

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ОТРЕЗКАМ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ ОКРУЖНОСТИ

УДК 539.3

Б. В. Нерубайло, В. П. Олышанский, Т. Б. Нерубайло

Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва

В [1, 2] методом асимптотического синтеза (МАС) построены простые замкнутые выражения для вычисления усилий и моментов в круговой цилиндрической оболочке, равномерно нагруженной радиальными силами по отрезкам направляющей окружности. На практике распределение давлений может существенно отличаться от равномерного, особенно при контакте оболочки с другими жесткими телами [3, 4]. Поэтому ниже результаты [1, 2] обобщены на случай неравномерного распределения внешней нагрузки. В отличие от работы [5], где исследование проводилось методом двумерного преобразования Фурье, решение построено на основе одного из МАС. Указанный способ позволил получить простые компактные формулы для вычисления усилий и моментов при достаточно общем распределении внешней нагрузки.

Обозначим через h и R толщину и радиус оболочки, а через E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона ее материала. Поперечное сечение $x = 0$, где приложена внешняя нагрузка, будем считать достаточно удаленным от торцов, чтобы пренебречь их влиянием на местный изгиб, т. е. считать оболочку бесконечной в осевом направлении. Это упрощение допустимо для самоуравновешенного циклически симметричного по угловой координате β внешнего воздействия, которое примем в виде k нормальных сил, периодически приложенных по направляющей окружности. Каждая из сил P распределена на дуге окружности длиной $2\beta_0 R$ по закону $f(\beta) = f(-\beta)$, так что

$$P = R \int_{-\beta_0}^{\beta_0} f(\beta) d\beta = 2R \int_0^{\beta_0} f(\beta) d\beta.$$

Местное напряженное состояние, как и в [1, 2], представим суммой основного состояния и простого краевого эффекта. Первое будем описывать уравнением типа Шорера [6]

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + c^2 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} = \frac{R^2}{Eh} p(\alpha, \beta), \quad (1)$$

где $\alpha = x/R$; $c^2 = h^2/(12(1-\nu^2)R^2)$; $\Phi = \Phi(\alpha, \beta)$ — разрешающая функция; $p(\alpha, \beta)$ — плотность внешней радиальной нагрузки.

Изгибающие моменты G_1^0, G_2^0 и тангенциальные усилия T_1^0, T_2^0 в основном состоянии выражаются через функцию Φ соотношениями

$$G_1^0 = \nu G_2^0 = -\nu \frac{D}{R^2} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = Eh c^2 R^2, \quad T_1^0 = -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad T_2^0 = 0. \quad (2)$$

Напряженное состояние простого краевого эффекта представим уравнением [1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + c^{-2} w = R^2 D^{-1} p(\alpha, \beta),$$

записанным относительно поперечного прогиба (или радиального перемещения) $w = w(\alpha, \beta)$. Ему соответствуют силовые факторы

$$G_2^k = \nu G_1^k = -\nu \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad T_2^k = -\frac{Eh}{R} w, \quad T_1^k = 0.$$

Отметим, что индексы о и к здесь и ниже означают принадлежность того или иного фактора к основному состоянию или к краевому эффекту соответственно.

Зададим плотность внешней нагрузки выражением $p(\alpha, \beta) = q(\beta) R^{-1} \delta(\alpha - 0)$. Здесь

$$q(\beta) = q\left(\beta \pm \frac{2\pi}{k}\right) = \begin{cases} f(\beta) & \text{при } \beta \in [-\beta_0, \beta_0], \\ 0 & \text{при } \beta \in \left[-\frac{\pi}{k}, -\beta_0\right) \cup \left(\beta_0, \frac{\pi}{k}\right]; \end{cases}$$

$\delta(\alpha - 0) = \pi^{-1} \int_0^\infty \cos \lambda \alpha d\lambda$ — функция Дирака.

