УДК 539.3

ДАВЛЕНИЕ ШТАМПА С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

И. И. Аргатов

Государственная морская академия им. адмирала С. О. Макарова,
199026 Санкт-Петербург
E-mail: argatov@home.ru

Рассмотрена линейная контактная задача для системы малых штампов, периодически расположенных на части границы упругого полупространства. На основе теории усреднения Марченко — Хруслова выведена осредненная контактная задача. Получена асимптотическая формула для поступательной емкости гладкого штампа с плоской мелкозернистой подошвой.

Ключевые слова: дискретный контакт, осредненное контактное давление, мелкозернистая граница.

1. Постановка задачи. Пусть G — ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей; l — ее характерный размер; ω — плоская область, ограниченная гладким контуром и лежащая внутри квадрата $K = (-l/2, l/2) \times (-l/2, l/2)$. Положим

$$\omega^{ij}(\varepsilon) = \{(x_1, x_2)\colon \varepsilon^{-2}(x_1 - i\varepsilon l, x_2 - j\varepsilon l) \in \omega\} \qquad (i, j \in \mathbb{Z}), \tag{1.1}$$

где ε — малый положительный параметр. Через Γ_ε обозначим объединение всех пятен $\omega^{ij}(\varepsilon)$, содержащихся на площадке G.

В соответствии с представлением Папковича — Нейбера (см., например, [1]) контактная задача линейной теории упругости о вдавливании в упругое полупространство штампа с плоским гладким основанием, занимающим в плане множество Γ_ε, на единичную глубину сводится к следующей смешанной краевой задаче теории гармонических функций:

$$\Delta_x u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)\colon x_3 > 0\}; \tag{1.2}$$

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}', 0) = 1, \qquad \boldsymbol{x}' = (x_1, x_2) \in \Gamma_\varepsilon; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon; \tag{1.4}$$

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = o(1), \qquad |\boldsymbol{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \to \infty. \tag{1.5}$$

При этом компоненты вектора смещений $\boldsymbol{U}^\varepsilon = (U_1^\varepsilon, U_2^\varepsilon, U_3^\varepsilon)$ точек упругого полупространства выражаются через потенциал u^ε по формулам Н. М. Беляева [2]

$$U_i^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \alpha\Big[(\alpha^{-1} - 1)\int\limits_{x_3}^{\infty} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(x_1, x_2, z)\,dz - x_3\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\Big], \quad i = 1, 2; \tag{1.6}$$

$$U_3^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) - \alpha x_3\,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}), \qquad \alpha = [2(1 - \nu)]^{-1}. \tag{1.7}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий РФ (грант МД-182.2003.01).

Соответственно, контактное давление на границу упругого полубесконечного тела, передаваемое штампом Γ_ε, равно

$$p^\varepsilon(x_1, x_2) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0), \qquad \boldsymbol{x}' \in \Gamma_\varepsilon, \tag{1.8}$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Заметим, что по принципу максимума для гармонических функций (см., например, [3]) имеет место неравенство

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0) < 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in \Gamma_\varepsilon, \tag{1.9}$$

обеспечивающее положительность контактного давления (1.8).

При $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула (уточняющая формулу (1.5)):

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\varepsilon |\boldsymbol{x}|^{-1} + O(|\boldsymbol{x}|^{-2}).$$

Здесь $\boldsymbol{c}^\varepsilon = \operatorname{cap}(\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon)$ — гармоническая емкость множества $\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{x}' \in \overline{\Gamma}_\varepsilon,\ x_3 = 0\}$ (см., в частности, [4, 5]), причем

$$\boldsymbol{c}^\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0)\, d\boldsymbol{x}' = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla_x u^\varepsilon(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}. \tag{1.10}$$

Поясним, что $\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon$ — это плоское трехмерное множество, тогда как $\overline{\Gamma}_\varepsilon$ — его двумерное изображение на плоскости $x_3 = 0$.

В соответствии с электростатической аналогией [1] величина $\boldsymbol{c}^\varepsilon$ называется поступательной емкостью штампа с гладким плоским основанием Γ_ε [6]. В случае вдавливания штампа Γ_ε на глубину δ_0 величина контактной силы

$$F_3 = \iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(x_1, x_2)\, d\boldsymbol{x}' \tag{1.11}$$

согласно формулам (1.8) и (1.10) будет равна

$$F_3 = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\, \boldsymbol{c}^\varepsilon \delta_0.$$

Исследуем поведение решения $u^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ задачи (1.2)–(1.5) при $\varepsilon \to 0$, воспользовавшись теорией Марченко — Хруслова [7, 8]. Подчеркнем, что подход работ [7, 8] не требует периодичности множества Γ_ε. Однако двояко периодическое размещение пятен контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$ по площадке G упрощает некоторые расчеты и значительно не умаляет общности рассмотрений.

