УДК 539.3:517.958

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ СРЕДЕ

Л. В. Баев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: Baevlev@inbox.ru

Рассмотрена задача о распространении продольных и поперечных волн в разномодульной модели упругой изотропной среды, описываемой потенциалом, зависящим от трех инвариантов деформаций и позволяющим учитывать влияние предварительного деформирования среды на продольную и поперечную скорости.

Ключевые слова: внутренняя энергия, потенциал, разномодульность, поперечная и продольная скорости.

1. При рассмотрении адиабатических процессов упругого деформирования постулируется зависимость внутренней энергии от инвариантов мер деформации. В общем виде тензорную зависимость между напряжениями и деформациями для нелинейно-упругой изотропной среды можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = K_0\delta_{ij} + K_1\varepsilon_{ij} + K_2\varepsilon_{in}\varepsilon_{nj}.$$

Здесь K_0, K_1, K_2 — функции трех инвариантов тензора деформаций $I_1 = \varepsilon_{mm}$, $I_2 = \varepsilon_{mn}\varepsilon_{nm}$, $I_3 = \varepsilon_{mn}\varepsilon_{np}\varepsilon_{pm}$ (по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3).

В случае существования потенциала $W = W(I_1, I_2, I_3)$ имеем

$$K_0 = \frac{\partial W}{\partial I_1}, \qquad K_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_2}, \qquad K_2 = 3\frac{\partial W}{\partial I_3}.$$

Одним из наиболее часто используемых в классической теории упругости методов является выбор потенциала в виде разложения внутренней энергии в ряд Тейлора относительно начального состояния с удержанием определенного числа слагаемых. При удержании вторых, третьих и четвертых степеней деформаций получаем девять слагаемых. Константы при соответствующих степенях деформаций называются константами Ламе второго, третьего и четвертого порядка. Используются также другие формы записи потенциала, например в нелинейных моделях Ландау, Мурнагана. Зависимости между константами в этих моделях и значения некоторых констант можно найти в [1]. Указанные модели можно использовать также для описания поведения материалов, различным образом сопротивляющихся растяжению и сжатию. Считается, что разномодульность может возникнуть, в частности, вследствие внутреннего повреждения материала и появления трещин, в результате чего упругие характеристики и характер распространения упругих волн в материале зависят от вида напряженного состояния. При этом качественной характеристикой, определяющей вид деформированного состояния, является третий инвариант тензора деформаций, а первый и второй инварианты характеризуют изменение объема

Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта Отделения энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН № 4.12.2.

и формы. В определенной мере разную сопротивляемость растяжению и сжатию можно учесть, если в потенциал ввести слагаемое, зависящее от $\xi = I_1\sqrt{I_2}$. Потенциал такого типа рассмотрен в работах [2, 3]. В [3] потенциал принят в виде

$$W(\varepsilon_{i,j}) = 0{,}5[K + \varphi(\xi)]I_1^2 + [G + \psi(\xi)](I_2 - I_1^2/3),$$

где функции φ и ψ связаны соотношением $3\xi^2\varphi' + 2(3 - \xi^2)\psi' = 0$. Однако в этом случае эксперименты на растяжение и сжатие с замером продольных и поперечных деформаций дают четыре соотношения для определения меньшего числа констант, в результате чего появляется дополнительное условие, ограничивающее область применимости модели. Подобная модель рассмотрена в работе [4] с использованием упругого потенциала в напряжениях в виде

$$W = 0{,}5[1 + f(\xi)](A + B\xi^2)\sigma_i^2,$$

где $\sigma_i^2 = (3/2)S_{ij}S_{ij}$ — второй инвариант девиатора напряжений; $\xi = \sigma/\sigma_i$; $\sigma = (1/3)\sigma_{ii}$; A, B — константы.

Попытка учесть влияние третьего инварианта тензора напряжений на вид деформированного состояния предпринята в работе [5], где этот инвариант введен в виде $\cos 3\varphi$ (φ — угол вида напряженного состояния, зависящий от третьего инварианта девиатора и степени октаэдрической деформации). В [6] вид потенциала был несколько усложнен.

