Например, обработка экспериментальных данных ползучести титанового сплава ВТ-9 при температуре 400°C [7] на растяжение, сжатие и кручение приводит к значениям $n = 5{,}91$, $m = 0{,}265$, $K_+ = 1{,}45 \cdot 10^{-14}$ (кг/мм²)$^{-n}$ч$^{-m}$, $K_- = 5{,}10 \cdot 10^{-15}$, $K = 3{,}20 \cdot 10^{-13}$. Видно, что данный упрочняющийся материал проявляет существенную разносопротивляемость растяжению и сжатию.

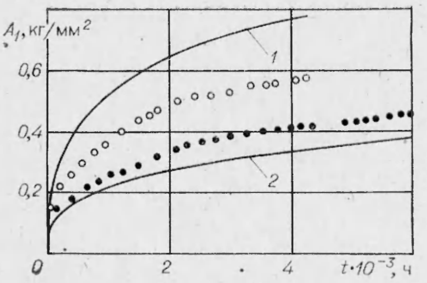

Рис. 3

Далее на основе формул (4.3) можно найти параметры A^*, B^*, C^* и использовать зависимости (4.2) для описания ползучести рассматриваемого титанового сплава при сложном напряженном состоянии. Для этого проведем сравнение теоретических результатов с данными экспериментов [7] на тонкостенных трубках, нагруженных крутящим моментом и осевым (растягивающим или сжимающим) усилием. На рис. 3 показано изменение удельной работы $A_1 = \sigma_{11}Э_{11} + 2\sigma_{12}Э_{12}$ с течением времени. Экспериментальные данные нанесены кружками. Светлые кружки относятся к растяжению с кручением ($\sigma_{11} = 56$ кг/мм², $\sigma_{12} = 26{,}5$), темные — к сжатию с кручением ($\sigma_{11} = -56$, $\sigma_{12} = 26{,}5$). Линии *1*, *2* — аналогичные расчетные результаты. Учитывая заметную разносопротивляемость материала и естественный разброс данных при ползучести, совпадение теоретических и экспериментальных результатов можно считать удовлетворительным.

Таким образом, предложенные физические зависимости могут использоваться при описании упругости, пластичности и ползучести изотропных материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** О принципе обработки результатов статических испытаний изотропных материалов.— ПММ, 1951, т. 15, № 6.
2. **Ломакин Е. В.** Разномодульность композитных материалов.— Механика композит. материалов, 1981, № 1.
3. **Цвелодуб И. Ю.** К разномодульной теории упругости изотропных материалов.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1977, вып. 32.
4. **Амбарцумян С. А.** Разномодульная теория упругости.— М.: Наука, 1982.
5. **Никитенко А. Ф.** О влиянии третьего инварианта девиатора напряжений на ползучесть неупрочняющихся материалов.— ПМТФ, 1969, № 5.
6. **Паняев В. А.** Экспериментальное исследование деформации серого чугуна.— В кн.: Сложная деформация твердого тела. Фрунзе: Илим, 1969.
7. **Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В.** О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие.— ПМТФ, 1979, № 4.
8. **Цвелодуб И. Ю.** О некоторых возможных путях построения теории установившейся ползучести сложных сред.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2.
9. **Золочевский А. А.** Об учете разносопротивляемости в теории ползучести изотропных и анизотропных материалов.— ПМТФ, 1982, № 4.

Поступила 27/IX 1985 г.

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ОДНОМЕРНОГО СТРОЕНИЯ С ЗАДАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. Г. Колпаков, С. И. Ракин

(*Новосибирск*)

Задача создания композиционных материалов с заданными свойствами привлекает в настоящее время определенное внимание. В данной работе приводится решение указанной задачи применительно к теплофизическим и жесткостным характеристикам композиционных материалов одномерного строения (при условии совпадения коэффициентов Пуассона компонентов).

Под композиционным материалом одномерного строения будем понимать неоднородный материал, теплофизические и механические характеристики которого — функции одной пространственной переменной, например x_1. Частный случай таких материалов — слоистые композиты. Характеристики композита, образованного из большого числа мелких компонент,— быстроосциллирующие функции с характерным размером осцилляции $\varepsilon \ll 1$ (в случае слоистых композитов ε есть характерная толщина слоев). Как показано в [1—5], при $\varepsilon \to 0$ неоднородному композиционному материалу периодического строения можно поставить в соответствие однородный материал с так называемыми осредненными [1—5] теплофизическими и механическими характеристиками, близкий при $\varepsilon \ll 1$ по (тепло)механическому поведению к исходному [1—6]. Осредненные характеристики, описывающие материал с макроскопической точки зрения, определяются его локальными (микроскопическими) характеристиками. Вопрос об определении осредненных характеристик композитов одномерного строения по локальным характеристикам получил в настоящее время исчерпывающее решение [1—7]. В данной работе рассматривается обратная задача: какие осредненные характеристики и каким образом можно придать композиционным материалам одномерного строения за счет управления их локальными характеристиками. Решение проводится на основе методов [8, 9] применительно к теплофизическим и жесткостным характеристикам.