Ранее контактная задача для системы малых штампов, периодически плотно размещенных в пределах ограниченной площадки на поверхности упругого полупространства, изучалась в работе [9], где полагалось (ср. с (1.1))

$$\omega^{ij}(\varepsilon) = \{\boldsymbol{x}'\colon \varepsilon^{-1}(x_1 - i\varepsilon l, x_2 - j\varepsilon l) \in \omega\}, \qquad i, j \in \mathbb{Z}. \tag{1.12}$$

Другими словами, диаметры пятен контакта и расстояние между соседними штампами в работе [9] предполагались одного порядка.

В рассматриваемом случае (1.1), в отличие от работы [9], диаметры пятен контакта предполагаются малыми в сравнении с расстояниями между ними. При этом, как и в [9], при $\varepsilon \to 0$ число N пятен контакта в множестве Γ_ε оценивается так:

$$N \sim |G|/(\varepsilon^2 l^2), \tag{1.13}$$

где $|G|$ — площадь фигуры G.

Контактные задачи для конечного числа малых штампов изучались в ряде работ (см., например, [1, 10], а также обзор [11]). Решение контактной задачи (1.2)–(1.5) может быть использовано при решении некоторых контактных задач трибологии [12].

2. Осредненная задача. Распространяя функцию $u^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ на все пространство $\mathbb{R}^3$ по четности, ввиду однородного граничного условия (1.4) приходим к соотношениям

$$\Delta_x u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon; \tag{2.1}$$

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}', 0) = 1, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon. \tag{2.2}$$

В работах [7, 8] установлено, что решение $u^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ задачи (2.1), (2.2), (1.5) при $\varepsilon \to 0$ сходится к функции $u^0(\boldsymbol{x})$, которая является решением следующей задачи (см. теорему 1.4 в [8]):

$$\Delta_x u^0(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \boldsymbol{G}; \tag{2.3}$$

$$u^0(\boldsymbol{x}', 0+) = u^0(\boldsymbol{x}', 0-) = u^0(\boldsymbol{x}', 0);$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+) - \frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0-) = 4\pi c_\Gamma (u^0(\boldsymbol{x}', 0) - 1), \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G}; \tag{2.4}$$

$$u^0(\boldsymbol{x}) = o(1), \qquad |\boldsymbol{x}| \to \infty. \tag{2.5}$$

Здесь $\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{x}' \in \overline{G},\ x_3 = 0\}$. При этом вне любой фиксированной окрестности поверхности $\boldsymbol{G}$ сходимость равномерная. Для рассматриваемого периодического множества $\boldsymbol{\Gamma}_\varepsilon$ величина c_Γ определяется формулой

$$c_\Gamma = \operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega})/l^2, \tag{2.6}$$

где $\operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega})$ — гармоническая емкость множества $\boldsymbol{\omega} = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{x}' \in \overline{\omega},\ x_3 = 0\}$.

Для решения $u^0(\boldsymbol{x})$ осредненной задачи (2.3)–(2.5) выполняется условие четности по переменной x_3, т. е. $u^0(\boldsymbol{x}', x_3) = u^0(\boldsymbol{x}', -x_3)$, поскольку соотношения (2.3)–(2.5) инвариантны при замене x_3 на $-x_3$. Тем самым исчезающая на бесконечности функция $u^0(\boldsymbol{x})$, гармоническая в полупространстве $\mathbb{R}^3_+$, на его границе удовлетворяет соотношениям

$$-\frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+) = 2\pi c_\Gamma (1 - u^0(\boldsymbol{x}', 0)), \qquad \boldsymbol{x}' \in G; \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+) = 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}.$$

Справедлива асимптотическая формула

$$u^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^0 |\boldsymbol{x}|^{-1} + O(|\boldsymbol{x}|^{-2}), \qquad |\boldsymbol{x}| \to \infty.$$

Для постоянной $\boldsymbol{c}^0$ имеет место представление

$$\boldsymbol{c}^0 = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_G \frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+)\, d\boldsymbol{x}'. \tag{2.8}$$