Наиболее удобным для расчетов представляется потенциал, предложенный в работах [7, 8]:

$$W = \frac{1}{2}\,\lambda I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1\sqrt{I_2} + \alpha\,\frac{I_1^3}{\sqrt{I_2}} + \delta\,\frac{I_3}{\sqrt{I_2}}.$$

Вывод этого потенциала и определяющих соотношений на его основе содержится в работе [2]. В указанном потенциале имеется тензорно-нелинейное слагаемое, учитывающее взаимодействие второго и третьего инвариантов деформаций. Слагаемое $\alpha I_1^3/\sqrt{I_2}$ обычно можно опустить, так как его влияние в некоторой степени учитывается слагаемым $\gamma I_1\sqrt{I_2}$. Поэтому далее будем рассматривать потенциал с $\alpha = 0$.

Потенциал в случае $\alpha = \delta = 0$ рассмотрен в работе [9]. Показано, что при выборе потенциала в таком виде скорость распространения волн зависит от направления распространения, напряженного состояния и трещиноватости, характеризуемой слагаемым $\gamma I_1\sqrt{I_2}$.

2. Рассмотрим потенциал

$$W = \frac{1}{2}\,\lambda I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1\sqrt{I_2} + \delta\,\frac{I_3}{\sqrt{I_2}}, \tag{2.1}$$

причем $W = 0$, $\partial W/\partial\varepsilon_{ij} = 0$ при $\varepsilon_{ij} = 0$. Тогда

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}} = \delta_{ij}\,\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\varepsilon_{ij}\,\frac{\partial W}{\partial I_2} + 3\varepsilon_{ki}\varepsilon_{jk}\,\frac{\partial W}{\partial I_3} =$$

$$= \Big(\lambda - \frac{\gamma}{\xi}\Big)I_1\delta_{ij} + (2\mu - \gamma\xi - \delta\eta\xi)\varepsilon_{ji} + 3\varepsilon_{ki}\varepsilon_{jk}\,\frac{\delta}{\sqrt{I_2}}, \tag{2.2}$$

где $\xi = I_1/\sqrt{I_2}$, $\eta = I_3/(I_1I_2)$ — относительные инварианты деформированного состояния.

Обозначив $\lambda^* = \lambda - \gamma/\xi$, $2\mu^* = 2\mu - \gamma\xi - \delta\eta\xi$, получим общепринятую запись выражения напряжения в теории упругости с нелинейными параметрами Ламе и нелинейным слагаемым. При этом через λ^*, μ^* по обычным формулам можно определить модули G^*, K^*, ν^*, E^*, аналогичные используемым в линейной теории упругости.

Таблица 1

Расчетные константы λ, μ, γ, δ для трех материалов

Материал	$E_{\text{р}}$, кг/мм^2	$\nu_{\text{р}}$	$E_{\text{с}}$, кг/мм^2	$\nu_{\text{с}}$	λ, ГПа	μ, ГПа	γ, ГПа	δ, ГПа
Сталь Ст. 40	205,79	0,29	211,79	0,28	107,74	81,24	−3,61	−3,59
Чугун СЧ 12-28	91,41	0,22	121,87	0,27	40,61	42,98	1,52	−7,40
Силумин АЛ-2	66,93	0,34	73,42	0,39	69,27	25,80	45,67	−0,36

Обращение соотношения (2.2) в силу присутствия в нем нелинейного слагаемого затруднено. Для потенциала более общего вида (с учетом слагаемого с α) обращение выполнено в [2] с учетом результатов [10].

3. Константы λ, μ, γ, δ определяются из экспериментов на одноосное растяжение и сжатие с замером поперечных деформаций. При растяжении $\sigma_{11}^{\text{р}} = \sigma$, $\sigma_{ij}^{\text{р}} = 0$ $(ij \ne 11)$, $\varepsilon_{11}^{\text{р}} = \varepsilon$, $\varepsilon_{22}^{\text{р}} = \varepsilon_{33}^{\text{р}} = -\nu_{\text{р}}\varepsilon$. Аналогично при сжатии $\sigma_{11}^{\text{с}} = -\sigma$, $\sigma_{ij}^{\text{с}} = 0$ $(ij \ne 11)$, $\varepsilon_{11}^{\text{с}} = -\varepsilon$, $\varepsilon_{22}^{\text{с}} = \varepsilon_{33}^{\text{с}} = \nu_{\text{с}}\varepsilon$. Упругие характеристики, определяемые в экспериментах на растяжение, отмечены индексом р, на сжатие — индексом с. Тогда