Разложим четную $2\pi/k$ -периодическую функцию в ряд по косинусам:

$$q(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos kn\beta; \quad (3)$$

для вычисления его коэффициентов имеем интегралы

$$q_0 = \frac{k}{\pi} \int_0^{\beta_0} f(\beta) d\beta = \frac{kP}{2\pi R}, \quad q_n = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\beta_0} f(\beta) \cos kn\beta d\beta. \quad (4)$$

Далее для каждой из гармоник n построим затухающие на $\pm\infty$ решения уравнения (1). Такого решения не существует при $n = 0$. Поэтому осесимметричную составляющую будем учитывать только в краевом эффекте, а для основного состояния примем

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + c^2 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} = \frac{R}{\pi Eh} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos kn\beta \int_0^\infty \cos \lambda \alpha d\lambda.$$

Решением этого уравнения является

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{R}{\pi Eh} \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\cos \lambda \alpha}{\lambda^4 + c^2 (kn)^8} d\lambda,$$

что для силовых факторов в соответствии с (2) дает

$$G_1^o = \nu G_2^o = \frac{\nu D}{\pi R E h} \sum_{n=1}^{\infty} q_n (kn)^6 \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\cos \lambda \alpha}{\lambda^4 + c^2 (kn)^8} d\lambda, \quad (5)$$

$$T_1^o = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} q_n (kn)^2 \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \cos \lambda \alpha}{\lambda^4 + c^2 (kn)^8} d\lambda.$$

Далее ограничимся рассмотрением силовых факторов только в нагруженном сечении

$\alpha = 0$, где они достигают наибольших значений. Учитывая, что [7]

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{\lambda^4 + c^2(kn)^8} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(kn)^2\sqrt{c}}, \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4 + c^2(kn)^8} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4(kn)^6 c\sqrt{c}}, \quad (6)$$

вместо выражений (5) получим более простые:

$$T_1^0 = -\frac{1}{2\sqrt{2c}}(q(\beta) - q_0), \quad G_1^0 = \nu G_2^0 = \frac{\nu R\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}(q(\beta) - q_0). \quad (7)$$

При записи этих выражений учтен ряд (3).

Убывающие на $\pm\infty$ решения уравнения краевого эффекта хорошо известны [8], и их полностью выписывать не будем. В нагруженном сечении ($\alpha = 0$) они имеют вид

$$T_1^k = 0, \quad T_2^k = -\frac{1}{2}q(\beta)\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{R/h}, \quad G_2^k = \nu G_1^k = \frac{\nu}{4}q(\beta)\sqrt{Rh}/\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}. \quad (8)$$

Выполнив синтез напряженных состояний (7) и (8), для вычисления усилий и моментов запишем формулы

$$\begin{aligned} T_1(0, \beta) &= T_1^0 + T_1^k = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{R}{h}}\left(q(\beta) - \frac{k}{\pi}\int_0^{\beta_0} f(\beta) d\beta\right), \\ T_2(0, \beta) &= T_2^0 + T_2^k = -\frac{1}{2}\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{R}{h}}q(\beta), \\ G_1(0, \beta) &= G_1^0 + G_1^k = \frac{\sqrt{Rh}}{4\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}\left((1+\nu)q(\beta) - \frac{\nu k}{\pi}\int_0^{\beta_0} q(\beta) d\beta\right), \\ G_2(0, \beta) &= G_2^0 + G_2^k = \frac{\sqrt{Rh}}{4\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}\left((1+\nu)q(\beta) - \frac{k}{\pi}\int_0^{\beta_0} q(\beta) d\beta\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из них следует, что распределения силовых факторов по угловой координате в нагруженном сечении только множителем и константой отличаются от распределения внешней нагрузки. Последнее может быть достаточно произвольным, но может допускать разложение в сходящийся ряд Фурье по косинусам.

Рассмотрим в качестве примера внешнее нагружение с плотностью

$$f(\beta) = \frac{P\Gamma(\mu + 3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu + 1)\beta_0 R} \left(1 - \frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)^\mu, \quad \beta \in [-\beta_0, \beta_0], \quad (10)$$

где $\Gamma(z)$ — функция Эйлера; z — аргумент, например, $z = \mu + 1$; $\mu \geq 0$. Ограничение на μ продиктовано условием известной теоремы Дирихле о разложимости функции в ряд Фурье. Из (10) как частные случаи вытекают: равномерное распределение ($\mu = 0$), типа Герца ($\mu = 1/2$) и др.

