

2. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977.
3. Найфэ А. Введение в теорию возмущений. — М.: Мир, 1984.

г. Ухта

Поступила 2/XI 1992 г.,
в окончательном варианте — 19/III 1993 г.

УДК 534.222 + 539.374

Н.Н. Мягков

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

Введение. При рассмотрении волновых задач в конденсированных средах необходимо, как известно, учитывать упругопластическое поведение, которое может быть описано сильнонелинейной и гистерезисной зависимостью напряжение сдвига — деформация сдвига или максвелловской моделью с нелинейным временем релаксации касательных напряжений. Такое поведение характерно не только для традиционных задач физики удара при нагружении с амплитудами от нескольких до десятков гигапаскалей [1], но и при значительно меньших амплитудах в металлах, когда существенны эффекты микропластичности [2,3] (так называемая «аномальная нелинейность» упругих сред), в полимерах с деструктивной пластичностью [3] и т.д. В большинстве практически интересных перечисленных случаев волны можно считать слабыми в смысле малости напряжения в волне по сравнению с модулем всестороннего сжатия.

Для решения задач распространения волн малой, но конечной амплитуды в гидродинамике развит [4,5] эффективный асимптотический метод многих масштабов, позволяющий из сложной исходной системы получить нелинейное уравнение, дающее равномерно пригодное первое приближение к решению исходной системы. Обнаружение в [6] с помощью этой техники способа факторизации исходной системы на систему независимых нелинейных уравнений, относящихся к различным семействам характеристик, позволило, кроме турбулентности Бюргерса в [6], рассмотреть задачи, в которых также существенно встречное взаимодействие волн, например акустический резонатор [7] и упругий слой [8].

В настоящей работе проведена факторизация системы уравнений нелинейного тела Максвелла, являющейся универсальной для описания динамического поведения конденсированных сред с упругопластической кинетикой, и получены приближенные системы независимых нелинейных уравнений для волн, относящихся к различным семействам продольных характеристик; волны связываются неявно через неоднородный сдвиг фаз. Вид уравнения для фазовой функции, описывающей взаимодействие вследствие упругопластичности, следует из рассмотрения задачи распространения плоской ударной волны по постоянному фону и в общем случае подсказан групповыми соображениями. Приближенные системы получены для неограниченной в поперечных направлениях среды и применимы для описания традиционных ударно-волновых экспериментов в слое (этот случай разобран более подробно) и для тонкого стержня с микропластической кинетикой деформирования.

Аналитически решена задача о самовоздействии плоской ударной волны при ее выходе на свободную поверхность для модели идеального упругопластического материала. Эта задача представляет значительный практический интерес, так как эксперименты по измерению профиля скорости

свободной [9] или контактной [10,11] поверхности являются основными для определения динамических свойств металлов.

Уравнения движения. Малые параметры. Для описания поведения компактных конденсированных сред при динамических воздействиях в качестве универсальных можно использовать уравнения нелинейного тела Максвелла [12]:

$$(1) \quad \rho(du_i/dt) - \partial\sigma_{ik}/\partial x_k - \partial\sigma_{ik}^{asc}/\partial x_k = 0,$$

$$d\epsilon_{ij}/dt = \frac{1}{2}(\delta_{ik} - 2\epsilon_{ik})(\partial u_k/\partial x_j) + \frac{1}{2}(\delta_{jk} - 2\epsilon_{jk})(\partial u_k/\partial x_i) + \varphi_{ij},$$

$$d\rho/dt + \rho(\partial u_k/\partial x_k) = 0,$$

$$\rho T(dS/dt) = \partial/\partial x_k [\kappa(\partial T/\partial x_k)] + \sigma_{im}^{asc}(\partial u_i/\partial x_m) - \frac{1}{2}\rho(\partial E/\partial \epsilon_{mj})\varphi_{mj},$$

$$\sigma_{ik}^{asc} = \eta(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i) + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(\partial u_j/\partial x_j)\delta_{ik};$$

$$(2) \quad \sigma_{ij} = \rho(\delta_{ik} - 2\epsilon_{ik})(\partial E/\partial \epsilon_{kj}).$$

Здесь σ_{ij} — тензор напряжений; u_i — скорости перемещения среды; ϵ_{ij} — тензор эффективных упругих деформаций; φ_{ij} — релаксационные члены, ответственные за кинетику деформирования; $i, j, k, m = 1, 2, 3$. Внутренняя энергия E для изотропной среды есть функция инвариантов тензора деформаций и энтропии. Удобно представить эту зависимость в виде [12] $E = E(\rho, D, \Delta, S)$. Гидродинамическая часть уравнения состояния — зависимость E от плотности ρ — характеризует всестороннее сжатие объема, зависимость от инвариантов девиатора эффективных деформаций D и Δ — изменение его формы:

$$D = \frac{1}{2}(\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2) + \gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{23}\gamma_{32} + \gamma_{31}\gamma_{13} + O(\epsilon^3), \Delta =$$

$$= \gamma_{11}(\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{32}) - \gamma_{12}(\gamma_{21}\gamma_{33} - \gamma_{23}\gamma_{31}) + \gamma_{13}(\gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_{31}\gamma_{22}) +$$

$$+ O(\epsilon^4), \gamma_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij}.$$

Введен малый параметр ϵ , который характеризует малость относительного изменения плотности вещества в волне или малость напряжения по сравнению с модулем всестороннего сжатия. В (1) достаточно ограничиться следующим видом релаксационных членов: $\varphi_{ij} = -\gamma_{ij}/\tau(\epsilon_{kl}, S)$ (τ — время релаксации касательных напряжений). Необходимость описания кинетики деформирования как в упругой, так и в пластической области течения требует сохранения существенно нелинейного вида зависимости τ от деформаций (или напряжений). Напомним, что в упругой области безразмерное $\tau' \rightarrow \infty$, в пластической области $\tau' \leq O(1)$, $\tau' = \tau/t_0$, t_0 — характерная длительность импульса давления на границе. Формально идеально упруго-пластическая модель также может быть включена в эту схему определенным выбором зависимости φ_{ij} или τ [12].

В данной работе рассматриваются плоские или квазиплоские волны, возникающие при нормальном ударе по границе полупространства или слоя. Считаем, что нормаль к границе направлена вдоль оси x_1 . В квазиплоской задаче импульс давления действует на некоторую конечную область границы, причем вводится малый параметр ϵ_1 , пропорциональный квадрату отношения характерной длины волны к линейному размеру этой области. Таким образом, предполагается, что в поперечных направлениях [13] $\partial/\partial x'_2 \sim \partial/\partial x'_3 \sim \epsilon_1^{1/2}$ ($x'_k = x_k/(C_0 t_0)$). Тогда из (1) следует, что $\gamma_{ij} \sim \epsilon \epsilon_1^{1/2}$, $i \neq j$, в то время как $\gamma_{11} \sim \gamma_{22} \sim \gamma_{33} \sim \epsilon$.