$$
\begin{gathered}
E_{\text{р}} = \sigma_{11}^{\text{р}}/\varepsilon_{11}^{\text{р}} = (\lambda - \gamma/\xi_{\text{р}})(1 - 2\nu_{\text{р}}) + 2\mu - \gamma\xi_{\text{р}} - \delta\eta_{\text{р}}\xi_{\text{р}} + 3\delta/\sqrt{1 + 2\nu_{\text{р}}^2},\\
(\lambda - \gamma/\xi_{\text{р}})(1 - 2\nu_{\text{р}}) - 2\mu - \gamma\xi_{\text{р}} - \delta\eta_{\text{р}}\xi_{\text{р}}\nu_{\text{р}} + 3\delta\nu_{\text{р}}^2/\sqrt{1 + 2\nu_{\text{р}}^2} = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

Аналогично при сжатии

$$
\begin{gathered}
E_{\text{с}} = \sigma_{11}^{\text{с}}/\varepsilon_{11}^{\text{с}} = (\lambda - \gamma/\xi_{\text{с}})(1 - 2\nu_{\text{с}}) + 2\mu - \gamma\xi_{\text{с}} - \delta\eta_{\text{с}}\xi_{\text{с}} - 3\delta/\sqrt{1 + 2\nu_{\text{с}}^2},\\
-(\lambda - \gamma/\xi_{\text{с}})(1 - 2\nu_{\text{с}}) + (2\mu - \gamma\xi_{\text{с}} - \delta\eta_{\text{с}}\xi_{\text{с}})\nu_{\text{с}} + 3\delta\nu_{\text{с}}^2/\sqrt{1 + 2\nu_{\text{с}}^2} = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Определение констант λ, μ, γ, δ сводится к решению системы уравнений (3.1), (3.2).

В [11] приведены значения модулей упругости и коэффициентов Пуассона, полученные в экспериментах на одноосное растяжение и сжатие для трех материалов: стали Ст. 40 (нормализованной), чугуна СЧ 12-28 и силумина АЛ-2. В данной работе для этих трех материалов с использованием формул (3.1), (3.2) рассчитаны константы λ, μ, γ, δ (табл. 1). Следует отметить достаточно большое различие значений $\nu_{\text{р}}$ и $\nu_{\text{с}}$ для чугуна и силумина и значений $E_{\text{р}}$ и $E_{\text{с}}$ для чугуна.

4. Предположим, что материал находится в однородном напряженном состоянии. Равновесные значения деформаций и напряжений обозначим через ε_{ij}^0, σ_{ij}^0. Этим значениям соответствуют значения I_i^0 $(i = 1, 2, 3)$, ξ_0, η_0, $\lambda_0^* = \lambda - \gamma/\xi_0$, $2\mu_0^* = 2\mu - \gamma\xi_0 - \delta\eta_0\xi_0$.

Пусть $\hat\varepsilon_{ij}$, $\hat\sigma_{ij}$ — обусловленные динамическими воздействиями добавки, малые по сравнению с равновесными деформациями и напряжениями. Тогда $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \hat\varepsilon_{ij}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \hat\sigma_{ij}$.

В силу малости добавок получаем

$$
\begin{gathered}
\hat I_1 = \hat\varepsilon_{ii}, \qquad \hat I_2 = 2\hat\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}^0, \qquad \hat I_3 = 3\hat\varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}^0\varepsilon_{ki}^0,\\
\hat\xi = \xi_0(\hat\varepsilon_{ii}/I_1^0 - \hat\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^0/I_2^0), \qquad \hat\eta = \eta_0(\hat I_3/I_3^0 - \hat I_2/I_2^0 - \hat I_1/I_1^0).
\end{gathered}
$$