Воспользовавшись формулой Грина

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla_x u^0(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} = -\iint\limits_G u^0(\boldsymbol{x}', 0)\, \frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+)\, d\boldsymbol{x}',$$

из соотношения (2.8) выводим следующее представление:

$$\boldsymbol{c}^0 = \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla_x u^0(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_G (1 - u^0(\boldsymbol{x}', 0))\, \frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+)\, d\boldsymbol{x}'. \tag{2.9}$$

Поскольку сходимость решения $u^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ исходной задачи (1.2)–(1.5) к решению $u^0(\boldsymbol{x})$ осредненной задачи (2.3)–(2.5) при $\varepsilon \to 0$ равномерная для достаточно больших значений $|\boldsymbol{x}|$, выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{c}^\varepsilon = \boldsymbol{c}^0.$$

Отметим, что формула (2.8) может рассматриваться как результат предельного перехода в первом интеграле формулы (1.10), тогда как, очевидно, положив формально $\varepsilon = 0$ во втором интеграле формулы (1.10), нельзя получить соотношение (2.9). Заметим, что для решения задачи (1.2)–(1.5) верно равенство

$$(1 - u^\varepsilon(\boldsymbol{x}', 0))\, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+) = 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in G.$$

Это обстоятельство объясняется тем, что функция $u^\varepsilon(\boldsymbol{x})$ не сходится к функции $u^0(\boldsymbol{x})$ по энергетической норме (см. [8, с. 134]).

3. Контактное давление. Для решения задачи (1.2)–(1.5) справедливо представление в форме потенциала простого слоя (см., например, [5])

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j} \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} \frac{\varphi_\varepsilon^{ij}(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}}, \tag{3.1}$$

где суммирование распространяется по тем индексам i и j, для которых $\omega^{ij}(\varepsilon) \subset \Gamma_\varepsilon$. При этом предельное значение нормальной производной выражается формулой

$$-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+) = \varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon).$$

Значит, в силу неравенства (1.9) плотности $\varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}')$ интегралов в сумме (3.1) положительны.

С точностью до множителя $[2(1-\nu^2)]^{-1}E$ функция $\varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}')$ совпадает с плотностью $p^\varepsilon(x_1, x_2)$ контактных давлений, распределенных по пятну контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$ (см. формулу (1.8)). Соответственно, с точностью до указанного множителя величина

$$F_\varepsilon^{ij} = \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \tag{3.2}$$

определяет силу

$$P_\varepsilon^{ij} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\, F_\varepsilon^{ij}, \tag{3.3}$$

действующую на штамп $\omega^{ij}(\varepsilon)$.

Плотности $\varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}')$ согласно краевому условию (1.3) удовлетворяют системе интегральных уравнений первого рода

$$(B_\varepsilon^{ij}\varphi_\varepsilon^{ij})(\boldsymbol{x}') + {\sum_{k,l}}'(B_\varepsilon^{kl}\varphi_\varepsilon^{kl})(\boldsymbol{x}') = 1, \qquad \boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon). \tag{3.4}$$

Здесь суммирование распространяется на те индексы k и l, для которых $\omega^{kl}(\varepsilon) \subset \Gamma_\varepsilon$, причем штрих у суммы означает, что $(k,l) \neq (i,j)$; B_ε^{ij} — интегральный оператор, действующий по формуле

$$(B_\varepsilon^{ij}\varphi)(\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} \frac{\varphi(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}}. \tag{3.5}$$

Для оценки величины (3.2) применим теорему В. И. Моссаковского [13], а именно: обозначим через $\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}')$ решение контактной задачи для изолированного штампа $\omega^{ij}(\varepsilon)$, вдавленного на единичную глубину, т. е. решение интегрального уравнения $(B_\varepsilon^{ij}\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij})(\boldsymbol{x}') = 1$ при $\boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon)$. Умножим обе части уравнения (3.3) на плотность $\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}')$ и проинтегрируем по площадке $\omega^{ij}(\varepsilon)$. В силу симметричности ядра оператора (3.5) имеем

$$\iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} (B_\varepsilon^{ij}\varphi_\varepsilon^{ij})(\boldsymbol{y})\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} \varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{y})(B_\varepsilon^{ij}\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij})(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}.$$

В результате получаем следующее равенство:

$$F_\varepsilon^{ij} + {\sum_{k,l}}' \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} (B_\varepsilon^{kl}\varphi_\varepsilon^{kl})(\boldsymbol{y})\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = 2\pi \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}, \tag{3.6}$$