Вычислим интеграл, входящий в (9):

$$\int_0^{\beta_0} f(\beta) d\beta = \frac{P\Gamma(\mu + 3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu + 1)\beta_0 R} \int_0^{\beta_0} \left(1 - \frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)^\mu d\beta = \frac{P\Gamma(\mu + 3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu + 1)\beta_0 R} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\mu+1} t dt = \frac{P}{2R}.$$

Здесь учтено, что [7]

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2\mu+1} t \, dt = 2^{2\mu} \frac{(\Gamma(\mu+1))^2}{\Gamma(2\mu+2)}, \quad \Gamma(2\mu+2) = \frac{2^{2\mu+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\mu+1) \Gamma(\mu+3/2).$$

Как видим, выбранное степенное распределение нагрузки (10) удовлетворяет условию (4). В этом случае из формул (9) для вычисления силовых факторов в центре отрезка нагружения получим

$$\begin{aligned} T_1(0,0) &= -\frac{P \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\beta_0 R} \sqrt{\frac{R}{h}} \left(\frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)} - \frac{k\beta_0}{2\pi} \right), \\ T_2(0,0) &= -\frac{P \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\beta_0 R} \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)}, \\ G_1(0,0) &= \frac{P}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \left[(1+\nu) \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)\beta_0} - \frac{\nu k}{2\pi} \right], \\ G_2(0,0) &= \frac{P}{4 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} \left[(1+\nu) \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)\beta_0} - \frac{k}{2\pi} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Эти выражения еще более упрощаются для постоянной плотности нагрузки. При $\mu = 0$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, $\Gamma(1) = 1$ они принимают вид

$$\begin{aligned} T_1(0,0) &= -\frac{P \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\pi\beta_0 \sqrt{Rh}} (\pi - k\beta_0), \quad T_2(0,0) = -\frac{P \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\beta_0 \sqrt{Rh}}, \\ G_1(0,0) &= \frac{P}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} [(1+\nu)\pi - \nu k\beta_0], \\ G_2(0,0) &= \frac{P}{8\pi\beta_0 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}} [(1+\nu)\pi - k\beta_0]. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) полностью совпадают с приведенными в [1, 2]. Таким образом, решения (9), (11) следует рассматривать как обобщения известных результатов (12) на случай неравномерного распределения нагрузки по отрезкам направляющей окружности.

При построении приближенных решений здесь синтез напряженного состояния проводился только по двум компонентам, т. е. без учета третьей (изгибной) составляющей. В [1, 2] показано, что это допустимо при вычислении G_1 и G_2 для нагрузки, равномерно распределенной по отрезкам, если $\beta_0 \geq \sqrt{h/R}$. В связи с чем возникает вопрос: можно ли распространить это неравенство и на случай неравномерного распределения? Для ответа на него сравним значения усилий и моментов, которые дают формулы (11) при $\mu = 1/2$ с теми, что получены в [5]. Там исследование проводилось методом двумерного преобразования Фурье на базе уравнений Власова — Доннелла. В результате решения задачи для вычисления безразмерных значений усилий и моментов при $\mu = 1/2$, $k = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

Т а б л и ц а 1

ω	γ	t_1	t_2	g_1	g_2
1,1	0,5	1,40	1,41	1,41	1,40
2,2	1,0	0,69	0,71	0,70	0,69
3,3	1,5	0,45	0,43	0,47	0,46
4,4	2,0	0,33	0,35	0,34	0,37

Т а б л и ц а 2

ω	γ	t_1	t_2	g_1	g_2
1,1	0,5	0,69	0,69	1,35	1,35
2,2	1,0	0,55	0,55	0,77	0,77
3,3	1,5	0,43	0,43	0,51	0,51
4,4	2,0	0,34	0,34	0,37	0,37