Для напряжений $\hat\sigma_{ps}$ имеем

$$
\begin{aligned}
\hat\sigma_{ps} = (\lambda\delta_{ps} - \gamma\xi_0\varepsilon_{ps}^0/I_1^0)\hat\varepsilon_{ii} + 2\mu_0^*\hat\varepsilon_{sp} + (-\gamma\xi_0\varepsilon_{mn}^0\delta_{ps}/I_1^0 + (\gamma + 3\delta\eta_0)\xi_0\varepsilon_{sp}^0\varepsilon_{mn}^0/I_2^0 -{}\\
- 3(\varepsilon_{sp}^0\varepsilon_{mq}^0\varepsilon_{qn}^0 + \varepsilon_{qp}^0\varepsilon_{sq}^0\varepsilon_{mn}^0)\,\delta\eta_0\xi_0/I_3^0)\hat\varepsilon_{mn} + 3(\delta\xi_0/I_1^0)(\hat\varepsilon_{sq}\varepsilon_{qp}^0 + \hat\varepsilon_{pq}\varepsilon_{qs}^0).
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Из уравнений движения

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

в силу стационарности σ^0_{ij} следует

$$\frac{\partial\hat\sigma_{ps}}{\partial x_s} = \rho\,\frac{\partial^2 \hat u_p}{\partial t^2}. \tag{4.2}$$

Решение ищем в виде $\hat u_p = \tilde u_p \exp i(\omega t - k_\alpha x_\alpha)$. При этом, так как значения $\hat\varepsilon_{mn}$ малы, то

$$\hat\varepsilon_{pq} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\hat u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial\hat u_q}{\partial x_p}\Big). \tag{4.3}$$

Из (4.1)–(4.3) получаем уравнения для перемещений $\tilde u_p$ в виде

$$x\tilde u_p = a_{p\alpha}\tilde u_\alpha,$$

где

$$\begin{gathered}
x = \rho\omega^2/k^2 - \mu + 0{,}5\gamma\xi_0 + 0{,}5\delta\xi_0\eta_0 - 1{,}5(\delta\xi_0/I^0_1)\varepsilon^0_k n_k = \rho\omega^2/k^2 - x_0,\\
a_{p\alpha} = A_0 n_\alpha n_p + D\varepsilon^0_{\alpha p} + (D-B)(\varepsilon^0_\alpha n_p + \varepsilon^0_p n_\alpha) + C\varepsilon^0_p\varepsilon^0_\alpha - b(E_\alpha\varepsilon^0_p + E_p\varepsilon^0_\alpha),\\
A_0 = \lambda + \mu^*_0 = \lambda + \mu - 0{,}5\gamma\xi_0 - 0{,}5\delta\eta_0\xi_0,\\
x_0 = \mu - 0{,}5\gamma\xi_0 - 0{,}5\delta\xi_0\eta_0 - 1{,}5(\delta\xi_0/I^0_1)\varepsilon^0_k n_k,\\
D = 1{,}5\delta\xi_0/I^0_1 = 1{,}5\delta/\sqrt{I^0_2}, \qquad B = \gamma\xi_0/I^0_1 = \gamma/\sqrt{I^0_2},\\
C = (\gamma + 3\delta\eta_0)\xi_0/I^0_2, \qquad b = 3\delta\xi_0\eta_0/I^0_3 = 2D/I^0_2,\\
\varepsilon^0_\alpha = \varepsilon^0_{s\alpha}n_s, \qquad E_\alpha = \varepsilon^0_{\beta s}\varepsilon^0_{s\alpha}n_\beta, \qquad n_\alpha = k_\alpha/k, \qquad k^2 = k_s k_s, \qquad n^2_\alpha = 1.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Характеристическое уравнение

$$|a_{p\alpha} - x\delta_{p\alpha}| = 0$$

сводится к кубическому уравнению

$$x^3 - A_1 x^2 + A_2 x - A_3 = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\begin{gathered}
A_1 = a_{\alpha\alpha} = a_{11} + a_{22} + a_{33},\\
A_2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13}, \qquad A_3 = |a_{p\alpha}|.
\end{gathered}$$

Отметим, что если $\delta = 0$, то $b = 0$, $D = 0$, $A_3 = 0$.

Заменой переменных с учетом (4.4) кубическое уравнение (4.5) сводится к виду

$$\begin{gathered}
z^3 + 3pz + 2q = 0, \qquad x = (z + \alpha_1/3)x_0,\\
p = (3\alpha_2 - \alpha_1^2)/9, \qquad q = (-2\alpha_1^3 + 9\alpha_1\alpha_2 - 27\alpha_3)/54,
\end{gathered}$$

где $\alpha_1 = A_1/x_0$; $\alpha_2 = A_2/x_0^2$; $\alpha_3 = A_3/x_0^3$.