где $\boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}$ — поступательная емкость штампа $\omega^{ij}(\varepsilon)$, т. е.

$$\boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} \hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}. \tag{3.7}$$

Наконец, принимая во внимание положительность плотностей $\varphi_\varepsilon^{kl}(\boldsymbol{x}')$ при $\boldsymbol{x}' \in \omega^{kl}(\varepsilon)$, $\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}')$ при $\boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon)$ и ядра оператора (3.5), из соотношения (3.6) выводим оценку

$$F_\varepsilon^{ij} < 2\pi \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}. \tag{3.8}$$

Согласно принятым предположениям относительно множества Γ_ε для любого участка g площадки G выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{(g)} \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij} = |g| c_\Gamma. \tag{3.9}$$

Здесь $|g|$ — площадь площадки g; сумма $\sum_{(g)}$ распространяется на те пятна контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$, которые попадают внутрь площадки g; c_Γ — величина, определяемая формулой (2.6). Действительно, для доказательства соотношения (3.8) следует учесть равенства

$$\boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij} = \varepsilon^2 \operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega}), \qquad \sum_{(g)} \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij} = N_\varepsilon \varepsilon^2 \operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega}), \tag{3.10}$$

где N_ε — число пятен контакта, попадающих внутрь площадки g, причем $N_\varepsilon \sim |g|(\varepsilon^2 l^2)^{-1}$.

Таким образом, учитывая неравенство (3.7) и условие (3.8), получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{(g)} F_\varepsilon^{ij} \leqslant 2\pi |g| c_\Gamma. \tag{3.11}$$

Поэтому (см. [8, § 1]) плотности $\varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}')$, $\boldsymbol{x}' \in \Gamma_\varepsilon$, будут слабо сходиться к ограниченной плотности $\varphi_0(\boldsymbol{x}')$, распределенной по поверхности G. При этом для фиксированной точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^3$ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_G \frac{\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + x_3^2}}$$

и для любого участка g площадки G существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{(g)} F_\varepsilon^{ij} = \iint\limits_g \varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}. \tag{3.12}$$

Формула (3.12) раскрывает механический смысл функции $\varphi_0(\boldsymbol{x}')$, а именно: функция

$$p^0(x_1, x_2) = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\,\varphi_0(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in G, \tag{3.13}$$

представляет собой осредненное контактное давление. Другими словами, для любого участка g площади G выполняется предельное соотношение

$$\iint\limits_g p^0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{(g)} \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} p^\varepsilon(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}. \tag{3.14}$$

Однако давление на поверхность упругого полупространства со стороны штампа Γ_ε передается по пятнам контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$. Приближенное выражение для контактного давления на пятне контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$ можно дать, воспользовавшись решением $\hat{\varphi}^{ij}_\varepsilon(\boldsymbol{x}')$ контактной задачи для изолированного штампа. Основанием для этого служит то обстоятельство, что при $\varepsilon \to 0$ относительное расстояние между ближайшими штампами (в сравнении с их диаметрами) неограниченно возрастает.

Так, согласно соотношению (3.12) для штампа $\omega^{ij}(\varepsilon)$ с центром в точке (x_1^i, x_2^j) с координатами $x_1^i = i\varepsilon l$, $x_2^j = j\varepsilon l$ имеем

$$\frac{F^{ij}_\varepsilon}{\varepsilon^2 l^2} \simeq \varphi_0(x_1^i, x_2^j), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3.15}$$

По формуле (3.7) получаем, что изолированный штамп $\omega^{ij}(\varepsilon)$ передает на упругое основание суммарную нагрузку

$$\hat{P}^{ij}_\varepsilon = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\,\hat{F}^{ij}_\varepsilon,$$

где

$$\hat{F}^{ij}_\varepsilon = \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} \hat{\varphi}^{ij}_\varepsilon(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = 2\pi \boldsymbol{c}^{ij}_\varepsilon. \tag{3.16}$$

Значит, плотности $(2\pi \boldsymbol{c}^{ij}_\varepsilon)^{-1} F^{ij}_\varepsilon \hat{\varphi}^{ij}_\varepsilon(\boldsymbol{x}')$ будет отвечать суммарная нагрузка P^{ij}_ε, определяемая формулой (3.3). Поэтому для контактного давления на пятне контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$ получаем следующее выражение:

$$p^\varepsilon(x_1, x_2) \simeq \frac{E}{2(1-\nu^2)}\,\frac{F^{ij}_\varepsilon}{2\pi \boldsymbol{c}^{ij}_\varepsilon}\,\hat{\varphi}^{ij}_\varepsilon(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \omega^{ij}(\varepsilon). \tag{3.17}$$