Пусть композиционный материал локально-изотронный, неоднородный, периодического строения с характерным размером периода $\varepsilon \ll 1$. Наложим ограничение на исследуемые типы композиций: в качестве компонентов изучаемых в работе композиционных материалов могут использоваться материалы с совпадающими (или близкими) коэффициентами Пуассона. Этому условию удовлетворяют, например, композиции на основе металлов ($\nu \approx 1/3$) или полимеров ($\nu \approx 0{,}4$). Материальные характеристики рассматриваемых композитов: $c(x_1/\varepsilon)$, $a(x_1/\varepsilon)$ — локальные теплоемкость и теплопроводность; $E(x_1/\varepsilon)$, $A(x_1/\varepsilon)$ — локальные модуль Юнга и коэффициент теплового расширения (период функций $c(t)$, $a(t)$, $E(t)$, $A(t)$ равен единице). При $\varepsilon \to 0$ решения задач теплопроводности и деформирования рассматриваемого композита приближаются (в норме пространства $L_2(Q)$) к решениям задач теплопроводности и деформирования однородного анизотропного материала с осредненными характеристиками:

теплоемкость [2, 7]

$$\hat{c} = \langle c \rangle, \tag{1}$$

где $\langle f \rangle = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon f(x_1/\varepsilon)\,dx_1 = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$ —среднее по периоду;

тензор теплопроводности [1, 2]

$$\hat{a}_{11} = 1/\langle 1/a \rangle,\ \hat{a}_{22} = \hat{a}_{33} = \langle a \rangle \tag{2}$$

(не указываемые явно компоненты тензоров с точностью до известных симметрий равны нулю);

тензор податливостей [7]

$$H_{1111} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\left\langle \frac{1}{E} \right\rangle + \frac{2\nu^2}{1-\nu}\frac{1}{\langle E \rangle}, \tag{3}$$

$$H_{2222} = H_{3333} = \frac{1}{\langle E \rangle},\quad H_{1122} = H_{1133} = H_{2233} = -\frac{\nu}{\langle E \rangle},$$

$$H_{1313} = H_{1212} = \frac{1+\nu}{2}\left\langle \frac{1}{E} \right\rangle,\quad H_{2323} = \frac{1+\nu}{2}\frac{1}{\langle E \rangle};$$

тензор коэффициентов теплового расширения [6]

$$A_{11} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\langle A\rangle - \frac{2\nu}{1-\nu}\frac{\langle EA\rangle}{\langle E\rangle}, \tag{4}$$

$$A_{22} = A_{33} = \frac{\langle EA\rangle}{\langle E\rangle}.$$

Формулами (1)—(4) устанавливается связь между осредненными (макроскопическими) и локальными (микроскопическими) характеристиками композитов одномерного строения. Распределение локальных характеристик в композитах может носить, вообще говоря, весьма различный характер: непрерывный, кусочно-непрерывный, кусочно-постоянный (последнее имеет место в слоистых композитах) и т. д. С целью охвата таких случаев введем множество функций: $W = \{f(t) \in L_\infty([0,\ 1]):\ 1/f(t) \in L_\infty([0,\ 1])$, и для любой $f(t)$ найдется число $\xi(f) > 0$ такое, что $f(t) \geqslant \xi(f)$ для почти всех $t \in [0,\ 1]\}$.

Множество W содержит перечисленные выше типы функций, которыми практически исчерпывается множество возможных распределений локальных характеристик композитов. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что набор функций $(c,\ a,\ E,\ A)(t)$ — локальные характеристики композита — принадлежит множеству W^4. Соответственно формулы (1)—(4) задают отображение $I : (c,\ a,\ E,\ A) \in W^4 \to R^{16}$ из множества распределений локальных характеристик композита в множество значений его осредненных характеристик. Обозначим через $I(W^4)$ образ множества W^4 при отображении I, $I(W^4) = \{\mathbf{x} \in R^{16}$: существует набор функций $(c,\ a,\ E,\ A)(t) \in W^4$ такой, что $I(c,\ a,\ E,\ A) = \mathbf{x}\}$.