предложены выражения

$$t_j = -\frac{2\pi h T_j(0,0)}{P\sqrt{3(1-\nu^2)}} = -(B_0 V_0 + C_0 U_0 + B_1 V_1 + C_1 U_1), \quad (13)$$

$$g_j = \frac{4\pi G_j(0,0)}{P(1+\nu)} = B_0 U_0 - C_0 V_0 + B_1 U_1 - C_1 V_1 \quad (j = \bar{1}, 2),$$

где $B_m = \operatorname{ber}_m(\gamma)$; $C_m = \operatorname{bei}_m(\gamma)$; $U_m = \operatorname{ker}_m(\gamma)$; $V_m = \operatorname{kei}_m(\gamma)$; $\gamma = (1/2\sqrt{2})\beta_0\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\sqrt{R/h}$; B_m, C_m, U_m, V_m — функции Томсона.

Для проведения сравнительного анализа примем $\nu = 0,3$, $R/h = 400$, $\beta_0 = \omega\sqrt{h/R}$. Результаты расчетов по формулам (11) и (13) приведены соответственно в табл. 1 и 2. Значения функций Томсона взяты из таблиц [9]. Анализ показывает, что и при неравномерном распределении нагрузки (в частности, по закону Герца) соблюдение указанного в [1] неравенства $\beta_0 \geq \sqrt{h/R}$ (или $\omega \geq 1$) дает приемлемое соответствие моментов, полученных на основе МАС и с помощью уравнений моментной технической теории оболочек. Для тангенциальных усилий такое соответствие достигается при гораздо больших длинах нагруженных отрезков, т. е. начиная с $\beta_0 \geq 3\sqrt{h/R}$ (или $\omega \geq 3$). В рамках указанных неравенств преимущества МАС очевидны, так как он приводит к простым замкнутым решениям, которые достаточно точны и удобны для инженерных расчетов.

Рассмотрим теперь бесконечно длинную оболочку при действии нормальной нагрузки, кусочно-постоянной в продольном направлении и кусочно-линейной в окружном. Для такой нагрузки справедливы разложение в ряд Фурье вдоль контура и представление интегралом Фурье в продольном направлении, а именно

$$p(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2 k \beta_0} p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin kn\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda. \quad (14)$$

Здесь p_0 — амплитудное значение нормальной нагрузки; α_0 — параметр протяженности нагруженной области вдоль образующей (длина области равна $2\alpha_0 R$); $\omega_n = (1/n^2)(\sin kn\beta_0 - kn\beta_0 \cos kn\beta_0)$.

На основе приближенных уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния (основное состояние, краевой эффект в зоне приложения нагрузки и изгибное состояние), получим решение поставленной задачи для частного случая приложения нагрузки по отрезкам контура, когда $\alpha_0 \rightarrow 0$. Полное напряженно-деформированное состояние оболочки представим в виде суммы трех элементарных состояний: основного, локального краевого эффекта (при $n \leq n^*$) и изгибного состояния (при $n > n^*$), что составляет сущность третьего МАС [2]. Тогда находим следующие выражения для интересующих нас

наиболее важных факторов напряженно-деформированного состояния оболочки:

$$\begin{aligned}
 \frac{ER^2}{M_0} w(\alpha, \beta) &= \frac{9(1-\nu^2)}{\pi \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{(k^2 n^2 - 1)^3}} [\varphi_n(\alpha) + \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta + \\
 &+ \frac{3 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\beta_0^2} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} [\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)] \omega^*(\beta) + \frac{9(1-\nu^2)}{\pi k^4 \beta_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n^3} (1 + kn\alpha) e^{-kn\alpha} \sin kn\beta, \\
 \frac{R^2}{M_0} T_1(\alpha, \beta) &= -\frac{3 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\pi \beta_0^3} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} [\varphi_n(\alpha) - \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta, \\
 \frac{R^2}{M_0} T_2(\alpha, \beta) &= -\frac{3 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\beta_0^2} \sqrt{\frac{R}{h}} [\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)] \omega^*(\beta), \\
 \frac{R}{M_0} G_1(\alpha, \beta) &= \frac{3}{8 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^2} \sqrt{\frac{h}{R}} [\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)] \omega^*(\beta) + \\
 &+ \frac{3\nu}{4\pi \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} [\varphi_n(\alpha) + \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta + \\
 &+ \frac{3}{4\pi k^2 \beta_0^3} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n} [1 + \nu - (1 - \nu)kn\alpha] e^{-kn\alpha} \sin kn\beta, \\
 \frac{R}{M_0} G_2(\alpha, \beta) &= \frac{3}{4\pi \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} [\varphi_n(\alpha) + \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta + \\
 &+ \frac{3\nu}{8 \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^2} \sqrt{\frac{h}{R}} [\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)] \omega^*(\beta) + \frac{3}{4\pi k^2 \beta_0^3} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n} [1 + \nu + (1 - \nu)kn\alpha] e^{-kn\alpha} \sin kn\beta, \\
 \omega^*(\beta) &= \frac{2}{\pi k \beta_0} \sum_{n=1}^{n^*} \omega_n \sin kn\beta.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь M_0 — полный момент, передающийся на оболочку через один из k участков контура, эквивалентный нормальной нагрузке; функции $\varphi_n(\alpha)$, $\psi_n(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ определяются по формулам [2] $\varphi_n(\alpha) = \exp(-\mu_n \alpha) \cos \mu_n \alpha$, $\psi_n(\alpha) = \exp(-\mu_n \alpha) \sin \mu_n \alpha$, $\varphi(\alpha) = \exp(-\eta \alpha) \cos \eta \alpha$, $\psi(\alpha) = \exp(-\eta \alpha) \sin \eta \alpha$.

Отметим, что значение номера гармоники n^* для «склеивания» решений основного состояния, краевого эффекта и изгибного состояния, которые записаны в виде (15), находится по известной формуле, связывающей между собой номер гармоники, количество нагрузок и относительную толщину оболочки [2]:

$$n^4 \approx (2/k^4)(1-\nu^2)(R/h)^{5/2}. \tag{16}$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n , полученное по формуле (16), суть n^* . Значения n^* , найденные по этой формуле, совпадают полностью с соответствующими значениями, определенными путем численного эксперимента при различных параметрах k , h/R , β_0 . В качестве примера приведем числовую информацию, относящуюся к случаю нагружения оболочки, имеющей относительную толщину $h/R = 1/100$, двумя диа-

Таблица 3

n	Общая теория оболочек	Основное состояние	Локальный краевой эффект	Основное состояние плюс краевой эффект	Изгибное состояние
	G_{2n}/P				
1	0,0170	0,0137	0,0036	0,0173	0,0986
2	0,0144	0,0108	0,0031	0,0139	0,0430
3	0,0118	0,0084	0,0025	0,0109	0,0225
4	0,0080	0,0058	0,0017	0,0075	0,0115
5	0,0040	0,0030	0,0009	0,0039	0,0048
10	-0,0018	-0,0024	-0,0007	-0,0031	-0,0019
15	0,0008	0,0015	0,0005	0,0020	0,0008
20	-0,0003	-0,0006	-0,0002	-0,0008	-0,0003
30	0,0001	0,0002	0,0002	0,0004	0,0001
40	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0001

метрально противоположными нормальными нагрузками, для которых $k = 2$, $\beta_0 = 0,25$. Максимальные значения кольцевого изгибающего момента G_{2n}/P представлены в табл. 3 при различных n (от $n = 1$ до $n = 40$, некоторые промежуточные значения не приведены для сокращения объема таблицы, что, однако, не снизило ее информативности). Числовая информация получена на основе уравнений общей теории оболочек в форме [10], на основе уравнений полубезмоментной теории (основное состояние), краевого эффекта и изгибного состояния.