Принимая во внимание соотношения (3.10), (3.13) и (3.15), окончательно будем иметь

$$p^\varepsilon(x_1, x_2) \simeq \frac{l^2}{2\pi\,\mathrm{cap}\,(\boldsymbol{\omega})}\,p^0(x_1^i, x_2^j)\hat{\varphi}^{ij}_\varepsilon(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \omega^{ij}(\varepsilon), \tag{3.18}$$

где $\hat{\varphi}^{ij}_\varepsilon(\boldsymbol{x}')$ — решение интегрального уравнения $(B^{ij}_\varepsilon \hat{\varphi}^{ij}_\varepsilon)(\boldsymbol{x}') = 1$ при $\boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon)$.

4. Уравнение для определения осредненного контактного давления. Для приближенного решения системы интегральных уравнений (3.4) применим метод локализации [12]. Второе слагаемое в левой части уравнения (3.4), описывающее влияние на распределение контактного давления под штампом ω^{ij}_ε со стороны остальных штампов системы Γ_ε, заменим приближенным, осредняя контактное давление, следующим образом:

$$(B^{ij}_\varepsilon \varphi^{ij}_\varepsilon)(\boldsymbol{x}') + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G\setminus K^{ij}_\varepsilon} \frac{\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}} = 1, \qquad \boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon). \tag{4.1}$$

Здесь K^{ij}_ε — квадрат с центром в точке (x_1^i, x_2^j) и стороной εl.

Далее, согласно формуле (3.17) имеем

$$\varphi_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}') = \frac{F_\varepsilon^{ij}}{2\pi \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}}\,\hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon).$$

Подставляя данное выражение в уравнение (4.1), с точностью до членов порядка ε получаем

$$\frac{F_\varepsilon^{ij}}{2\pi \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}} + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G \frac{\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}} = 1, \qquad \boldsymbol{x}' \in \omega^{ij}(\varepsilon).$$

Принимая теперь во внимание соотношение (3.15), находим

$$\frac{\varepsilon^2 l^2}{2\pi \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}}\,\varphi_0(x_1^i, x_2^j) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G \frac{\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1^i-y_1)^2+(x_2^j-y_2)^2}} = 1. \tag{4.2}$$

Таким образом, в силу произвольности точки (x_1^i, x_2^j) при учете первой формулы (3.10) и уравнения (4.2) выводим

$$\frac{l^2}{2\pi\,\mathrm{cap}\,(\boldsymbol{\omega})}\,\varphi_0(x_1,x_2) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G \frac{\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}} = 1. \tag{4.3}$$

Итак, осредненная плотность контактных давлений (3.13) согласно формулам (4.3) и (2.6) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{1}{c_\Gamma}\,p^0(x_1,x_2) + \iint\limits_G \frac{p^0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}} = \frac{\pi E}{1-\nu^2}. \tag{4.4}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (4.4) или, что то же самое, (4.3) эквивалентно граничному условию (2.7).

Условие положительности контактных давлений на пятнах контакта (1.9) и предельное соотношение (3.14) при учете (3.9) приводят к неравенству

$$p^0(x_1,x_2) > 0, \qquad (x_1,x_2) \in G. \tag{4.5}$$

Поэтому величина $u^0(x_1,x_2,0)$, интерпретируемая как осредненная осадка поверхности упругого основания под штампом с мелкозернистой границей Γ_ε, согласно соотношениям (4.3) и (4.5) меньше смещения штампа, т. е.

$$u^0(x_1,x_2,0) < 1, \qquad (x_1,x_2) \in G.$$

Тем самым второе слагаемое в формуле (2.9) положительно.

5. Обобщения и замечания. 1. В случае штампа Γ_ε с подошвой неплоской формы граничное условие (1.3) следует заменить следующим:

$$u^\varepsilon(\boldsymbol{x}', 0) = w(\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{x}' = (x_1,x_2) \in \Gamma_\varepsilon. \tag{5.1}$$

Здесь $w(x_1,x_2)$ — гладкая функция, определяющая осадку поверхности упругого основания под штампом. В частности, функция $w(\boldsymbol{x}') = \delta_0 - \beta_2 x_1 + \beta_1 x_2$ отвечает случаю наклонного штампа с плоской мелкозернистой подошвой (δ_0 — поступательное смещение; β_1 и β_2 — углы поворота относительно горизонтальных осей).

