11. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. ИИЛ, 1955.
12. Хилл Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.
13. Жуков А. М. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении. Инж. сб., 1949, т. V, вып. 2.
14. Онат Е., Прагер В. Об образовании шейки в плоском образце при растяжении. Сб. переводов, Механика, 1955, № 4.
15. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, 1948.
16. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр., т. I, Изд-во АН СССР, 1951.
17. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. VI, № 2.

О ВРЕМЕНИ ДО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. С. Наместников

(Новосибирск)

В работе Л. М. Качанова [1] было определено время до разрушения цилиндрического образца при ползучести под постоянной нагрузкой P путем введения гипотезы охрупчивания (или повреждаемости)

$$\frac{d\psi}{dt} = -A\left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi}\right)^n \qquad (1 \geqslant \psi \geqslant 0) \tag{1}$$

и применения теории установившейся ползучести

$$\dot{p} = \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = B_1\sigma^m \tag{2}$$

в предположении несжимаемости материала

$$\sigma = \sigma_0 \exp p, \qquad \sigma = \frac{P}{F}, \qquad \sigma_0 = \frac{P}{F_0}, \qquad p = \ln\frac{l}{l_0} \tag{3}$$

Здесь F, l — текущие значения площади поперечного сечения и длины образца соответственно; A, m, n и B_1— постоянные материала при данной температуре.

В работе Хоффа [2] дана другая постановка задачи. Время до разрушения цилиндрического образца определялось из соотношений (2) и (3) при предположении, что в момент разрушения площадь поперечного сечения образца обращается в нуль (так называемое «вязкое разрушение»).

В обеих работах применяется теория установившейся ползучести на том основании, что основное время жизни образца составляет вторая стадия ползучести. Это утверждение справедливо только для низкого уровня напряжений. При более же высоком уровне напряжений основную часть жизни образца будет составлять первая стадия ползучести, а поэтому для определения времени разрушения при ползучести следует применять теорию неустановившейся ползучести. С этой точки зрения, концепция Л. М. Качанова имеет больше логических оснований, чем концепция Хоффа, так как при тех нагрузках, при которых применение этих концепций справедливо, основной вид разрушения будет, по-видимому, составлять хрупкое разрушение. Заметим, что концепция Л. М. Качанова обладает, к сожалению, досадным недостатком, заключающимся в том, что для определения констант гипотезы охрупчивания [1] необходимо располагать данными, содержащими весьма большие времена разрушения.

Определим время до разрушения, применяя теорию неустановившейся ползучести. Для этого рассмотрим гипотезу упрочнения в двух вариантах

$$\dot{p}p^\alpha = \varkappa\sigma^q \tag{4}$$

$$\dot{p}p^\alpha = k\exp\frac{\sigma}{\lambda} \tag{5}$$

Здесь α, $\varkappa$, k, q и λ — постоянные материала при данной температуре и σ — истинное напряжение. Из (3) и (4) имеем

$$\dot{p}p^\alpha = \varkappa\sigma_0{}^q \exp qp$$

Переменные разделяются

$$dpp^{\alpha} \exp(-qp) = \varkappa \sigma_0{}^q \, dt$$

Отсюда, интегрируя, находим время вязкого разрушения

$$t_1 = \frac{1}{\varkappa \sigma_0{}^q} \int_0^{\infty} p^{\alpha} \exp(-qp)\, dp \qquad (p \to \infty \text{ при } F \to 0) \tag{6}$$

При целых α интеграл можно вычислить

$$t_1 = \frac{\alpha!}{q^{\alpha+1} \varkappa \sigma_0{}^q} \tag{7}$$

Проводя аналогичные выкладки с (3) и (5), получим

$$t_1 = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} p^{\alpha} \exp\left(-\frac{\sigma_0}{\lambda} \exp p\right) dp \tag{8}$$

Принимая гипотезу охрупчивания, следует рассматривать соотношения (1), (3) и (4), интегрируя которые при целых α, получаем

$$t_* = \frac{\varphi(q, p_*)}{\sigma_0{}^q} \tag{9}$$

$$\frac{\sigma_0{}^{q-n}}{A(n+1)} = \varphi(q-n, p_*) \tag{10}$$

где

$$\varkappa\varphi(q, p_*) = \int_0^{p_*} p^{\alpha} \exp(-qp)\, dp = \frac{\alpha!}{q^{\alpha+1}} -$$

$$- \exp(-qp_*) \left(\frac{p_*^{\alpha}}{q} + \frac{\alpha p_*^{\alpha-1}}{q^2} + \cdots + \frac{\alpha!}{q^{\alpha+1}} \right) \tag{11}$$

Из соотношения (10) находим деформацию в момент разрушения p_* и затем из (9) — время до разрушения t_*.

Рассматривая (1), (3) и (5), получим

$$t_* = \frac{1}{k} \int_0^{p_*} p^{\alpha} \exp\left(-\frac{\sigma_0}{\lambda} \exp p\right) dp \tag{12}$$

$$\frac{k}{A(n+1)\sigma_0{}^n} = \int_0^{p_*} p^{\alpha} \exp\left(np - \frac{\sigma_0}{\lambda} \exp p\right) dp \tag{13}$$

Интегралы в правых частях определяются численными методами.