При малых значениях $|\delta/x_0|$, что справедливо при $\delta \ll \mu$, дискриминант кубического уравнения пропорционален величине $|\delta/x_0|^3/108$, поэтому можно принять $p^3 + q^2 \approx 0$. В этом случае уравнение (4.5) легко решается:

$$\begin{gathered}
z_1 = 2(-q)^{1/3}, \qquad z_2 = z_3 = q^{1/3},\\
x_i = (\rho\omega^2/k^2)_i - x_0 = x_0(z_i + \alpha_1/3), \qquad V_i = \sqrt{x_0(z_i + 1 + \alpha_1/3)/\rho} \quad (i = 1, 2, 3).
\end{gathered} \tag{4.6}$$

Таблица 2

Значения продольных и поперечных скоростей для трех материалов при всестороннем деформационном растяжении и сжатии

Материал	v_{p}^1, м/с	v_{p}^2, м/с	v_{c}^1, м/с	v_{c}^2, м/с
Сталь Ст. 40	3186	5885	3218	5939
Чугун СЧ 12-28	2050	3916	2784	4635
Силумин АЛ-2	2837	6428	3380	7064

В случае если предварительное деформирование отсутствует ($\varepsilon_{ij}^0 = 0$), имеем

$$a_{p\alpha} = A_0 n_p n_\alpha, \qquad A_0 = \lambda + \mu, \qquad A_1 = A_0, \qquad A_2 = A_3 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_3 = A_0, \qquad x_0 = \mu,$$

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \qquad V_s = \sqrt{\mu/\rho}.$$

Для стали Ст. 40 (нормализованной) значение $|\delta/x_0| = 0{,}044$, для чугуна СЧ 12-28 $|\delta/x_0| = 0{,}172$, для силумина АЛ-2 $|\delta/x_0| = 0{,}014$. Таким образом, для рассмотренных материалов можно принять $p^3 + q^2 \approx 0$.

5. В качестве начального состояния рассматривается всестороннее деформационное растяжение (сжатие). С учетом (4.4) получаем

$$\varepsilon_{ij}^0 = \pm\varepsilon\delta_{ij}, \quad \varepsilon \geqslant 0, \qquad a_{ps} = \pm(\sqrt{3}\,\delta/2)\delta_{ps} + (\lambda + \mu \mp 5\sqrt{3}\gamma/6 \pm \sqrt{3}\,\delta/2) n_p n_s,$$

$$x = \rho\omega^2/k^2 - x_0, \qquad x_0 = \mu \mp \sqrt{3}\,\gamma/2 \pm \sqrt{3}\,\delta/3,$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda + \mu}{x_0} \pm \sqrt{3}\Big(2 - \frac{5}{6}\,\frac{\gamma}{\delta}\Big)\frac{\delta}{x_0}, \qquad \alpha_2 = \Big[\pm\sqrt{3}\,\frac{\lambda + \mu}{x_0} + \frac{5}{2}\Big(\frac{3}{2} - \frac{\gamma}{\delta}\Big)\frac{\delta}{x_0}\Big]\frac{\delta}{x_0},$$

$$\alpha_3 = \Big[\frac{3}{4}\,\frac{\lambda + \mu}{x_0} \pm \frac{\delta}{x_0}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\Big(3 - \frac{5}{2}\,\frac{\gamma}{\delta}\Big)\Big]\Big(\frac{\delta}{x_0}\Big)^2.$$

Здесь верхний знак (“плюс” или “минус”) соответствует растяжению, нижний — сжатию. Учитывая малость $|\delta/x_0|$, в соответствии с (4.6) имеем

$$V_1 = \sqrt{x_0(q^{1/3} + 1 + \alpha_1/3)/\rho}, \qquad V_2 = V_3 = \sqrt{x_0(-2q^{1/3} + 1 + \alpha_1/3)/\rho}.$$

В табл. 2 приведены значения фазовых скоростей для трех материалов с учетом предварительного всестороннего деформационного растяжения или сжатия. При этом значения фазовых скоростей не зависят от направления волнового вектора.