Согласно теории Марченко — Хруслова (см. теорему 1.4 в [8]) краевому условию (5.1) соответствует следующее осредненное граничное условие (вместо (2.7)):

$$-\frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}', 0+) = 2\pi c_\Gamma\big(w(\boldsymbol{x}') - u^0(\boldsymbol{x}', 0)\big), \qquad \boldsymbol{x}' \in G. \tag{5.2}$$

При этом осредненная плотность контактных давлений отыскивается как решение интегрального уравнения (вместо уравнения (4.4))

$$\frac{1}{c_\Gamma}\, p^0(x_1,x_2) + \iint\limits_G \frac{p^0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}} = \frac{\pi E}{1-\nu^2}\, w(x_1,x_2). \tag{5.3}$$

Для интегрального уравнения (5.3) были предложены различные методы решения (см. обзор в [14, § 3.5.1]). Заметим, что для произвольной правой части уравнения (5.3) его решение, разумеется, не удовлетворяет условию положительности (4.5). Заметим также, что решение интегрального уравнения (4.4) не имеет сингулярности на краю площадки G.

2. Осредненная контактная задача (5.3) остается справедливой и в случае, если в множестве Γ_ε пятна контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$ развернуть произвольным образом. Более того, результаты теории [7, 8] справедливы при менее ограничительных предположениях о структуре мелкозернистой границы Γ_ε. Например, можно освободиться от предположения о периодичности и добавить зависимость пятен контакта от медленных переменных. Выбор периодического случая обусловлен простотой расчета коэффициента c_Γ.

В частности, при расположении пятен контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$ в узлах косоугольной решетки со сторонами εl_1 и εl_2 и углом α между ними будем иметь

$$c_\Gamma = \operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega})/(l_1 l_2 \sin\alpha). \tag{5.4}$$

В случае гексагональной решетки с межузловым расстоянием εl получаем

$$c_\Gamma = \frac{8}{3\sqrt{3}}\, \frac{\operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega})}{l^2}. \tag{5.5}$$

При периодическом размещении пятен контакта двух типов в узлах квадратной решетки со стороной εl в шахматном порядке имеем

$$c_\Gamma = (\operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega}_1) + \operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega}_2))/(2l^2). \tag{5.6}$$

Формулы (5.4)–(5.6) являются следствием соотношения (3.9).

3. При выводе результирующего уравнения (5.3) существенно использовался аппарат теории потенциала. Для обобщения постановки контактной задачи для штампа с мелкозернистой границей, например, на случай упругого слоя перепишем осредненную задачу в терминах линейной теории упругости.

Так, постановка контактной задачи о давлении без трения на поверхность упругого полупространства штампа Γ_ε включает граничные условия

$$\sigma_{31}(\boldsymbol{U}^\varepsilon; \boldsymbol{x}', 0) = \sigma_{32}(\boldsymbol{U}^\varepsilon; \boldsymbol{x}', 0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2;$$
$$U_3^\varepsilon(\boldsymbol{x}', 0) = w(\boldsymbol{x}'), \qquad \boldsymbol{x}' \in \Gamma_\varepsilon;$$
$$\sigma_{33}(\boldsymbol{U}^\varepsilon; \boldsymbol{x}', 0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon.$$

Здесь $\sigma_{3i}(\boldsymbol{U}^\varepsilon)$ — компоненты тензора напряжений. При этом контактное давление под штампом равно

$$p^\varepsilon(\boldsymbol{x}') = -\sigma_{33}(\boldsymbol{U}^\varepsilon; \boldsymbol{x}', 0), \qquad \boldsymbol{x}' \in \Gamma_\varepsilon.$$

Решение $\boldsymbol{U}^0(\boldsymbol{x})$ осредненной задачи должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений Ламе в полубесконечной области, занимаемой упругим телом, краевым условиям отсутствия трения

$$\sigma_{31}(\boldsymbol{U}^0; \boldsymbol{x}', 0) = \sigma_{32}(\boldsymbol{U}^0; \boldsymbol{x}', 0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2,$$

условию отсутствия пригрузки вне области, занимаемой штампом, т. е.

$$\sigma_{33}(\boldsymbol{U}^0; \boldsymbol{x}', 0) = 0, \qquad \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G},$$