Для кривых длительной прочности выполняется условие $q > n$ [1]. Из (9) и (10) получаем

$$t_* = [\varphi(q-n, p_*)]^{\frac{q}{n-q}} [A(n+1)]^{\frac{q}{n-q}} \varphi(q, p_*) \tag{14}$$

Из (11) вытекает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_*} > 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} < 0, \qquad \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial \varphi}{\partial p_*} < 0, \qquad \frac{q}{q-n} > 1$$

Отсюда следует, что с ростом величины деформации P_* функция $\varphi(q, p_*)$ в (14) растет медленнее, чем уменьшаются два первых сомножителя; следовательно, с ростом p_* время до разрушения t_* уменьшается, что соответствует физической картине разрушения.

Из (9) и (10) нетрудно получить также, что $t_* \leqslant t_1$ и $t_* \leqslant t'$, где время хрупкого разрушения

$$t' = [A(n+1)\sigma_0^n]^{-1}$$

Наконец, из равенства (10) получаем условие

$$\sigma_0 \leqslant \sigma_0^* = \left[\frac{A(n+1)\alpha!}{\varkappa (q-n)^{\alpha+1}} \right]^{\frac{1}{q-n}} \tag{15}$$

Значение $\alpha = 0$ соответствует случаю, рассмотренному Л. М. Качановым в работе [1]; из неравенства (15) вытекает соответствующее им полученное неравенство.

Все вышеприведенные рассуждения относились к тому случаю, когда приложенная нагрузка постоянна. Предположим, что нагрузка каким-либо образом меняется во времени. Тогда в выражении (3) следует считать

$$\sigma_0 = \sigma_0(t) \tag{16}$$

где $\sigma_0(t)$ — известная функция времени.

Интегрируя (2), (3) и (16), получим для определения времени вязкого разрушения t_1 соотношение

$$B_1 m \int_0^{t_1} \sigma_0^m(t)\, dt = 1 \tag{17}$$

Интегрируя (1) — (3) и (16), получим для определения времени разрушения с охрупчиванием t_* соотношение

$$A(n+1)\int_0^{t_*} dt\, \sigma_0^n(t)\left[1 - mB_1 \int_0^t \sigma_0^m(\tau)\, d\tau\right]^{-\frac{n}{m}} = 1 \tag{18}$$

Подынтегральные выражения правых частей (17) и (18) — известные функции времени. Если нагрузка постоянна, то из (17) и (18) легко получаются соотвественно выражения (2.4) и (2.7) из работы Л. М. Качанова [1], определяющие время до разрушения при постоянных нагрузках.

Рассматривая гипотезу упрочнения, из (3), (4) и (16) получим соотношение, определяющее время вязкого разрушения при переменной нагрузке

$$\varkappa \int_0^{t_1} \sigma_0^q(t)\, dt = \frac{\alpha!}{q^{\alpha+1}} \qquad (\alpha \text{ — целое}) \tag{19}$$

Из (3), (4) и (16) имеем

$$\int_0^p p^\alpha \exp(-qp)\, dp = \varkappa \int_0^t \sigma_0^q(t)\, dt$$

Отсюда можно определить

$$p = p(t) \tag{20}$$

а из (1), (3), (16) и (20) получается выражение

$$A(n+1) = \int_0^{t_*} \sigma_0^n(t) \exp[np(t)]\, dt \tag{21}$$

определяющее время разрушения с охрупчиванием t_*.

Если напряжение колеблется около некоторого среднего значения σ_0 по закону

$$\sigma_0(t) = \sigma_0(1 + \gamma \sin \omega t), \qquad \gamma \leqslant 1/q \tag{22}$$

то, подставляя (22) в (19), разлагая подынтегральное выражение в ряд и учитывая два члена разложения, после интегрирования получим

$$\frac{\alpha!}{\varkappa q^{\alpha+1}} = \sigma_0^q \left[t_1 + \frac{q\gamma}{\omega}(1 - \cos \omega t_1)\right] \tag{23}$$

Так как второе слагаемое правой части больше или равно нулю, заключаем, что время вязкого разрушения при нагрузке, колеблющейся вокруг некоторого среднего значения, не больше времени вязкого разрушения в случае постоянной нагрузки, равной этому среднему значению.

В заключение отметим, что по схеме Хоффа ползучесть при простом кручении не приводит к разрушению тонкостенную трубу, а по схеме Л. М. Качанова разрушение в этом случае может быть только хрупким. В действительности же разрушение при кручении не обязательно хрупкое. От этого недостатка можно избавиться, если считать, что параметр повреждаемости зависит от инварианта тензора деформаций, например второго.

Поступила 11 I 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
2. Hoff N. I. The neckin and the rupture of rods subjected to constante tensile loads. J. Appl. Mech., 1953, Vol. 20, No. 1.