Вводится малый параметр $\nu = (C_1^2 - C_0^2)/2C_0^2 = 2G/(3\rho_0 C_0^2)$, где C_1 — фазовая скорость продольных упругих волн, C_0 — объемная скорость звука, G — модуль сдвига. Для большинства металлов $\nu \leq 0,25$. Экспериментальные данные (см., например, [9, ii]) показывают, что в рассматриваемом интервале давлений параметр ν (аналогично коэффициенту Пуассона) меняется слабо. Введение этого малого параметра позволяет девиаторную часть тензора напряжений рассматривать как величину второго порядка малости и, значит, учитывать релаксационные упругопластические процессы наряду с нелинейностью и поглощением в следующем за акустическим приближении. Последнее важно для применения техники многомасштабных разложений к (1) и редукции этой системы к более простой.

В работах по моделированию интенсивного динамического нагружения в девиаторе напряжений удерживаются только линейные по γ_{ij} члены, уравнение состояния определяется через его гидродинамическую часть [1] и зависимость модуля сдвига от давления [14]. Разлагая внутреннюю энергию в ряд по приращению плотности $\rho' = (\rho - \rho_0)/\rho_0$, энтропии $S' = T_0(S - S_0)/C_0^2$, инвариантам D и Δ , с учетом, что $\partial E/\partial D|_0 = 2G/\rho_0$, из (2), удерживая в гидродинамической части тензора σ_{ij} члены до второго порядка малости включительно, получим

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma'_{ii} &= \sigma_{ii}/(\rho_0 C_0^2) = -[\rho' + \frac{1}{2}\alpha\rho'^2 + \pi S' / (\rho_0 T_0) + \\ &\quad + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2\nu)] + 3\nu(\gamma_{ii} + O(\varepsilon^2)), \\ \sigma'_{ij} &= 3\nu[\gamma_{ij} + O(\varepsilon^2\varepsilon_1^2)] + O(\varepsilon^2\varepsilon_1), \quad i \neq j, \end{aligned}$$

где $E_{\rho S}|_0 = \pi/\rho_0^2$; $\alpha = 4 + \rho_0^3 E_{\rho\rho\rho}|_0/C_0^2$; $T_0 = E_s|_0$ — температура; индекс 0 обозначает невозмущенное состояние; параметр α определяется из двучленного уравнения состояния типа Тэта или Грюнайзена [1].

Распространение ударной волны по предварительно нагруженному материалу. В разделе рассматривается столкновение ступенькообразных ударных волн в простейшем случае, когда взаимодействие можно описать переходом от невозмущенного к предварительно нагруженному состоянию перед фронтом ударной волны.

Пусть среда переводится плоской ударной волной из состояния $(\rho, u, \sigma, \psi)_r$ при $t' \rightarrow -\infty$ в состояние $(\rho, u, \sigma, \psi)_m$ при $t' \rightarrow +\infty$; здесь $\sigma = \sigma_{11}$, $\psi = -\gamma_{11}$, $t' = t/t_0$. Рассматриваются идеально упругопластическая среда и максвелловская среда с $0 < \tau' < \infty$. В первом случае невозмущенное состояние $\psi_r = 0$, предварительно нагруженное состояние $\psi_r = \psi_*$, за фронтом ударной волны $\psi_m = \psi_* \left(\frac{\rho_m}{\rho_r}\right)^{\frac{1}{2}}$ — предел текучести). Во втором случае в стационарной волне, очевидно, $\psi_r = \psi_m = 0$, так как $\partial\psi/\partial t'$ и $\partial\rho'/\partial t' \rightarrow 0$ при $|t'| \rightarrow \infty$.

Из законов сохранения на стационарном скачке без учета вязкости внутреннего трения и теплопроводности и уравнения состояния (3) нетрудно в принятом приближении получить выражения для массовой (лагранжевой) скорости $M_{,m}$, соотношение между скоростью и напряжением и зависимость $\psi(\rho')$ в волне:

$$(4) \quad \begin{aligned} M_{,m}/(\rho_0 C_0) &= \pm \left[1 + \frac{1}{4}(\alpha + 2)(\rho'_r + \rho'_m) + \frac{3}{2}\nu(\psi_m - \psi_r) / \right. \\ &\quad \left. / (\rho'_m - \rho'_r) \right] + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu), \quad \sigma - \sigma_r = -M_{,m}(u - u_r); \end{aligned}$$

$$(5) \quad \frac{3}{2}\nu(\psi - \psi_r) = \delta(\rho' - \rho'_r) - \frac{1}{4}(\alpha + 2)(\rho'^2 - \rho_r'^2) + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2\nu).$$

Здесь $\hat{\sigma} = \frac{1}{2} [M_{rm}^2 / (\rho_0 C_0)^2 - 1]$. Соотношение (5) описывает возможные состояния внутри волны и показывает зависимость напряжения сдвига $\frac{9}{4} \nu(\psi - \psi_r)$ от истинной деформации ρ' . Параболический ход этой зависимости качественно согласуется, например, с измерениями напряжения сдвига для вольфрама [11]. Стационарные решения для ударных волн получаются как результат совместности (5) с уравнениями кинетики деформирования.

Вычислим изменение лагранжевой скорости движения стационарных ударных волн при лобовом столкновении в идеально упругопластической среде. Траектории фронтов изображены на рис. 1 (по осям — лагранжева координата и время), где e_{\pm} — траектории фронтов упругих предвестников, p_{\pm} — траектории пластических ударных волн. Здесь стационарный режим распространения соответствует по отдельности упругой и пластической волнам, имеющим ступенькообразную форму с однородным значением ρ' за фронтом. В целом комплекс упругая + пластическая волна нестационарен: по мере распространения сдвиг фаз между фронтами увеличивается. Это возможно, как нетрудно убедиться, когда амплитуда пластической волны ρ'_{01} имеет вид $\frac{2}{3} \psi_* < \rho'_{01} < 4\nu / (\alpha + 2)$. На рис. 1 цифрами 0—5 обозначены состояния среды, но не выделены контактные разрывы, так как изменение плотности на контактном разрыве есть величина следующего порядка малости по сравнению с изменением плотности на ударных скачках. Из (4), с учетом того что

$$\rho'_{01} = \rho'_{24} + O(\varepsilon^2), \rho'_{13} = \rho'_{45} + O(\varepsilon^2) \text{ и } \rho'_{01} = \frac{3}{2} \psi_*$$

($\rho'_{01} = \rho'_m - \rho'_r$), имеем

$$(6) \quad (M_{24} - M_{01}) / (\rho_0 C_0) = \frac{1}{2} (\alpha + 2) \rho'_{02} - \nu,$$

$$(M_{45} - M_{13}) / (\rho_0 C_0) = \frac{1}{2} (\alpha + 2) \rho'_{02}$$

и т.д. Видно, что при столкновении ударных волн происходит сдвиг фаз не только за счет гидродинамической нелинейности (первый член в правой части), но и за счет кинетики — после столкновения упругий предвестник распространяется как пластическая волна.