Как и для кусочно-постоянной вдоль контура нагрузки [1, 2], так и для достаточно произвольной, симметричной относительно начала координат нагрузки, для которой получены удобные формулы в данной работе, безусловно представляет интерес построение простых расчетных формул и в обсуждаемом случае, когда нагрузка статически эквивалентна одному или нескольким локальным окружным моментам. К простым расчетным формулам, пригодным для определенного диапазона изменения параметров нагрузки k , β_0 , можно прийти путем упрощения достаточно общего решения (15). При этом, как и в упомянутых только что случаях, будем предполагать, что в некотором диапазоне изменения параметра β_0 решение может быть записано только на основе уравнений полубезмоментной теории и теории краевого эффекта. Тогда записанные в виде рядов решения (15) для основного состояния и локального краевого эффекта принимаются справедливыми для всего диапазона изменения номеров гармоник: $n = 1, 2, 3, \dots, n^*, n^* + 1, \dots, \infty$. Это становится возможным благодаря тому, что в определенном диапазоне изменения параметра β_0 частичная сумма (начиная от некоторого значения $n > n^*$ до бесконечности) не вносит весомого вклада в полную сумму ряда. Так как ряды становятся при этом бесконечными, появляется возможность в некоторых частных случаях получить их сумму в конечном виде, а для искомых силовых и деформационных факторов записать простые формулы, не содержащие рядов. Естественно, в этом случае область использования получающихся формул сужается по сравнению с решением (15), и возникает необходимость в установлении ее границ, например, путем сопоставления с точными данными, что сделано позже. Из табл. 3 видно, что при больших номерах гармоник погрешность в определении изгибающего момента на основе полубезмоментной теории может быть значительной, если на оболочку действует нормальная синусоидальная (или косинусоидальная) нагрузка, а не локализованная, рассматриваемая здесь. Например, при нагрузке $p_0 \sin 30\beta$ решение на основе полубезмоментной теории в 2 раза отличается от точного (на основе общей теории

оболочек), в то время как изгибное состояние дает значение, в точности совпадающее со значением по общей теории.

При рассмотрении бесконечно длинной оболочки из условия равновесия должно быть $k \geq 2$. Приняв сильное неравенство $k^2 n^2 \gg 1$, которое означает переход от разрешающего уравнения полубезмоментной теории к упрощенному уравнению (1), при $\alpha = 0$ имеем

$$\frac{R^2}{M_0} T_1^o(0, \beta) = -\frac{3\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\pi k \beta_0^3} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kn\beta_0}{n^2} - k\beta_0 \frac{\cos kn\beta_0}{n} \right) \sin kn\beta,$$

$$\frac{R}{M_0} G_2^o(0, \beta) = \frac{3}{4\pi k \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kn\beta_0}{n^2} - k\beta_0 \frac{\cos kn\beta_0}{n} \right) \sin kn\beta.$$

Входящий в выражения для продольного усилия и изгибающего момента ряд может быть просуммирован; тогда после некоторых преобразований для $\beta = \beta_0$, т. е. для границы нагруженной области, получим конечные формулы:

$$\frac{R^2}{M_0} T_1^o(0, \beta_0) = -\frac{3\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{8\beta_0^2} \sqrt{\frac{R}{h}}, \quad \frac{R}{M_0} G_2^o(0, \beta_0) = \frac{3}{16\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^2} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (17)$$

Для локального краевого эффекта могут быть найдены аналогичные формулы, которые при $\beta = \beta_0$ принимают вид

$$\frac{R^2}{M_0} T_2^k(0, \beta_0) = -\frac{3\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{8\beta_0^2} \sqrt{\frac{R}{h}}, \quad \frac{R}{M_0} G_1^k(0, \beta_0) = \frac{3}{16\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^2} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (18)$$

Таким образом, продольное усилие в оболочке определяется как решение основного состояния: $T_1(\alpha, \beta) \approx T_1^o(\alpha, \beta)$, а кольцевое усилие — как решение для локального краевого эффекта: $T_2(\alpha, \beta) \approx T_2^k(\alpha, \beta)$. Полные формулы для изгибающих моментов получаются путем сложения решений для локального краевого эффекта (18) и основного состояния (17). На границе нагруженной области $\beta = \beta_0$ для моментов находим

$$\frac{R}{M_0} G_1(0, \beta_0) = \frac{R}{M_0} G_2(0, \beta_0) = \frac{3(1+\nu)}{16\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^2} \sqrt{\frac{h}{R}}. \quad (19)$$

