболее распространенных диссоциирующих примесей при их малой концентрации. Рассматривая жидкости и газы, либо обладающие большой диэлектрической прочностью, либо индифферентные по отношению к заряженной поверхности, будем пренебрегать током утечки заряда поверхности

$$j_i = eD\,(z_i e n_i E \,/\, kt - \nabla n_i) = 0$$

Это условие вместе с уравнениями Максвелла приводит к следующей системе уравнений:

$$q_\theta = n\varepsilon, \quad n_\theta = q\varepsilon, \quad \varepsilon_\theta = q, \quad \varphi_\theta = -\varepsilon \tag{1.3}$$

Отсюда, исключая q и n, получаем уравнение для напряженности поля в жидкости

$$\varepsilon\,\varepsilon_{\theta\theta\theta} - \varepsilon_\theta\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon^3\varepsilon_\theta = 0 \tag{1.4}$$

Здесь индексами обозначены переменная и порядок производных. При условии электронейтральности среды вдали от поверхности

$$q,\ \varepsilon \to 0, \quad n \to 1 \quad \text{при } \theta \to \infty$$

и при заданном электростатическом потенциале поверхности (для определенности — положительно заряженной) относительно бесконечности

$$\varphi(0) = \varphi_0 > 0, \ \varphi(\infty) = 0$$

получим

$$\varphi = 2\ln\operatorname{cth}\frac{\theta + \theta_0}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{2}{\operatorname{sh}(\theta + \theta_0)} \qquad \left(\theta_0 = \ln\operatorname{cth}\frac{\varphi_0}{4}\right) \tag{1.5}$$

Это же решение может быть получено не только из условия отсутствия амбиполярно-диффузионного потока ионов, но и методом самосогласованного поля. Действительно, если в соответствии с теорией Дебая — Хюккеля [3] примем статистическое распределение ионов в электростатическом поле

$$n_+ = n_\infty \exp(-\varphi), \qquad n_- = n_\infty \exp\varphi \tag{1.6}$$

то уравнение Пуассона примет вид

$$\varphi_{\theta\theta} = \operatorname{sh}\varphi, \qquad \varphi(\infty) = \varphi_\theta(\infty) = 0 \tag{1.7}$$

и даст то же соотношение между напряженностью и потенциалом поля, которое следует и из уравнения (1.5)

$$\varepsilon = 2\operatorname{sh}\varphi/2 \tag{1.8}$$

Однако в непосредственной окрестности пластины эти решения лишены физического смысла как в случае значительной степени ионизации жидкости, так и для сильно заряженной поверхности. В области применимости полученных решений должны выполняться следующие два критерия.

Во-первых, среднее расстояние между противоионами должно быть не меньше расстояния, определяемого условием слабости энергии кулоновского взаимодействия отрицательных ионов по сравнению с их средней кинетической энергией

$$n_-^{-1/3} \geqslant \delta = e^2 / \varepsilon_d kT$$

Во-вторых, среднее расстояние между положительными ионами должно быть не больше расстояния до поверхности

$$n_+^{-1/3} \leqslant y$$

Используя решения (1.5), (1.6), запишем оба критерия в виде

$$\operatorname{th}\frac{\theta+\theta_0}{2} \geqslant \max\left\{\frac{\varkappa\delta}{\sqrt{8\pi}}, \left(\frac{8\pi\varkappa\delta}{\theta^3}\right)^{1/3}\right\} \qquad (1.9)$$

Предварительно исследуем первую часть неравенства. Она справедлива в области

$$\theta \geqslant \ln\left(\frac{\sqrt{8\pi}+\varkappa\delta}{\sqrt{8\pi}-\varkappa\delta}\operatorname{th}\frac{\varphi_0}{4}\right)$$

и, в частности, всюду при $\theta \geqslant 0$, если потенциал поверхности не превышает критического значения

$$[\varphi_0] = \ln(8\pi / \varkappa\delta) \qquad (1.10)$$

Запишем это выражение в ином виде, используя соотношение кинетической теории между коэффициентом электропроводности σ и подвижностью ионов w [4]

$$\sigma = 2n_\infty ew, \quad w = eD / \varepsilon_d kT$$

Тогда

$$\varkappa = (4\pi\sigma / D)^{1/2}, \quad [\varphi_0] = \ln(2D / \sigma\delta^2) \qquad (1.11)$$

и значения радиуса экранирования и критического потенциала можно легко оценить при помощи табличных параметров (число Шмидта $S = \nu / D$ для большинства маловязких жидкостей с примесной проводимостью имеет порядок 10^3, а для газов близко к единице). Например, для сухого воздуха, рассматриваемого как слабо ионизованный газ, критический потенциал поверхности равен $[\varphi_0] \approx 30$, тогда как для химически чистой, дистиллированной и морской (соленость 0.035) воды $[\varphi_0] \approx 20$, 10, 1 соответственно. Последнюю, однако, нельзя считать слабым раствором электролита, так как в этом случае дебаевский радиус экранирования и диаметр молекулы воды соизмеримы.