В максвелловской среде, согласно (4), скорость стационарной ударной волны при переходе к предварительно нагруженному состоянию изменяется только за счет нелинейности, так как $\psi_m = \psi_r = 0$. Чтобы выявить влияние максвелловской кинетики деформирования на сдвиг фазы в профиле волны, необходимо рассмотреть нестационарную задачу. Нетрудно видеть, что стационарное соотношение (5) является следствием нестационарного уравнения

$$(7a) \quad \partial \rho' / \partial x'_1 - \frac{1}{2} (\alpha + 2) \rho' \partial \rho' / \partial \xi_1 -$$

$$- \frac{3}{2} \nu (\partial \psi / \partial \xi_1) = 0, \quad \xi_1 = t' - x'_1$$

и получается из (7a) заменой $(x'_1, \xi_1) \rightarrow y = \xi_1 + \delta x'_1$ и последующим интегрированием в пределах от y до $-\infty$. Уравнение, определяющее

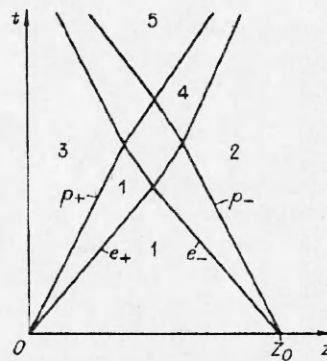


Рис. 1

кинетику деформирования, вытекает из второго уравнения системы (1):

$$(76) \quad \partial\psi / \partial\xi_1 = \frac{2}{3}\partial\rho' / \partial\xi_1 + \varphi_{11}(\psi, \rho') + O(\varepsilon^2).$$

Система (7) описывает распространение по нулевому фону $\rho' = 0$ вдоль C_+ характеристического направления. Возможность описания сдвигом фаз взаимодействия волны со ступенькой, происходящей только из-за гидродинамической нелинейности, для уравнения Бюргерса [6] следует из его инвариантности относительно преобразования Галилея. Уравнение (7а), которое можно трактовать как обобщенное уравнение Бюргерса, не обладает инвариантностью относительно этого преобразования:

$$\xi' = \xi_1 + \frac{1}{2}(\alpha + 2)\rho'_1 x'_1, \rho' = \rho'' + \rho'_1, \psi = \psi' + \psi_r, x'' = x'_1, \rho'_1 \neq 0.$$

Поступим таким образом: после подстановки этих соотношений в (7) введем новые переменные $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\psi}$:

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(\psi' + \psi_r, \rho'' + \rho'_1) - \varphi_{11}(\tilde{\psi}, \rho'') &= \partial\tilde{\psi} / \partial\tilde{\xi} - \partial\psi' / \partial\xi', \\ \tilde{\xi} &= \xi' + \nu\theta(x'', \xi'), \tilde{x} = x'', \end{aligned}$$

тогда из (7) будем иметь

$$\begin{aligned} \partial\rho'' / \partial\tilde{x} - \frac{1}{2}(\alpha + 2)\rho''\partial\rho'' / \partial\tilde{\xi} - \frac{3}{2}\nu\partial\psi' / \partial\tilde{\xi} + \\ + \nu(\partial\theta / \partial x'')(\partial\rho'' / \partial\tilde{\xi}) + O(\varepsilon^2\nu + \varepsilon\nu^2) = 0. \end{aligned}$$

Видно, что если выбрать θ так, чтобы

$$(8) \quad (\partial\theta / \partial x'')(\partial\rho'' / \partial\tilde{\xi}) = \frac{3}{2}(\partial\psi' / \partial\tilde{\xi} - \partial\tilde{\psi} / \partial\tilde{\xi}),$$

то получим преобразование, относительно которого система (7) инвариантна. Таким образом, влияние максвелловской кинетики деформирования при взаимодействии ударной волны со ступенькой можно учесть через сдвиг фаз, определяемый по формуле (8). Можно видеть, что (8) описывает также сдвиг фаз (6), вызванный идеально упругопластическим поведением.

Приближенные нестационарные нелинейные уравнения с учетом взаимодействия. Применение техники многомасштабных разложений, развитой в [6], к системе уравнений (1), (3) не является формальной процедурой и требует модифицированного подхода. Это связано с необходимостью описания течения как в упругой, так и в пластической области, т.е. сохранения сильнонелинейной зависимости релаксационных членов от деформаций (или напряжений).

Для факторизации системы (1), (3) введем новую неизвестную функцию θ_j в фазовую переменную:

$$(9) \quad \xi_j = t' - \lambda_j^{-1}(x'_1 + \varepsilon\Phi_j + \nu\theta_j), j = 1, 2$$

($\lambda_j = \pm 1$ соответствует распространению вдоль C_{\pm} характеристических направлений). Фазовая функция $\Phi_j(x', t')$, как известно [6], учитывает взаимодействие волн $j = 1, 2$ вследствие квадратичной гидродинамической нелинейности. Аналогично можно потребовать, чтобы θ_j учитывала взаимодействие вследствие кинетики деформирования. Результаты предыдущего раздела позволяют сделать это. Действительно, выбор зависимости $\theta_j(x'_1, \xi_j)$ в виде, близком к (8), позволяет свести процедуру применения техники многомасштабных разложений к стандартной.

После определения фазовой переменной (9) и выбора θ_j в виде (12) при условии $\partial\psi / \partial V \leq O(1)$ на плоскости (ψ, V) для каждой лагранжевой части-

цы процедура факторизации системы (1), (3) близка [6, 15], поэтому вывод вынесен в приложение.

Конечный результат имеет вид

$$(10a) \quad \lambda_i \partial V_i / \partial z - \frac{1}{4}(\alpha + 2) V_i \partial V_i / \partial \xi_i - 3\nu \partial \psi_i / \partial \xi_i - \\ - \frac{1}{2} \mu \partial^2 V_i / \partial \xi_i^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_{\xi_i}^{\xi_i} \Delta_{\perp} V_i d\xi_i' = 0;$$

$$(10b) \quad \partial \psi_i / \partial \xi_i = \frac{1}{3} \partial V_i / \partial \xi_i - \psi_i / \tau'(V_i, \psi_i), \quad i = 1, 2;$$

$$(11) \quad \varepsilon \partial \Phi_i / \partial z = -\frac{1}{4}(\alpha + 2) V_j, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2;$$

$$(12) \quad \partial \theta_i / \partial z = -3[\partial \psi / \partial V - \partial \psi_i / \partial V_i],$$

