ПМТФ, № 1, 1974

УДК 539.374

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧНОСТИ

В. И. Одиноков

(Свердловск)

Описан приближенный метод решения вариационного уравнения, построенного на основе принципа возможного изменения деформированного состояния при наличии уравнения связи между деформациями (скоростями деформаций). Из решения данного вариационного уравнения определяется напряженно-деформированное состояние.

Метод демонстрируется на примере решения задачи по осадке полосы прямоугольного сечения на плоскопараллельных плитах.

1. Требуется определить поля скоростей v_i и напряжений σ_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ из решения вариационного уравнения, построенного на основе принципа возможного изменения в точках тела скоростей перемещений δv_i

$$\int \sigma_{ij}\delta\xi_{ij}dV - \int X_i\delta v_i dS = 0 \tag{1.1}$$

при наличии уравнения связи

$$\xi = \xi_{ij}\delta_{ij} = 0 \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.2}$$
$$\xi_{ij} = {}^1/_2\,(v_{i,j} + v_{i,j})$$

и уравнений состояния

$$\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij} + 2\lambda\xi_{ij} \tag{1.3}$$
$$\lambda = T\,/\,H, \quad T = Hg\,(H), \quad H = (2\xi_{ij}{}^*\xi_{ij}{}^*)^{1/2},$$
$$\xi_{ij}{}^* = \xi_{ij} - {}^1/_3\xi\delta_{ij}$$

где σ — гидростатическое давление, X_i — составляющие поверхностной силы на поверхности S, $v_{i,j} = \partial v_i\,/\,\partial x_j$. В формулах имеет место суммирование по повторяющимся индексам i, j.

С учетом (1.3) и (1.2) вариационное уравнение (1.1) в предположении, что границы деформируемой области заданы, имеет вид

$$\delta\,\{\int[\int TdH]dV - \int X_i\,v_i\,dS\} = 0 \tag{1.4}$$

Решением вариационного уравнения (1.4) является минимум функционала

$$J = \int[\int TdH]dV - \int X_i v_i dS = \min \tag{1.5}$$

при наличии уравнения (1.2).

Дополним функционал (1.5) до полного

$$J^* = J + \int \sigma\xi dV \tag{1.6}$$

где σ — множитель Лагранжа. По физическому смыслу σ в (1.6) является гидростатическим давлением [1, 2].

Запишем первую вариацию функционала (1.6)

$$\delta J^* = \int [2\lambda\xi_{ij}{}^*\delta\xi_{ij}{}^* + (\sigma\delta\xi_{ij} + \xi_{ij}\delta\sigma)]\, dV - \int X_i \delta v_i dS = 0 \tag{1.7}$$

Для решения вариационного уравнения (1.7) применим метод Ритца. Будем искать приближенное решение в виде

$$v_i = v_{i0} + \sum_{m=1} c_{im} v_{im}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.8}$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{k=1} a_k \sigma_k \tag{1.9}$$

Здесь v_{i0} — функции, удовлетворяющие заданным условиям на поверхности S; σ_0 — функция, удовлетворяющая заданным условиям по σ_{ii} на поверхности S; v_{im}, $m = 1, (1), n$; σ_k, $k = 1, (1), t$ — последовательность координатных функций, удовлетворяющих нулевым условиям на S; c_{im}, a_k — коэффициенты Ритца.

С учетом (1.8), (1.9) перепишем (1.7) в виде

$$\delta J^* = \int \{2\lambda\xi_{ij}{}^* (\xi_{ij}{}^*),_{c_{pm}} \delta c_{pm} + [\sigma (\xi_{ij}),_{c_{pm}} \delta c_{pm}]\, \delta_{ij} + \\ + [\xi_{ij}\sigma,_{a_k} \delta a_k]\, \delta_{ij}\}\, dV - \int X_i v_{i,c_{pm}} \delta c_{pm} dS = 0, \quad p = 1, 2, 3 \tag{1.10}$$

В (1.10) суммирование проводится по индексам i, j; приняты, как и в (1.2), обозначения частных производных $(\xi_{ij}),_{c_{pm}} = \partial\xi_{ij}/\partial c_{pm}$ и т. д.

Группируя члены при одинаковых вариациях δc_{pm} и δa_k, получим уравнения

$$\int [2\lambda\xi_{ij}{}^* (\xi_{ij}{}^*),_{c_{pm}} + \sigma (\xi_{ij}),_{c_{pm}} \delta_{ij}]\, dV - \int X_i v_{i,c_{pm}} dS = 0 \tag{1.11}$$

$$\int \xi_{ij}\sigma,_{a_k} \delta_{ij} dV = 0 \tag{1.12}$$

Из уравнения (1.12) следует, что $\xi = 0$.