6. В качестве начального состояния рассматривается деформационный сдвиг: $\varepsilon_{11} = \varepsilon$, $\varepsilon_{22} = -\varepsilon$, остальные $\varepsilon_{ij} = 0$. Тогда

$$I_1^0 = 0, \qquad I_2^0 = 2\varepsilon^2, \qquad I_3^0 = 0, \qquad \xi_0 = 0, \qquad \eta_0 \neq 0,$$

$$B = \sqrt{2}\,\gamma/(2\varepsilon) = \tilde{B}/\varepsilon, \quad D = 3\sqrt{2}\,\delta/(4\varepsilon) = \tilde{D}/\varepsilon, \quad C = 0, \quad b = \tilde{D}/\varepsilon^3, \quad A_0 = \lambda + \mu,$$

$$a_{11} = \tilde{D} + (A_0 - 2\tilde{B})n_1^2, \qquad a_{22} = -\tilde{D} + (A_0 + 2\tilde{B})n_2^2, \qquad a_{33} = A_0 n_3^2,$$

$$a_{12} = A_0 n_1 n_2, \qquad a_{13} = (A_0 + \tilde{D} - \tilde{B})n_1 n_3, \qquad a_{23} = (A_0 - \tilde{D} + \tilde{B})n_2 n_3,$$

$$x = \rho\omega^2/k^2 - \mu + \tilde{D}(n_2^2 - n_1^2), \qquad x_0 = \mu - \tilde{D}(n_2^2 - n_1^2).$$

$$A_1 = A_0 + 2\tilde{B}(n_2^2 - n_1^2),$$
$$A_2 = -\tilde{D}^2 + \tilde{D}A_0(n_2^2 - n_1^2)(1 - 2n_3^2) + 2\tilde{D}\tilde{B}(n_2^2 + n_1^2) - 4\tilde{B}^2 n_2^2 n_1^2 - (\tilde{D} - \tilde{B})^2 (n_2^2 + n_1^2) n_3^2,$$
$$A_3 = [A_0\tilde{D}^2(-1 + 2n_1^2 + 2n_2^2) - \tilde{D}(\tilde{D} - \tilde{B})^2(n_2^2 - n_1^2) - 4A_0\tilde{D}^2 n_2^2 n_1^2] n_3^2.$$

В данном случае начальная деформация вносит анизотропию в распределение скоростей (зависимость скоростей от волнового вектора).

Для любого вектора с $n_3 = 0$, $n_1^2 + n_2^2 = 1$ получаем $a_{33} = a_{13} = a_{23} = 0$, $A_3 = 0$, $x_0 = \mu - \tilde{D}(n_2^2 - n_1^2)$. В этом случае корни характеристического уравнения следующие: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = (A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - 4A_2})/2$. При этом

$$A_1^2 - 4A_2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = [A_0 - 2(\tilde{D} - \tilde{B})]^2 + 8A_0(\tilde{D} - \tilde{B})n_1^2.$$

Для волновых векторов, направленных вдоль осей координат, при $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$ получаем

$$x_0 = \mu - \tilde{D}, \qquad A_1^2 - 4A_2 = (A_0 - 2\tilde{B} + 2\tilde{D})^2.$$

Отсюда следует

$$V_1 = \sqrt{(\mu + \tilde{D})/\rho} = \sqrt{(\mu + 3\sqrt{2}\,\delta/4)/\rho}, \qquad V_2 = \sqrt{\mu/\rho},$$
$$V_3 = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 2\tilde{D} - 2\tilde{B})/\rho} = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 3\sqrt{2}\,\delta/2 - \sqrt{2}\,\gamma)/\rho}.$$

При $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$

$$x_0 = \mu + \tilde{D}, \qquad A_1^2 - 4A_2 = (A_0 + 2\tilde{B} - 2\tilde{D})^2,$$
$$V_1 = \sqrt{(\mu - \tilde{D})/\rho} = \sqrt{(\mu - 3\sqrt{2}\,\delta/4)/\rho}, \qquad V_2 = \sqrt{\mu/\rho},$$
$$V_3 = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 2\tilde{D} + 2\tilde{B})/\rho} = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 3\sqrt{2}\,\delta/2 + \sqrt{2}\,\gamma)/\rho}.$$