где

$$\partial \psi_i / \partial V_i = \frac{1}{3} - \psi_i / [(\partial V_i / \partial \xi_i) \tau'(V_i, \psi_i)];$$

$$\partial \psi / \partial V = \frac{1}{3} - \psi / [(\partial V / \partial \xi_i) \tau'(V, \psi)];$$

$\psi(V)$ определяется из уравнения

$$(13) \quad \partial \psi / \partial \xi_i = \frac{1}{3} \partial V / \partial \xi_i - \psi / \tau'(V, \psi);$$

$V_i = -\sigma'_{11}/C' + \lambda_i u'_i$; $V = V_1 + V_2$; $u'_i = u_i/C_0$; $z = x'_1(1 + O(\varepsilon))$ — лагранжева координата по направлению оси x_i ; $C' = C/C_0$; C — лагранжева фазовая скорость (14); Δ_{\perp} — поперечный лапласиан (для осесимметричной задачи $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial r'^2 + (1/r') \partial / \partial r'$, $r' = r/r_0$); $\mu \ll 1$ — безразмерный параметр, характеризующий вязкость внутреннего трения и теплопроводность.

В (12) подразумевается дифференцирование по ξ_i при постоянном z (в лагранжевой частице). В (11) коэффициент $\frac{1}{4}(\alpha + 2)$ отражает в рассматриваемом приближении факт лагранжевой записи системы (10). Отметим, что при $V_i = \text{const}$ выражение (12) для θ_i совпадает с (8).

В учетом ограничения $\partial \psi / \partial V|_z \leq O(1)$ решение системы двух независимых нелинейных уравнений (10) для продольных волн дает равномерно пригодное, по крайней мере на расстояниях $z \leq O[\min(\varepsilon^{-1}, \mu^{-1}, \nu^{-1}, \varepsilon_1^{-1})]$, первое приближение к решению точной исходной системы (1), (2). Таким образом, для решения в квазиакустическом приближении задачи о взаимодействии встречных волн достаточно решить систему (10) независимых уравнений, а затем, пользуясь полученными решениями V_i , вычислить фазовые функции из (11), (12). После этого $V_i(\xi_i)$ может быть скорректировано с помощью деформации переменной ξ_i (9) к виду, который она имела до взаимодействия:

$$\xi_i \rightarrow \xi_i + \lambda_i^{-1}(\varepsilon \Phi_i(z, \xi_i) + \nu \theta_i(z, \xi_i)).$$

Условию $\partial \psi / \partial V|_z \leq O(1)$ удовлетворяют упругопластические модели сред и упруговязкие модели в задачах, в которых удается избежать особенности в точках перегиба $\partial \sigma_{11} / \partial \xi_i = 0$. К таким упруговязким моделям относятся, например, модели с упругой разгрузкой. В ряде экспериментов [9, 11, 16] по исследованию распространения плоских волн сжатия и разрежения в металлах измерялась лагранжева фазовая скорость C распростра-

нения фиксированных уровней деформации или напряжения. В принятом здесь приближении

$$(14) \quad C^2 = C_0^2 (dz/dt')^2|_{\rho'} = C_0^2 \{1 + (\alpha + 2)\rho' + 3\nu(\partial\psi/\partial\rho')|_z\}.$$

Эксперименты по распространению ударных волн в вольфраме и алюминии [11,16] показывают скачкообразное изменение C^2 , а следовательно, и $(\partial\psi/\partial\rho')|_z$ в точке перегиба профиля $\partial\sigma_{11}/\partial\xi_i = 0$, причем $(\partial\psi/\partial\rho')|_z \approx$

$\approx O(1)$ вблизи этой точки, здесь $\rho' = \frac{1}{2}V_i + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu)$ при $V_j = 0, i \neq j$.

Поэтому ограничение $\partial\psi/\partial V|_z \leq O(1)$, по-видимому, является, скорее, ограничением на выбор модели кинетики деформирования, чем на сам материал.

Введение фазовой скорости C , имеющей вполне определенный экспериментальный смысл, позволяет объединить в (9) фазовые функции. Обозначим $F_i = \varepsilon\Phi_i + \nu\theta_i$, тогда из (11), (12), (14) имеем

$$(15) \quad \partial F_i / \partial z = -\frac{1}{2} [C^2(V) - c^2(V_i)] / C_0^2,$$

где $C(V)$ и $C(V_i)$ — лагранжевы фазовые скорости суммарной волны и i -й в отсутствие j -й соответственно.

Столкновение двух плоских ступенькообразных ударных волн. На основе предложенных уравнений (9) — (13) проводится решение простейшей задачи о столкновении двух плоских ступенькообразных ударных волн в идеальной упругопластической среде. В этом случае уравнение (10б) запишем в виде

$$(16) \quad \partial\psi_i/\partial\xi_i = \frac{1}{3}\partial V_i/\partial\xi_i, \text{ когда } |\psi_i| < \psi_*, \text{ и } \partial\psi_i/\partial\xi_i = 0, \text{ когда } |\psi_i| = \psi_*.$$

Удар одновременно производится по границам $z = 0$ и $z = Z_0$ слоя (см. рис. 1). Тогда для предельно больших акустических чисел Рейнольдса ($\mu = 0$) решение уравнений (10) имеет вид ($V_* \leq V_{im} \leq 8\nu/(\alpha + 2)$)

$$(17) \quad V_i = V_* [H(\xi_i - \xi_{i,e}) - H(\xi_i - \xi_{i,p})] + V_{im} H(\xi_i - \xi_{i,p}).$$

Здесь $\lambda_i = \pm 1, i = 1, 2; H(x) = 1$ при $x \geq 0; H(x) = 0$ при $x < 0; \xi_{i,e}$ и $\xi_{i,p}$ —

координаты упругих и пластических фронтов: $\xi_{i,e} = [\frac{1}{8}(\alpha + 2)V_* +$

$+ \nu][-\lambda_i z + \frac{1}{2}(\lambda_i - 1)Z_0], \xi_{i,p} = \frac{1}{8}(\alpha + 2)(V_* + V_{im})[-\lambda_i z + \frac{1}{2}(\lambda_i - 1)Z_0]$

($V_* = 2\rho'_{01} + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu)$ — амплитуда упругого предвестника, V_{im} — амплитуды волн, $V_{1m} = 2\rho'_{03} + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu)$ и $V_{2m} = 2\rho'_{02} + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu)$). До столкновения $\theta_i = \Phi_i = 0; \xi_1 = t' - z$, когда $\xi_2 < \xi_{2,e}$, и $\xi_2 = t' + z - Z_0$, когда $\xi_1 < \xi_{1,e}$. После столкновения

$$\begin{aligned} \xi_i &= [1 - \frac{1}{8}(\alpha + 2)V_{jm} + \frac{1}{2}\nu\Omega_{e,p}(\xi_i)]|t'| + \frac{1}{4}(\alpha + 2)V_{jm} - \nu\Omega_{e,p}(\xi_i)|t' - \\ &- \lambda_i z + \frac{1}{2}(\lambda_i - 1)Z_0 - \frac{1}{2}[\frac{1}{4}(\alpha + 2)V_{jm} - \nu\Omega_{e,p}(\xi_i)]Z_0 + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu + \nu^2), \\ \Omega_{e,p}(\xi_i) &= H(\xi_i - \xi_{i,e}) - H(\xi_i - \xi_{i,p}). \end{aligned}$$

Фазовая переменная после взаимодействия обозначена через ξ_i . Подстановка ξ_i вместо ξ_i в (17) дает решение после столкновения. Изменение фазовой скорости ударных волн за счет столкновения полностью согласуется с теми, которые даны в (6).