а также осредненному условию контакта

$$-\sigma_{33}(\boldsymbol{U}^0;\boldsymbol{x}',0)=\frac{\pi E}{1-\nu^2}\,c_\Gamma(w(\boldsymbol{x}')-U_3^0(\boldsymbol{x}',0)),\qquad \boldsymbol{x}'\in G. \tag{5.7}$$

Поясним, что граничное условие (5.7) является перезаписью условия (5.2) при учете зависимостей

$$\sigma_{33}(\boldsymbol{U}^0;\boldsymbol{x}',0)=\frac{E}{2(1-\nu^2)}\,\frac{\partial u^0}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}',0),\qquad U_3^0(\boldsymbol{x}',0)=u^0(\boldsymbol{x}',0),$$

вытекающих из формул Беляева (1.6), (1.7).

Таким образом, осредненное граничное условие контакта (5.7) свободно от предположения, что упругое тело занимает полупространство, и может быть использовано при решении контактной задачи в случае упругого слоя, плиты и т. п. о давлении штампа с мелкозернистой границей на плоскую границу упругого основания.

4. Предположение, что дополнение множества Γ_ε связно в рассматриваемом случае (1.1), также несущественно в рамках используемого подхода. В частности, аналогично может быть получено приближенное решение контактной задачи для так называемого сетчатого штампа (см. пример 2 в [8, гл. 1, § 4]).

5. По формуле (2.8) получаем

$$\boldsymbol{c}^0=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_G\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y},$$

где $\varphi(\boldsymbol{x}')$ — решение уравнения (4.3).

Вместе с тем ввиду соотношения (3.12) имеем

$$\iint\limits_G\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{(G)}F_\varepsilon^{ij},$$

что полностью согласуется с первой формулой (1.10) при учете обозначения (3.3).

Проинтегрировав обе части уравнения (4.3) по области G, находим

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_G\varphi_0(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}+\frac{c_\Gamma}{2\pi}\iint\limits_G\varphi_0(\boldsymbol{y})\iint\limits_G\frac{d\boldsymbol{x}'\,d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|}=|G|c_\Gamma. \tag{5.8}$$

Правая часть уравнения (5.8) выражается по формуле (3.9) так:

$$|G|c_\Gamma=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{(G)}\boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}. \tag{5.9}$$

Сопоставляя формулы (5.4) и (5.8), (5.9), заключаем, что предельное значение $\boldsymbol{c}^0$ поступательной емкости $\boldsymbol{c}^\varepsilon$ оказывается меньше, чем суммарная емкость штампов в системе, что, разумеется, выполняется и для емкости $\boldsymbol{c}^\varepsilon$.

Положим

$$m_G=\min_{\boldsymbol{y}\in G}\iint\limits_G\frac{d\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|},\qquad M_G=\max_{\boldsymbol{y}\in G}\iint\limits_G\frac{d\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|}.$$

Из формулы (5.8) вытекают оценки

$$\frac{|G|c_\Gamma}{1+M_Gc_\Gamma}\leqslant\boldsymbol{c}^0\leqslant\frac{|G|c_\Gamma}{1+m_Gc_\Gamma}.$$

Заметим, что для круговой области G величина M_G оказывается в $\pi/2$ раз больше, чем m_G (см., в частности, [14, § 1.1.6]).

6. Результирующее интегральное уравнение (4.4) осредненной контактной задачи было получено путем применения метода локализации. Тем самым обоснование метода локализации для рассматриваемого случая контактной задачи можно строго провести в рамках теории осреднения [8]. Отметим также, что оценка (3.10) также была получена отличным от [8] способом.

7. Проведем сравнительный анализ полученных результатов с результатами работы [9]. Во-первых, коренным образом различаются уравнения для определения осредненной плотности контактных давлений, а именно: в случае (1.1) уравнение (4.4) отличается от соответствующего уравнения для случая (1.12) наличием первого слагаемого.

Во-вторых, нетрудно видеть определенное сходство асимптотического представления (3.18) для истинного контактного давления с ранее полученным (см. формулу (25) в работе [9]). В обоих случаях получено представление вида

$$p^\varepsilon(x_1, x_2) \simeq p^0(x_1, x_2) f_\varepsilon^{ij}(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \omega^{ij}(\varepsilon). \tag{5.10}$$

Здесь $p^0(x_1, x_2)$ — значение осредненного контактного давления в центре пятна контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$; $f_\varepsilon^{ij}(x_1, x_2)$ — функция, определяющая распределение давлений на пятне контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$. Заметим также, что в обоих случаях функция $f_\varepsilon^{ij}(x_1, x_2)$ имеет корневую особенность на границе пятна контакта $\omega^{ij}(\varepsilon)$.