При $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$

$$x_0 = \mu, \qquad A_1 = A_0, \qquad A_2 = -\tilde{D}^2, \qquad A_3 = -A_0\tilde{D}^2,$$
$$V_1 = \sqrt{(\mu - \tilde{D})/\rho}, \qquad V_2 = \sqrt{(\mu + \tilde{D})/\rho}, \qquad V_3 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}.$$

В табл. 3 приведены значения продольных и поперечных скоростей, рассчитанные для трех материалов при сдвиге с волновым вектором в плоскости $x_3 = 0$. Приведены результаты для двух волновых векторов: $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{n} = (0, 1, 0)$.

Для сравнения в табл. 4 приведены результаты расчета скоростей для случая $\delta = 0$, $\gamma = 0$ и для констант, полученных экспериментально только при одноосном растяжении и только при одноосном сжатии.

Таблица 3

Значения продольных и поперечных скоростей для трех материалов при сдвиге

Материал	$\boldsymbol{n} = (1,0,0)$			$\boldsymbol{n} = (0,1,0)$		
	v^1, м/с	v^2, м/с	v^3, м/с	v^1, м/с	v^2, м/с	v^3, м/с
Сталь Ст. 40	5889,0	3182,70	3208,6	6001,30	3335,76	3310,90
Чугун СЧ 12-28	4000,7	2263,10	2534,3	4571,23	2722,10	2471,57
Силумин АЛ-2	6712,7	3128,75	3335,7	6887,63	3157,70	2957,60

Таблица 4

Результаты расчета поперечных и продольных скоростей
только при одноосном растяжении и только при одноосном сжатии

Материал	$\sqrt{\mu/\rho}$	$\sqrt{\mu_\text{р}/\rho}$	$\sqrt{\mu_\text{с}/\rho}$	$\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$	$\sqrt{(\lambda_\text{р}+2\mu_\text{р})/\rho}$	$\sqrt{(\lambda_\text{с}+2\mu_\text{с})/\rho}$
Сталь Ст. 40	3260	3228,5	3289,8	5945,7	5939,7	5951,5
Чугун СЧ 12-28	2503	2336,8	2644,7	4295,5	3900,3	4711,6
Силумин АЛ-2	3152	3101,2	3189,5	6822,3	6298,5	7510,1

Заключение. Данная тензорно-нелинейная модель, включающая четыре материальные константы, позволяет определять фазовые скорости при различных видах предварительного нагружения материала с учетом его разномодульности. Модель позволяет исключить ограничения на соотношения между константами, имеющие место при использовании более простых моделей. Показано, что даже для однородных и изотропных материалов скорость звука зависит не только от напряженно-деформированного состояния и разномодульности, характеризуемой двумя слагаемыми с коэффициентами γ и δ, но и от направления распространения звуковой волны. Степень различия скоростей существенно зависит от степени различия коэффициентов Пуассона при растяжении и сжатии.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ерофеев В. И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
2. **Олейников А. И.** Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разномодульной среды // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, № 5. С. 153–159.
3. **Олейников А. И.** О распространении волн малых возмущений в разномодульных статически напряженных средах. Плоские волны // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1989. № 3. С. 39–48.
4. **Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.** Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 6. С. 29–34.
5. **Матченко Н. М., Толоконников Л. А.** О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 108–111.
6. **Матченко Н. М., Толоконников Л. А., Трещев А. А.** Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Квазилинейные соотношения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 73–78.
7. **Ляховский В. А., Мясников В. П.** О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
8. **Мясников В. П.** Основы механики гетерогенно сопротивляющихся сред / В. П. Мясников, А. И. Олейников. Владивосток: Дальнаука, 2007.
9. **Топалэ В. И.** Распространение продольных и поперечных волн в разномодульной модели литосферы. М., 1982. Деп. в ВИНИТИ 12.07.82, № 3895-8219.
10. **Новожилов В. В.** О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // Прикл. математика и механика. 1951. Т. 15, № 2. С. 183–194.
11. **Амбарцумян С. А.** Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 29/II 2008 г.,
в окончательном варианте — 28/V 2008 г.