Самовоздействие П-образной ударной волны при выходе на свободную поверхность. Динамические свойства материалов. Рассматривается практически интересная задача о самовоздействии плоской ударной волны: при ее выходе на свободную поверхность пластины-преграды. Волна прямоугольного (П-образного) профиля формируется на входе в преграду при нормальном ударе пластиной из того же материала. Если U_0 — скорость пластины ударника, то амплитуда ударной волны $V_{1m} \approx U_0/C_0$.

Предположим, что материал пластины идеально упругопластический. В этом случае решение можно выписать в явном виде. Длительность волны на входе в преграду принимается за единицу. Эволюция волны V_1 в преграде при больших числах Рейнольдса описывается уравнениями (10а) и (16) при $i = 1$, $\mu = \varepsilon_1 = 0$. Решение $V_1(\xi_1, z)$ на глубине $z > 0$ имеет вид ($V_{1m} < 8\nu/(\alpha + 2)$ — предполагается наличие упругого предвестника)

$$(18) V_1(\xi_1, z) = V_* \Omega_{e,p}(\xi_1) + V_{1v} \Omega_{p,k}(\xi_1) - 2V_* \Omega_{s,k}(\xi_1) (\xi_1 - \xi_s) / (\xi_k - \xi_s) + \\ + (V_{1m} - 2V_*) [\Omega_{k,n}(\xi_1) + \Omega_{n,l}(\xi_1) (1 - \xi_1) / (1 - \xi_n)],$$

где $\Omega_{g,f}(\xi_1) = H(\xi_1 - \xi_g) - H(\xi_1 - \xi_f)$; $\xi_p = -\frac{1}{8}(\alpha + 2)(V_{1m} + V_*)z$; $\xi_e = -|\xi_*| + \xi_p$; $|\xi_*| = (\nu - \frac{1}{8}(\alpha + 2)V_{1m})z > 0$ — длительность упругого предвестника; $\xi_r = 1 - \left[\frac{1}{4}(\alpha + 2)V_{1m} + \nu \right]z$; $\xi_n = 1 - \frac{1}{4}(\alpha + 2)(V_{1m} - 2V_*)z$; $\xi_k = \xi_n - \nu z$, $\xi_l = 1$. Бстречная волна $V_2 = 0$, поэтому $V_1 = -2\sigma'_{11}/C'$.

Пусть толщина преграды $z = \frac{1}{2}Z_0$; в этой плоскости происходит отражение падающей волны V_1 от свободной поверхности и возникает отраженная волна V_2 , так что $(V_1 + V_2)|_{z=Z_0/2} = 0$. Скорость свободной поверхности $u' = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)|_{z=Z_0/2} = V_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0)$ — величина, обычно измеряемая в экспериментах. Расчет самовоздействия падающей волны (т.е. взаимодействие падающей и вызванной ею отраженной волн) производится по уравнениям (9)–(13) в переменных (ξ_1, z) (рассматривается случай $4V_* < V_{1m} < 8\nu/(\alpha + 2)$). До взаимодействия

$$\theta_1 = \Phi_1 = 0, \quad 0 < z < \frac{1}{2}(Z_0 - \xi_1 + \xi_p), \quad \xi_1 = t - z.$$

После взаимодействия $(z - \frac{1}{2}Z_0)$

$$(19) \quad \varepsilon \Phi_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0) = \frac{1}{8}(\alpha + 2)V_{1m}(\xi_1 - \xi_p)\Omega_{p,l}(\xi_1) + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu);$$

$$(20) \quad \theta_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0) = -\frac{1}{2}|\xi_*| [H(\xi_1 - \xi_p) - H(\xi_1 - \xi_p - \Delta_p)] + \\ + \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_p)\Omega_{s,k}(\xi_1) + \frac{1}{2}|\xi_*|\Omega_{e,k}(\xi_1) - \\ - \frac{1}{2}(\xi_n - \xi_s)\Omega_{n,b}(\xi_1) - \frac{1}{2}(\xi_k - \xi_s)\Omega_{b,l}(\xi_1).$$

Здесь $\xi_a = \frac{1}{2}(\xi_k + \xi_s)$; $\xi_v = \xi_n + \xi_k - \xi_s$; значения $|\xi_*|$, ξ_p , ξ_s , ξ_k , ξ_n отвечают $z = \frac{1}{2}Z_0$; $V_1(\xi_p - 0) = V_*$; параметр $0 < \Delta_p \ll 1$ соответствует конечной ширине фронта пластической ударной волны, так что $V_1(\xi_p + \Delta_p) = 2V_*$, $V_1(\xi_p + \Delta_p + 0) = V_{lm}$ при $\Delta_p \rightarrow 0$. В (19) оценка точности для Φ_1 (19) отвечает $Z_0 \sim O(1)$; выражение для фазовой функции θ_1 , описывающее «тонкую» структуру взаимодействия вследствие упругопластичности, применимо до $Z_0 \sim O[\min(\varepsilon^{-1}, \nu^{-1})]$.

С помощью замены независимой фазовой переменной $\xi_1 = \xi_1 - \nu\theta_1$, где $\xi_1 = t' - z$, из решения $V_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0)$ (18) путем его неоднородной деформации в соответствии с (20) получим решение $\bar{V}_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0)$, в котором учтен эффект самовоздействия только вследствие упругопластичности:

$$(2.1) \quad \bar{V}_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0) = V_*[\Omega_{e,p}(\xi_1) + \Omega_{ee,p}(\xi_1)] + V_{lm}\Omega_{p,ap}(\xi_1) - V_*\Omega_{sp,ap}(\xi_1)(\xi_1 - \xi_{sp})/(\xi_{ap} - \xi_{sp}) + (V_{lm} - V_*)\Omega_{ap,ke}(\xi_1) - V_*\Omega_{ae,ke}(\xi_1) \times (\xi_1 - \xi_{ae})/(\xi_{ke} - \xi_{ae}) + (V_{lm} - 2V_*)\Omega_{ke,bs}(\xi_1) - 2V_*\Omega_{ns,bs}(\xi_1)(\xi_1 - \xi_{ns})/(\xi_{bs} - \xi_{ns}) + (V_{lm} - 4V_*)[\Omega_{bs,tk}(\xi_1) - \Omega_{bk,tk}(\xi_1)(\xi_1 - \xi_{bk})/(\xi_{tk} - \xi_{bk})].$$