Принимая во внимание формулы (3.18) и (3.16), в рассматриваемом случае получаем

$$\begin{gathered} f_\varepsilon^{ij}(x_1, x_2) = \frac{l^2}{2\pi \operatorname{cap}(\boldsymbol{\omega})} \hat{\varphi}_\varepsilon^{ij}(x_1, x_2), \\ \frac{1}{\varepsilon^2 l^2} \iint\limits_{\omega^{ij}(\varepsilon)} f_\varepsilon^{ij}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Подчеркнем, что величина $\varepsilon^2 l^2$ равна площади ячейки периодичности

$$K_\varepsilon^{ij} = \{\boldsymbol{x}' :\ \varepsilon^{-1}(x_1 - i\varepsilon l, x_2 - j\varepsilon l) \in K\}.$$

В случае (1.12) условие нормировки (5.11) вытекает из формул (23) и (28) работы [9].

Таким образом, при учете соотношения

$$\iint\limits_{g \cap \Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \simeq \iint\limits_{g} p^0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y},$$

справедливого для любого участка g площадки G, и условия нормировки (5.11) из формулы (5.10) выводим

$$\iint\limits_{g} p^0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \simeq \iint\limits_{g} p^0(\boldsymbol{y}) f_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}. \tag{5.12}$$

При записи соотношения (5.12) подразумевается, что $f_\varepsilon^{ij}(\boldsymbol{y}) = 0$ при $\boldsymbol{y} \in K_\varepsilon^{ij} \setminus \overline{\omega^{ij}(\varepsilon)}$.

Заметим, что в механике контакта шероховатых упругих тел (см., например, работу [15]) функция $f_\varepsilon^{ij}(x_1, x_2)$ называется локальным коэффициентом интенсивности контактных давлений (a local 'contact intensity factor').

8. Наконец, заметим, что обычно первичным параметром задачи дискретного контакта выступает число штампов N, а производный параметр ε рассчитывается исходя из

геометрии расположения штампов. В случае (1.1), очевидно, обращая зависимость (1.13), имеем

$$\varepsilon \sim \sqrt{|G|/(Nl^2)},$$

где l — характерный размер фигуры G. При этом коэффициент c_Γ, фигурирующий в осредненной задаче и определяемый формулой (2.6), следует рассчитывать так:

$$c_\Gamma = \boldsymbol{c}^\varepsilon/(\varepsilon^2 l^2) = N\boldsymbol{c}^\varepsilon/|G|.$$

Здесь $\boldsymbol{c}_\varepsilon = \boldsymbol{c}_\varepsilon^{ij}$ — поступательная емкость штампа $\omega^{ij}(\varepsilon)$, определяемая формулой (3.7).

Автор благодарит Т. А. Мельника за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
2. **Беляев Н. М.** Местные напряжения при сжатии упругих тел // Инженерные сооружения и строительная механика. Л.: Путь, 1924. С. 27–74.
3. **Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
4. **Полиа Г., Сеге Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
5. **Ландкоф Н. С.** Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
6. **Аргатов И. И.** Емкостные характеристики штампа с плоским гладким основанием // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. 2000. № 4. С. 26–32.
7. **Марченко В. А., Хруслов Е. Я.** Краевые задачи с мелкозернистой границей // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 3. С. 458–472.
8. **Марченко В. А., Хруслов Е. Я.** Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974.
9. **Argatov I. I., Mel'nyk T. A.** Homogenization of a contact problem for a system of densely situated punches // Europ. J. Mech. A. Solids. 2001. V. 20, N 1. P. 91–98.
10. **Gladwell G. M. L., Fabrikant V. I.** The interaction between a system of circular punches on an elastic half-space // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49, N 2. P. 341–344.
11. **Аргатов И. И.** Взаимодействие между штампами на упругом полупространстве // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 4. С. 8–40.
12. **Горячева И. Г.** Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
13. **Моссаковский В. И.** К вопросу об оценке перемещений в пространственных контактных задачах // Прикл. математика и механика. 1951. Т. 15, вып. 5. С. 635, 636.
14. **Аргатов И. И., Дмитриев Н. Н.** Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003.
15. **Fischer F. D., Daves W., Werner E. A.** On the temperature in the wheel-rail rolling contact // Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 2003. V. 26. P. 999–1006.

Поступила в редакцию 10/XII 2003 г.