Представляет интерес сравнение численных результатов по приближенным формулам с точным решением с целью уточнения области их применения. Достаточно хорошее соответствие данных по формуле (19) точному решению имеет место в широком диапазоне изменения параметра нагруженной области $\beta_0 \geq (h/R)^{1/2}$. При меньших значениях этого параметра различие может быть более существенным, тогда необходимо учитывать изгибное состояние, являющееся компонентом решения (15), которое по мере уменьшения β_0 становится все более мощным, а при стремлении $\beta_0 \rightarrow 0$ — определяющим. Это не трудно заметить из рассмотрения поведения продольного (рис. 1) и кольцевого (рис. 2) изгибающих моментов в зависимости от параметра протяженности нагруженной области β_0 при $k = 2$, $R/h = 100$. Решение по формуле (15) представлено кривой 1, а по (19) — кривой 2. Кривая 3 соответствует решению только уравнений краевого эффекта (рис. 1) или уравнений полубезмоментной теории оболочек (рис. 2). Эти решения записаны в виде формул (18), (17) соответственно. Таким образом, кривая 3 характеризует вклад краевого эффекта и основного состояния в полное напряженное состояние (в полное значение из-

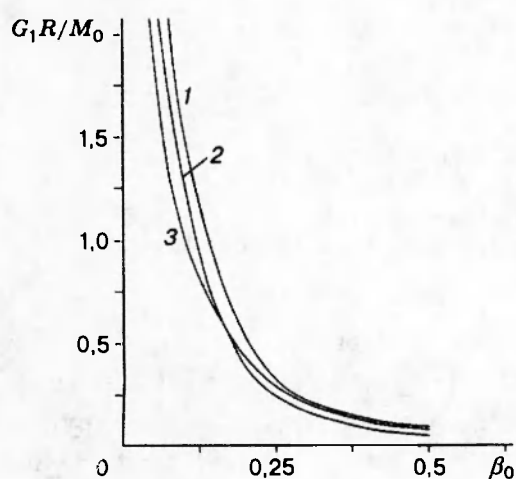


Рис. 1

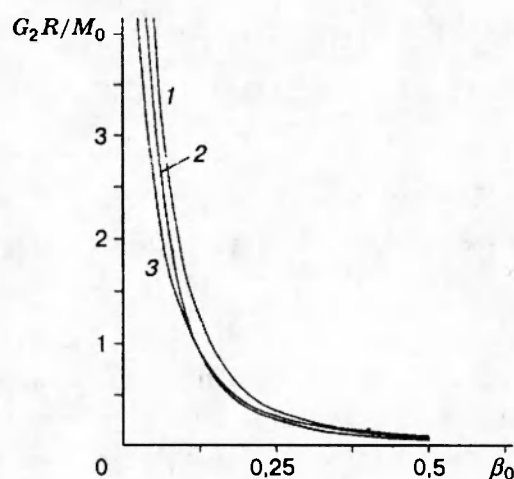


Рис. 2

гибающих моментов, которые являются главными силовыми факторами). Отметим, что решение (15), представленное на рис. 1, 2 в виде кривых 1, полностью совпадает с решением по общей теории оболочек (погрешность не превышает 5%).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант N2J000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991.
2. Нерубайло Б. В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983.
3. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
4. Ольшанский В. П. Интегральные уравнения изгиба пологих оболочек // Вычислительная и прикладная математика. Киев: Вища шк., 1982. Вып. 47. С. 103–110.
5. Ольшанский В. П. Определение напряжений в цилиндрической оболочке, нагруженной по отрезку направляющей окружности // Изв. вузов. Машиностроение. 1988. № 8. С. 7–10.
6. Schorer H. Line load action on cylindrical shells // Proceedings of the Amer. Soc. Civ. Eng. 1935. V.61, N 3. P. 281–316.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
9. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир, 1982.
10. Власов В. З. Общая теория оболочек. Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1961.

Поступила в редакцию 24/IV 1995 г.,
в окончательном варианте — 24/VIII 1995 г