Здесь $\xi_{ee} = \xi_p - \frac{1}{2}\nu|\xi_*|$; $\xi_{sp} = \xi_s + \frac{1}{2}\nu(\xi_s - \xi_p)$; $\xi_{ap} = \xi_a + \frac{1}{2}\nu(\xi_a - \xi_p)$; $\xi_{ae} = \xi_a + \frac{1}{2}\nu(\xi_a - \xi_e)$; $\xi_{ke} = \xi_k + \frac{1}{2}\nu(\xi_k - \xi_e)$; $\xi_{ns} = \xi_n - \frac{1}{2}\nu(\xi_n - \xi_s)$; $\xi_{bs} = \xi_b - \frac{1}{2}\nu(\xi_n - \xi_s)$; $\xi_{tk} = \xi_b - \frac{1}{2}\nu(\xi_k - \xi_s)$; $\xi_{tk} = 1 - \frac{1}{2}\nu(\xi_k - \xi_s)$.

Решение \bar{V}_1 (21) (сплошная линия) на рис. 2 сравнивается с решением $V_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0)$ (18) (штриховая), не учитывающим эффект самовоздействия ($\theta_1 = \Phi_1 = 0$). Видно, что самовоздействие вследствие упругопластичной кинетики деформирования ($\nu \neq 0$) качественно влияет на профиль скорости свободной поверхности: упругий предвестник приобретает двухступенчатый вид, а ступенька упругой разгрузки в значительной мере сглаживается и меняет свою форму. Появление второй ступеньки предвестника, как и ступеньки в упругой разгрузке при $V_1 = V_{lm} - V_*$, обусловлено взаимодействием с отраженным предвестником. Длительность этих ступенек для толщин преграды $Z_0 \sim O[\min(\varepsilon^{-1}, \nu^{-1})]$ приблизительно

одинакова и равна $\frac{1}{2}\nu|\xi_*| + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu)$. Учет фазовой функции $\Phi_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0)$ (19) в фазовой переменной приводит к монотонному растяжению профиля \bar{V}_1 при $\xi_1 > \xi_n$, что не изменяет качественного характера различия между \bar{V}_1 и V_1 (рис. 2) на свободной поверхности. Появление двухступенчатого предвестника в профиле скорости

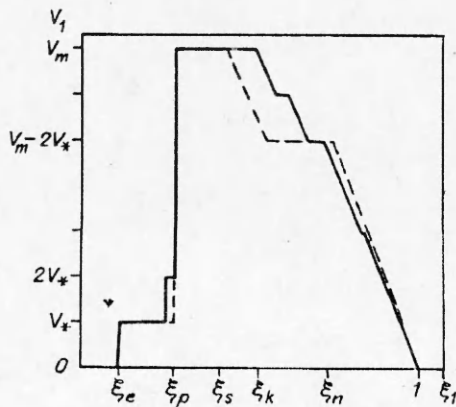


Рис. 2

свободной поверхности обнаруживается при численном расчете по точной системе уравнений (типа (1)) и упругопластической модели для бериллия [10, рис. 7], тантала [17, рис. 7]. В последнем случае расчеты по точной системе подтверждают также наличие ступеньки в упругой разгрузке при $V_1 = V_{1m} - V_*$ (рис. 2). Количественное сравнение здесь также дает хорошее совпадение.

Для полноты выпишем решение для «грубой» структуры самовоздействия ударной волны, падающей на свободную поверхность, что отвечает $Z_0 \sim O(1)$. Из (19), (20), удерживая в $\nu\theta_1$ только линейные по малым параметрам члены, получим

$$(22) \quad \xi_1 = (l' - z) \left[1 - \frac{1}{8}(\alpha + 2)V_{1m}\Omega_{p,i}(\xi_1) - \frac{1}{2}\nu\Omega_{c,k}(\xi_1) \right] + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\nu),$$

$\xi_c < \xi_1 < \xi_f = 1$; $\xi_c, \xi_p, \xi_k, \xi_s$ соответствуют $z = \frac{1}{2}Z_0$. Решение $\bar{V}_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0)$ легко находится из (18), (22) в виде

$$(23) \quad \bar{V}_1(\xi_1, \frac{1}{2}Z_0) = V_*\Omega_{c,p}(\xi_1) - 2V_*\Omega_{c,h}(\xi_1)(\xi_1 - \xi_c)/(\xi_k - \xi_s) + \\ + V_{1m}\Omega_{p,n}(\xi_1) + (V_{1m} - 2V_*)[\Omega_{h,g}(\xi_1) + \Omega_{g,f}(\xi_1)(\xi_f - \xi_1)/(\xi_f - \xi_g)],$$

где $\xi_f = 1 + \frac{1}{8}(\alpha + 2)V_{1m}$; $\xi_c = \xi_s + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{8}(\alpha + 2)V_{1m}$; $\xi_h = \xi_k + \xi_c - \xi_s$; $\xi_p = \xi_n + \frac{1}{8}(\alpha + 2)V_{1m}$; ξ_n соответствует $z = \frac{1}{2}Z_0$. Видно, что в этом случае самовоздействие за счет упругопластичности уменьшает длительность ступеньки упругой разгрузки в $V_1 = V_{1m} - 2V_*$ на величину $\frac{1}{2}\nu$, наклон упругой разгрузки остается неизменным.

Появление двухступенчатого предвестника в профиле скорости свободной поверхности обнаружено в экспериментах Тейлора и Райса (армко-железо), Хопсона (карбид бора, $MgAl_2O_4$) (см. [18]). Следует отметить, что сравнение с экспериментом в области разгрузки затруднено из-за наложения более грубых эффектов разрушения. Как видно из численного моделирования точной исходной системы с поэтапным усложнением модели кинетики деформирования, проведенного в [10], учет зависимости кинетики от скорости деформации сглаживает второй предвестник, этим, по-видимому, объясняется то, что он наблюдается только в отдельных экспериментах по измерению скорости свободной (или контактной) поверхности. Разумеется, такой же результат, как показали пробные расчеты, следует из (10) с использованием релаксационного уравнения (10б), например, для среды Гилмана [19].

Очевидно, что при математической обработке экспериментов по измерению скорости свободной или контактной поверхности недостаточно линейного приближения, которым обычно пользуются. Переход к следующему порядку в теории возмущений, т.е. к уравнениям (10) — (12), позволит более точно определить динамические свойства: предел упругости, упрочнение, вязкость металла и т.д.

Согласие результатов, полученных на основе предлагаемых приближенных уравнений (9) — (12), с численными решениями точной исходной системы и экспериментом подтверждает практическую значимость этих уравнений для описания взаимодействия нелинейных волн в средах с упругопластической кинетикой деформирования.