Практический интерес представляют случаи $\varphi_0 \gg 4$, так как безразмерный электростатический потенциал отнесен к величине $kT / e = 0.03$ *в* (при $T = 300°$ K), а полученные значения $[\varphi_0]$ меньше технических критериев сильной заряженности поверхности. Исследуя далее неравенство (1.9), найдем, что в области $\theta < 1$ экранирования заряда поверхности последняя часть неравенства является определяющей для жидкостей со средней концентрацией ионов $n_\infty \ll \delta^{-3}$, т. е. практически для всех жидких диэлектриков. В результате область применимости решений (1.5) и (1.8) определяется однозначно, ее безразмерная граница θ_* оказывается слабой функцией степени ионизации среды

$$\theta \geqslant \theta_* = 2(\pi\varkappa\delta)^{1/4} \sim 0.1 \qquad (1.12)$$

а потенциал φ_* на границе значительно меньше потенциала поверхности

$$\varphi_* = 2\ln\operatorname{cth}(\pi\varkappa\delta)^{1/4} \ll \varphi_0$$

Потенциал поля в непосредственной близости к поверхности запишем в виде трех членов ряда Маклорена

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_\theta(0)\,\theta + {}^1/_2\,\varphi_{\theta\theta}(0)\,\theta^2 \quad \text{при } \theta \ll 1$$

и, сопрягая решения для потенциала и его производной на границе θ_*, определим напряженность поля и объемную плотность заряда

$$\varepsilon_0 = -\varphi_\theta(0) = \frac{2}{\theta_*}\left(\varphi_0 - 2\ln\operatorname{cth}\frac{\theta_*}{2} - \frac{2}{\operatorname{sh}\theta_*}\right) \tag{1.13}$$

$$q_0 = -\varphi_{\theta\theta}(0) = \frac{2}{\theta_*^2}\left(\varphi_0 - 2\ln\operatorname{cth}\frac{\theta_*}{2} - \frac{2\theta_*}{\operatorname{sh}\theta_*}\right)$$

Заметим, что последними членами, содержащими гиперболические функции, можно пренебречь, так как при принятых ранее ограничениях

$$\varepsilon_0 > \varphi_0\,(\pi\varkappa\delta)^{-1/_5} > (2\pi)^{-0.3}\,\varphi_0 > 1$$

и считать распределение потенциала в области экранирования параболическим

$$\varphi = \varphi_0\,(1 - \theta\,/\,\theta_*)^2 \tag{1.14}$$

Такая общепринятая операция «сшивания» решений обладает меньшей точностью по сравнению с методом асимптотического сращивания [5], но требует и меньшей информации о физико-химических явлениях на заряженной поверхности. Однако указанным методом можно воспользоваться в частном случае для определения средней напряженности $\langle\varepsilon\rangle$ поля, локализованного в пределах радиуса экранирования поверхностного заряда. При этом внутреннее решение для потенциала может быть записано в размерном виде $\Phi = \Phi_0 - yE$ (при $\theta \leqslant 1$), не содержащем в качестве характерного масштаба длины ни δ, ни $1\,/\,\varkappa$, а внешним решением является одночленное разложение $\varphi = \varepsilon$ уравнения (1.14) в области $\theta \gg 1$. Сращивая их пределы при $\theta \to 1$ и $\theta \to 0$ соответственно, получаем $\langle\varepsilon\rangle = \varphi_0$, что следует, в частности, и из уравнения (1.13).

2. При механическом и тепловом равновесии среды помимо гравитационных сил $\mathbf{f}_g = \rho\mathbf{g}$ на молекулы действуют пондеромоторные силы, направленные к заряженной поверхности вне зависимости от знака заряда и имеющие объемную плотность

$$\mathbf{f}_e = -\frac{\varkappa_1}{2}\nabla E^2, \qquad \varkappa_1 = \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi} = \frac{\rho N}{M}\left(\beta + \frac{p_0^2}{3kT}\right) \tag{2.1}$$

Здесь $\varkappa_1$ и β — коэффициенты поляризации среды и отдельной молекулы, ρ и M — плотность и молекулярный вес, p_0 — постоянная составляющая дипольного момента молекулы, N — число Авогадро. Вне области экранирования пондеромоторные силы малы

$$f_e = \varkappa\varkappa_1 E^2 \operatorname{cth}(\theta + \theta_0), \qquad \theta > \theta_*$$

Это позволяет с достаточной точностью считать их локализованными в слое $\theta \leqslant \theta_*$ со средней плотностью

$$\langle f_e\rangle = {}^1/_2\,\varkappa\varkappa_1 E_0^2 \tag{2.2}$$

При нарушении теплового равновесия среды приращение этих сил равно

$$\Delta f_e = -\left[\frac{\partial\langle f_e\rangle}{\partial T}\right]_{T=T_0}\Delta T = \langle f_e\rangle\left[\alpha + \frac{1}{2T_0}\left(1 + \frac{2}{1 + 3\beta kT_0 p_0^{-2}}\right)\right]\Delta T \tag{2.3}$$

При дифференцировании выражения (2.2) помимо зависимости дебаевского радиуса экранирования $1 / \varkappa$ и коэффициента поляризации $\varkappa_1$ от температуры жидкости T учтено термическое расширение

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha \Delta T), \qquad \alpha = -\frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial \rho}{\partial T}\right]_p, \qquad \Delta T = T_0 - T \ll T_0$$

Здесь ρ_0 и T_0 — параметры жидкости на поверхности тела (при $y = 0$).