Используем $\xi = 0$ для упрощения (1.11) и для получения системы уравнений, эквивалентной (1.12). Для этого приравняем в уравнении $\xi = 0$ коэффициенты при одинаковых функциях. Получим l уравнений. Имеем

$$\int [2\lambda\xi_{ij} (\xi_{ij}),_{c_{pm}} + \sigma (\xi_{ij}),_{c_{pm}} \delta_{ij}]\, dV - \int X_i v_{i,c_{pm}} dS = 0 \tag{1.13}$$

$$[b_{1m}c_{1m} + b_{2\alpha}c_{2\alpha} + b_{3\beta}c_{3\beta}]\Big|_{\frac{1}{b_{1m}} v_{1m,1} = \frac{1}{b_{2\alpha}} v_{2\alpha,2} = \frac{1}{b_{3\beta}} v_{3\beta,3}} = 0 \tag{1.14}$$

где $m \in N$, $\alpha \in N$, $\beta \in N$, $N = \{0, 1, (1), n\}$.

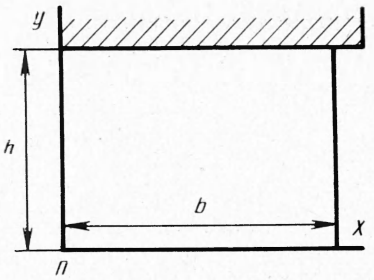
Количество t параметров a_k должно быть равно l $(t = l)$.

Решая совместно системы (1.13), (1.14), находим все независимые параметры, а следовательно, поля скоростей v_i и напряжений σ, σ_{ij}.

Если возникают трудности интегрирования функционала, можно применить модифицированный метод Ритца [3] или находить значения независимых параметров c_{im}, отыскивая численным методом минимум функционала (1.5), а затем определять параметры a_k из решения системы (1.13). Так как число параметров c_{pm} больше числа параметров a_k, возникает возможность выбора параметров c_{pm}, дифференцирование по которым приводит к более простым уравнениям.

Поле напряжений можно получить, не прибегая к уравнениям равновесия, которые вытекают из (1.1), и, следовательно, будут выполняться тем точнее, чем точнее описывается поле скоростей. На точность вычисления нормальных напряжений по скоростям перемещений при использовании уравнений равновесия большое влияние оказывает полнота описания граничных условий по касательным напряжениям, что не всегда просто осуществить. Вследствие этого вычисленные по уравнениям равновесия поля напряжений часто далеко не совпадают качественно с истинными значениями. Предложенный выше метод позволяет получать напряжения с такой же точностью, с какой определяется поле скоростей.

Описанный прием можно без значительных изменений применить для определения напряженно-деформированного состояния из решения вариационного уравнения, построенного на принципе возможного изменения напряженного состояния. В этом случае множители Лагранжа при уравнениях равновесия имеют физический смысл скоростей перемещений [2].



Фиг. 1

2. Применим изложенный метод к задаче при осадке полосы прямоугольного сечения на плоскопараллельных плитах с шероховатыми поверхностями.

Будем полагать полосу настолько длинной, чтобы задачу можно было решать в плоском варианте.

Учитывая симметрию, рассмотрим четверть очага деформации (фиг. 1).

Примем, что на поверхности контакта действует постоянное напряжение трения τ, которое в соответствии с фиг. 1 равно

$$\tau = -\psi\tau_S \tag{2.1}$$

где τ_S — предел текучести на сдвиг, ψ — коэффициент трения.

Задачу решаем в скоростях, рассматривая момент деформации. Деформируемый материал примем несжимаемым.

Для рассматриваемого случая справедливы вариационное уравнение (1.1) и уравнение связи (1.2).

Положим, что деформируемый материал обладает свойствами линейно-вязкой среды

$$T = \mu H$$

При решении задачи необходимо удовлетворить граничные условия

$$v_x\Big|_{x=0} = 0, \quad v_y\Big|_{y=0} = 0, \quad v_y\Big|_{y=h} = -v_u, \quad \sigma_x\Big|_{x=b} = 0 \tag{2.2}$$

где v_u — скорость перемещения инструмента, и условия симметрии течения.

Для простоты решения не будем выполнять некоторые граничные условия по σ_{xy}. Запишем подходящие функции для скоростей v_x, v_y в виде [4]

$$\begin{aligned} v_x &= c_0\frac{x}{b} + c_1\frac{x}{b}\left(1 - 3\frac{y^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{b^2}\right), \\ v_y &= -\left[v_u\frac{y}{h} + c_2\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

По (2.3) найдем скорости деформации

$$\begin{aligned} \xi_x &= c_0\frac{1}{b} + c_1\frac{1}{b}\left(1 - 3\frac{y^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right), \\ \xi_y &= -\left[\frac{v_u}{h} + \frac{c_2}{h}\left(1 - 3\frac{y^2}{h^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\xi_{xy} = -\frac{6c_1xy}{bh^2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{b^2}\right) + \frac{2c_2xy}{hb^2}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