* Расчеты выполнены О.Г. Завилейским.

Очевидно также, что система (9) — (12) может быть использована для расчета течения среды при отколе в квазиплоском приближении.

О взаимодействии нелинейных акустических волн в металлах с микропластичностью. Известно, что микропластичность приводит в металлах к аномально большой нелинейности, которая не описывается в рамках пятиконстантной теории упругости [2]. Для определенности выберем зависимость $\sigma(\varepsilon)$ в виде [20], соответствующем известной модели Гранато—Люкке [2], предполагающей отсутствие остаточных деформаций и линейный возврат:

$$(24) \quad \sigma = \bar{E}(\bar{\varepsilon} + \gamma f(\bar{\varepsilon})), \quad f(\bar{\varepsilon}) = -\text{sgn} \bar{\varepsilon} \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^2, & \bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}_i > 0, \\ \frac{1}{2} \varepsilon_m \bar{\varepsilon}, & \bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}_i < 0. \end{cases}$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ и ε_m — деформация и амплитуда деформации; \bar{E} — модуль Юнга; $c_y = (\bar{E}/\rho_0)^{1/2}$ — скорость продольной упругой волны в стержне; γ — параметр, характеризующий нелинейность, обусловленную микропластичностью. Рассматриваем тонкий стержень ($\sigma = \sigma_{11}, \bar{\varepsilon} = \varepsilon_{11}$), причем $\gamma \gg \frac{1}{2}(\alpha + 2)$. Характерные значения $\gamma \approx 10^3$, $\alpha \approx O(1)$, $\bar{\varepsilon} \approx 10^{-6}$.

В этом случае процедура факторизации (1), (24) приводит к приближенной системе

$$(25) \quad \frac{\partial V_i}{\partial x'} + \lambda_i^{-1} \gamma \frac{\partial f(V_i)}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2} \mu \lambda_i^{-1} \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi_i^2},$$

$$\varepsilon \frac{\partial \theta_i}{\partial x'} = \gamma \left\{ \frac{\partial f(V)}{\partial V} \Big|_{V=V_1+V_2} - \frac{\partial f(V_i)}{\partial V_i} \right\}, \quad i = 1, 2,$$

где $\xi_i = t' - \lambda_i^{-1}(x' + \varepsilon \theta_i)$; $V_i = -\varepsilon_{11} + \lambda_i u_1/c_y$; $\lambda_i = \pm 1$; $x' = x_1/c_{y0}$. Так же как и (10) — (12), решение системы (25) дает равномерно пригодное приближение к решению исходной системы (1). Можно видеть, что если везде $\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}_i > 0$, то $\partial f(V)/\partial V = -\frac{1}{4} V \text{sgn}(\bar{\varepsilon})$ и θ_i совпадает с Φ_i (11) с точностью до постоянного множителя, а система (25) обращается в систему уравнений Бюргера, аналогичную [6]. Однако если имеет место разгрузка ($\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}_i < 0$), то ситуация меняется.

По аналогии с предыдущим разделом рассмотрена задача о самовоздействии плоской продольной волны при выходе ее на свободный торец стержня. На рис. 3 показан отклик свободного торца стержня длиной $\approx O(1)$, рассчитанного по (24), (25), при воздействии на другой торец прямоугольным импульсом $V_1 = V_{1m} \Omega_{pk}(\xi_1)$ (штриховая линия — решение без учета самовоздействия, сплошная — с учетом самовоздействия). Видно, что самовоздействие, вызванное микропластичностью, искажает разгрузку в профиле отклика. На рис. 3

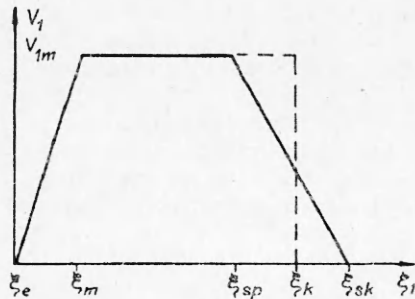


Рис. 3

$$\begin{aligned} \xi_{sk} - \xi_k &= \xi_k - \xi_{sp} = \\ &= \frac{1}{16} \gamma V_{1m} (\xi_k - \xi_e) + O(\varepsilon^2), \\ \xi_e(x') &= \xi_e(0), \quad \xi_k(x') = \\ &= \xi_k(0) + \frac{1}{8} \gamma V_{1m} x', \quad \xi_m(x) = \\ &= \frac{1}{4} \gamma V_{1m} x' + \xi_e(0). \end{aligned}$$

Уравнения (25), очевидно, могут быть использованы для изучения квазиакустического резонанса в стержне.

Приложение. Факторизация системы (1), (3). Разложим σ_{ij} , u_i , ρ , ε_{ij} в ряд по малым параметрам ε , ν , μ , ε_1 . Принимая во внимание оценки, сделанные во 2-м и 4-м разделах в низшем порядке по ε , из (1), (3) получим

$$(П.1) \quad \frac{\partial}{\partial t'} \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ u'_1 \end{pmatrix} + A \frac{\partial}{\partial x'_1} \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ u'_1 \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицы T и R , состоящие из левых и правых собственных векторов матрицы A , тогда $T_{ik}A_{kl}R_{lj} = \lambda_i \delta_{ij}$, $T_{ik}R_{kj} = \delta_{ij}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_i = (-1)^{i-1}$, $i = 1, 2$. Введем новые переменные $V = T \begin{pmatrix} -\sigma_{11} \\ u'_1 \end{pmatrix}$, ξ_j из (9), $dz = (1 + \rho')dx'$. Разлагаем V и u'_i в ряд

$$(П.2) \quad V_i = \varepsilon V_{0i} + \varepsilon^2 V_{1i}^{(\varepsilon)} + \varepsilon \nu V_{1i}^{(\nu)} + \varepsilon \mu V_{1i}^{(\mu)} + \varepsilon \varepsilon_1 V_{1i}^{(\varepsilon_1)} + \dots, \quad u'_i = \varepsilon \varepsilon_1^{1/2} \omega_i + \dots, \\ i = 1, 2, \quad l = 2, 3.$$

Ясно из (П.1), что V_{0i} постоянна вдоль $\xi_i = \text{const}$. В следующем порядке в соответствии с техникой многомасштабных разложений требуем

$$(П.3) \quad V_{0i} = V_{0i}(\xi_i, z_\varepsilon, z_\nu, z_\mu, z_{\varepsilon_1}, x'_{1\varepsilon}), \\ V_{1i} = V_{1i}(\xi_i, \xi_j, z_\varepsilon, z_\nu, z_\mu, z_{\varepsilon_1}, x'_{1\varepsilon}),$$