Напряженность же поля на поверхности постоянна вследствие отсутствия пульсаций температуры на стенке и равна

$$E_0 = \Phi_0 \left[\frac{\pi (8 n_\infty e)^2}{\varepsilon_d k T}\right]^{1/5} \tag{2.4}$$

При общепринятой методике экспериментального исследования электроконвекции нагреваемое тело находится во внешнем электрическом поле, поэтому напряженность E_0 может быть рассчитана обычным образом, если характерный размер тела значительно больше радиуса экранирования.

Термическое приращение пондеромоторных сил (2.3) не зависит от полярности заряда и в отличие от изменения гравитационных сил $\Delta f_g = \rho_0 g \alpha \Delta T$ всегда направлено противоположно градиенту температуры среды, создавая дополнительный конвективный поток. Степень интенсификации теплообмена в электростатическом поле характеризует отношение указанных сил, равное

$$V = \frac{\Delta f_e}{\Delta f_g} = v E_0{}^2, \qquad v = \frac{\varkappa (\varepsilon_d - 1)}{8 \pi \rho g}\left[1 + \frac{1}{2 \alpha T_0}\left(1 + \frac{2}{1 + 3 \beta k T_0 p_0{}^{-2}}\right)\right] \tag{2.5}$$

Выражение в квадратных скобках в среднем равно $1 + 1 / \alpha T_0$, так как для бездипольных молекул оно равно $1 + 1 / 2\alpha T_0$, а для молекул с преимущественной ориентационной поляризацией оно равно $1 + 3 / 2\alpha T_0$. Вместе с уравнением (1.11) это позволяет записать параметр v, объединяющий свойства жидкости, в удобном для приближенных расчетов виде

$$v \cong \frac{\varepsilon_d - 1}{4 \rho g}\left(1 + \frac{1}{\alpha T_0}\right)\left(\frac{\sigma S}{\pi \nu}\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

Отсюда получим следующие закономерности. Интенсификация теплообмена в электрическом поле растет с увеличением полярности молекул и диэлектрической проницаемости и с уменьшением вязкости, молекулярного веса и сжимаемости среды при прочих равных условиях.

Нагревание неполярных жидкостей ведет к увеличению параметра v вследствие уменьшения вязкости и электрического сопротивления, тогда как для полярных жидкостей имеется и противоположно направленная тенденция, связанная с нарушением ориентационного порядка. Наконец, эффект электроконвекции сильнее проявляется в жидкостях, нежели в газах, ввиду значительного различия значений числа Шмидта и коэффициента объемного расширения.

Умножив последовательно на критерии Рейнольдса и Прандтля отношение термического приращения пондеромоторных сил к стоковой силе сопротивления движению жидкого моля, получим электроконвекционные аналоги критериев Грасгофа и Рэлея

$$G_e = GV, \qquad R_e = RV$$

Обычную в теории свободной конвекции степенную зависимость критерия Нуссельта от критерия Рэлея

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{const}\, R^n \qquad (n = 0.12 - 0.33)$$

распространим на случай электроконвекции. При этом предположим аддитивность конвективных потоков, обусловленных объемными силами гравитационного и электрострикционного происхождения. Получим уравнение теплоотдачи в электростатическом поле

$$\mathrm{Nu}_e = \mathrm{const}\,(R + R_e)^n = \mathrm{Nu}\,(1 + V)^n \tag{2.7}$$

Зависимость относительного увеличения коэффициента теплоотдачи от напряженности электростатического поля при увеличении последней изменяется от квадратичной

$$\mathrm{Nu}_e / \mathrm{Nu} - 1 \to n v E_0^2 \quad \text{при } E_0 \to 0$$

до менее резкой

$$\mathrm{Nu}_e / \mathrm{Nu} - 1 \to (v E_0^2)^n \quad \text{при } E_0 \to \infty$$

что иллюстрирует насыщение электроконвекции, наблюдавшееся Сенфтлебеном. Уравнение (2.7) позволяет так же оценить «пороговое» значение напряженности электростатического поля, при котором заметна интенсификация теплообмена. Действительно, при $E_0 = v^{-1/2}$ и при указанном диапазоне значений n следует ожидать увеличения коэффициента теплоотдачи в электростатическом поле на 10—25%, что близко к точности соответствующих экспериментов.

Поступила 17 VII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt E., Leidenfrost W. Der Einfluß elektrischer Felder auf den Wärmetransport in flüssigen elektrischen Nichtleitern. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, 1953, Bd 19, Nr 3.
2. Senftleben H., Lange-Hahn R. Der Einfluß elektrischer Felder auf den Wärmeübergang in Flüssigkeiten. Z. Naturforsch., 1958, Bd 13a, Nr 2.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.