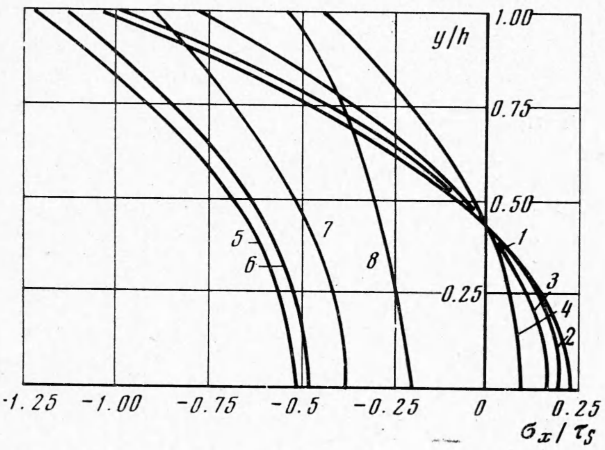
Из условия $\xi = 0$ следует, что система (1.14) должна состоять из двух уравнений. В ряд σ должны войти два неизвестных параметра a_k, $k = 1, 2$

$$\sigma = \sigma_0 + a_1(1 - x^2 / b^2) + a_2(1 - y^2 / h^2)(1 - x^2 / b^2) \tag{2.5}$$

Параметр σ_0 найдем из условия $\sigma_x|_{x=b} = 0$

$$\sigma_0 = -2\mu b^{-1}c_0 \tag{2.6}$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в (1.13) и учитывая, что $\lambda = \mu$, получим после



Фиг. 2

дифференцирования по параметрам c_0, c_1, c_2 и интегрирования систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} 2\mu c_0h / b + \sigma_0h + 0.666ha_1 + 0.444ha_2 + 0.5\psi\tau_Sb = 0 \\ 2\mu(0.426hb^{-1}c_1 + 1.29bh^{-1}c_1 - 0.212c_2) + 0.142ha_2 - 0.833b\psi\tau_S = 0 \\ 2\mu(0.426bh^{-1}c_2 + 0.0507hb^{-1}c_2 - 0.212c_1) - 0.142ba_2 = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

Система уравнений (1.14) имеет вид

$$c_01 / b - v_u / h = 0, \quad c_1 / b - c_2 / h = 0 \tag{2.8}$$

Решая совместно систему уравнений (2.6)—(2.8), получим

$$c_0 = v_ub / h$$

$$c_1 = v_u 0.416\psi\frac{b}{h}\left[\frac{2\mu v_u}{h\tau_S}\left(0.213\frac{h}{b} + 0.648\frac{b}{h} + 0.0253\frac{h^2}{b^3}\right)\right]^{-1}$$

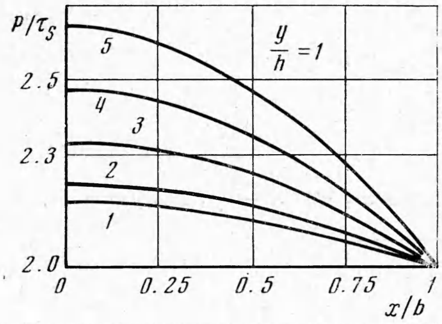
$$c_2 = c_1h/b$$

$$a_1 = \tau_S\left[\frac{2\mu c_1}{h\tau_S}\left(\frac{h}{b} + 6.04\frac{b}{h}\right) - 4.65\psi\frac{b}{h}\right],$$

$$a_2 = \tau_S\left[5.86\psi\frac{b}{h} - \frac{2\mu c_1}{\tau_Sh}\left(1.51\frac{h}{b} + 9.08\frac{b}{h}\right)\right]$$

На фиг. 2, 3 приведены некоторые эпюры распределения напряжений и удельных давлений P в очаге деформации при $\psi = 0.5$, $2\mu v_u / h\tau_S = 1$.

Так, на фиг. 2 приведены эпюры распределения σ_x / τ_S по высоте очага деформации в сечениях $x / b = 0, 0.25, 0.5, 0.75$. Цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены кривые, соответствующие вышеприведенным сечениям x / b при $b / h = 0.5$. Цифрами *5*, *6*, *7*, *8* обозначены кривые, соответствующие тем же сечениям x / b при $b / h = 2$. На фиг. 3 приведены кривые удельных давлений P / τ_S на поверхности контакта металла с инструментом. Цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5* обозначены кривые удельных давлений при соответствующих критериях b / h ($b / h = 1.0$, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0).



Фиг. 3

Приведенные эпюры показывают качественное совпадение с имеющимися решениями и экспериментальными данными по осадке несжимаемых материалов, несмотря на невыполнения некоторых граничных условий по σ_{xy}.

Поступила 10 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марков А. А.* О вариационных принципах в теории пластичности. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
2. *Колмогоров В. Л.* Принцип возможных изменений напряженного и деформированного состояний. Инж. ж. МТТ, 1967, № 2.
3. *Качанов Л. М.* О вариационных методах решения задач теории пластичности. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
4. *Тарновский И. Я., Поздеев А. А., Ганаго О. А., Колмогоров В. Л., Трубин В. Н., Вайсбурд Р. А., Тарновский В. И.* Теория обработки металлов давлением. М., Гостехиздат, 1963.