где $z_\varepsilon = \varepsilon z$; $z_\nu = \nu z$; $z_\mu = \mu z$; $z_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 z$; $x'_{1\varepsilon} = \varepsilon_1^{1/2} x'_1$; $l = 2, 3$. Тогда для следующих членов разложения имеем

$$(П.4) \quad \sum_{j \neq i} (1 - \lambda_i/\lambda_j) \frac{\partial V_{1i}^{(\varepsilon)}}{\partial \xi_j} - \sum_{j \neq i} (\alpha + 2) \sum_m V_{0m} \frac{\partial V_{0j}}{\partial \xi_j} + \left\{ \lambda_i \frac{\partial V_{0i}}{\partial z_\varepsilon} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (\alpha + 2) V_{0i} \frac{\partial V_{0i}}{\partial \xi_i} \right\} - \sum_{j \neq i} \left[\lambda_i^{-1} (1 - \lambda_i/\lambda_j) \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi_j} + \frac{1}{4} (\alpha + 2) V_{0i} \right] \frac{\partial V_{0i}}{\partial \xi_i} = 0;$$

$$(П.5) \quad \sum_{j \neq i} (1 - \lambda_i/\lambda_j) \frac{\partial V_{1i}^{(\nu)}}{\partial \xi_j} - 3 \frac{\partial \psi(V)}{\partial V} \frac{\partial V_{0i}}{\partial \xi_j} + \left\{ \lambda_i \frac{\partial V_{0i}}{\partial z_\nu} - 3 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_i} \right\} - \\ - \sum_{j \neq i} \left[\lambda_i^{-1} (1 - \lambda_i/\lambda_j) \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_j} + 3 \left(\frac{\partial \psi(V)}{\partial V} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_i} \right) \right] \frac{\partial V_{0i}}{\partial \xi_i} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j, m = 1, 2;$$

$$(П.6) \quad \sum_{j \neq i} (1 - \lambda_i/\lambda_j) \frac{\partial V_{1i}^{(\mu)}}{\partial \xi_j} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{\mu} \frac{\partial^2 V_{0i}}{\partial \xi_j^2} + \left\{ \lambda_i \frac{\partial V_{0i}}{\partial z_\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{0i}}{\partial \xi_i^2} \right\} = 0,$$

где $\mu_{ik} = \mu_i (-1)^{i+k} + \pi \mu_2$; $\mu = \mu_{ii}$, μ_{12} — безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности; π — параметр материала;

$$(П.7) \quad \sum_m \frac{\partial}{\partial \xi_m} \sum_{j \neq i} (1 - \lambda_i/\lambda_j) \frac{\partial V_{1i}^{(\varepsilon_1)}}{\partial \xi_j} + \left\{ \lambda_i \frac{\partial^2 V_{0i}}{\partial \xi_i \partial z_{\varepsilon_1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{2\varepsilon_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{3\varepsilon_1}^2} \right) V_{0i} \right\} - \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{2\varepsilon_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{3\varepsilon_1}^2} \right) V_{0i} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j, m = 1, 2.$$

Потребуем, чтобы фазовые функции Φ_i , θ_i в (П.4), (П.5) удовлетворяли уравнениям (11), (12) с учетом $\partial/\partial \xi_j = [\lambda_i/(1 - \lambda_i/\lambda_j)] \partial/\partial z$. Тогда легко

видеть, что выражения в фигурных скобках (П.4)—(П.7) при интегрировании по ξ_j ($j \neq i$) порождают секулярные члены в V_{0i} . Для устранения секулярных членов приравняем эти выражения к нулю. Тогда, принимая во внимание (П.2) и разложение

$$\frac{\partial V_{0i}}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial V_{0i}}{\partial z_\epsilon} + \nu \frac{\partial V_{0i}}{\partial z_\nu} + \mu \frac{\partial V_{0i}}{\partial z_\mu} + \epsilon_i \frac{\partial V_{0i}}{\partial z_{\epsilon_1}},$$

получим уравнения (10а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматгиз, 1963.
2. Ультразвуковые методы исследования дислокаций // Сб. пер. / Под ред. Л.Г. Меркулова. — М.: ИЛ, 1963.
3. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. — М.: Наука, 1987.
4. Уизем Дж. Линеиные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
5. Лейбович С., Сибасс А. Примеры диссипативных и диспергирующих систем // Нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
6. Tatsumi T., Tokunaga H. One-dimensional shock turbulence in a compressible fluid // J. Fluid Mech. — 1974. — V. 65. — P. 581—601.
7. Канер В.В., Руденко О.В., Хохлов Р.В. К теории нелинейных колебаний в акустических резонаторах // Акуст. журн. — 1977. — Т. 23, № 5.
8. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К. Нелинейные волны деформации. — М.: Наука, 1981.
9. Канель Г.И., Фортон В.Е. Механические свойства конденсированных сред при интенсивных импульсных воздействиях // Усп. механики. — 1987. — Т. 10, № 3. — С. 3—81.
10. Steinberg D.J., Sharp R.W. Interpretation of shock-wave data for beryllium and uranium with an elastic-viscoplastic constitutive model // J.Appl.Phys. — 1981. — V. 52. — P. 5072—5083.
11. Asay J.R., Chhabildas L.C., Dandekar D. Shear strength of shock-loaded polycrystalline tungsten // J.Appl.Phys. — 1980. — V. 51. — P. 4774—4783.
12. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1978; Годунов С.К., Роменский Е.И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. — 1972. — № 6. — С. 124—144.
13. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. — М.: Наука, 1982.
14. Steinberg D.J., Cohran S.G., Guinan M.W. A constitutive model for metals applicable at high-strain rate // J.Appl.Phys. — 1980. — V. 51. — P. 1498—1504.
15. Малкин А.И., Мягков Н.Н. О нелинейных волнах в максвелловской среде // ПМТФ. — 1986. — № 5. — С. 158—163.
16. Asay J.R., Chhabildas L.C. Determination of the shear strength of shock compressed 6061—T6 Al // Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena in Metals/Ed. M. Meyer, L. Murr. — N.Y., 1981.
17. Steinberg D.J., Lund C.M. A constitutive model for strain rates from 10^{-4} to 10^6 s⁻¹ // J.Appl. Phys. — 1989. — V. 65. — P. 1528—1533.
18. Los Alamos Shock Wave Profile Data / Ed. C.E. Morris. — Berkeley: Univ. Calif., 1982.
19. Gilman J.J. Dislocation dynamics and the response of materials to impact // Appl. Mech. Rev. — 1968. — V. 21. — P. 767—787.
20. Назаров В.Е., Островский Л.А., Соустова И.А., Сутин Л.М. Исследование аномальной акустической нелинейности в металлах // Проблемы нелинейной акустики: Сб. тр. симпозиума IUPAP-IUTAM по нелинейной акустике. — Новосибирск, 1987. — Ч. 1. — С. 219—223.

г. Москва

Поступила 25/XII 1992 г.