Задача о построении композиционного материала одномерного строения с заданными осредненными характеристиками ставится следующим образом: желательно иметь материал, обладающий заданным набором теплофизических и жесткостных характеристик: c^0, a^0_{ij}, H^0_{ijkl}, A^0_{ij}. Требуется: 1) установить, может ли материал с указанными характеристиками быть создан в классе композитов одномерного строения, 2) если первый вопрос решается положительно, указать способ создания такого материала. Нетрудно видеть, что материал с заданным набором осредненных характеристик может быть создан в классе композитов одномерного строения тогда и только тогда, когда $\left(c^0,\ a^0_{ij},\ H^0_{ijkl},\ A^0_{ij}\right) \in I(W^4)$. Значит, для решения первой части задачи достаточно дать описание множества $I(W^4)$, решение второй ее части сводится к следующему: для каждого элемента $\mathbf{x} \in I(W^4)$ требуется указать способ построения набора функций $(c,\ a,\ E,\ A)(t) \in W^4$ — локальных характеристик композита такого, что $I(c,\ a,\ E,\ A) = \mathbf{x}$ (т. е. решить задачу синтеза [8, 9] для отображения I).

Перейдем к решению поставленной задачи. Заметим, что формулы (1), (2) и (3), (4) независимы и даваемые ими осредненные характеристики композита находятся во взаимно однозначном соответствии с функционалами вида

$$\int_0^1 u_1(t)\,dt,\quad \int_0^1 \frac{dt}{u_1(t)},\quad \int_0^1 u_2(t)\,dt,\quad \int_0^1 u_1(t)\,u_2(t)\,dt \tag{5}$$

(для (3), (4) $u_1(t) = E(t)$, $u_2(t) = A(t)$; в (1), (2) входят функционалы первого и второго типа). В силу сказанного решение вопросов 1, 2 достаточно провести для заданного формулами (5) отображения J множества W^2 в R^4. Получим решение указанной задачи. Функции $(u_1(t),\ u_2(t)) \in W^2$ при этом будем рассматривать как управление, заданное на отрезке с концами $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, и использовать результаты [8, 9]. В процессе решения потребуется вспомогательное множество $W_\xi = \{f(t) \in W : f(t) \geqslant \xi$ для почти всех $t \in [0,\ 1]\}$, $\xi > 0$ — параметр. Очевидно, что $W_\xi \subset W$ для любых $\xi > 0$.

Легко заметить, что образ множества W^2_ξ при отображении $J_3 : W^2 \to R^3$, задаваемом первыми тремя функционалами в (5), есть $J_3(W^2_\xi) =$

$= \{(x,\ y,\ z) \in R^3 : x \geqslant \xi,\ 1/x \leqslant y \leqslant 1/\xi,\ z \geqslant \xi\}$. Образ множества W^2 при том же отображении получается заменой ξ на 0 и $1/\xi$ на ∞.

Для вычисления образа множества W_ξ^2 при отображении J (5) предварительно рассмотрим задачу минимизации четвертого функционала в (5) при заданных значениях первых трех:

$$\int_0^1 u_1(t)\, u_2(t)\, dt \to \inf(\xi); \tag{6}$$

$$\int_0^1 u_1(t)\, dt = a, \quad \int_0^1 \frac{dt}{u_1(t)} = b, \quad \int_0^1 u_2(t)\, dt = c, \tag{7}$$

где $a > \xi$; $1/a < b < 1/\xi$; $c > \xi$;

$$(u_1(t),\ u_2(t)) \in W_\xi^2. \tag{8}$$

Задача (6)—(8) — Ляпуновская задача [9] с ограничениями на управление в виде неравенств (условие (8)). Согласно принципу максимума [9, с. 354], на ее решении $\mathbf{U}(t) = (U_1(t),\ U_2(t))$, если решение существует, функция Лагранжа $K(\mathbf{u}(t),\ \lambda) = \lambda_0 u_1(t) u_2(t) + \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2/u_1(t) + \lambda_3 u_2(t)$ при подходящем выборе множителей Лагранжа $\lambda_0 \geqslant 0$, λ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ удовлетворяет равенству

$$K(\mathbf{U}(t),\ \lambda) = \min_{\mathbf{u} \in W_\xi^2} K(\mathbf{u}(t),\ \lambda) \tag{9}$$

для почти всех $t \in [0,\ 1]$. Возьмем $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_3 = -\xi$, $\lambda_2 = 0$. Тогда равенство в (9) достигается на функциях, принимающих значения в множестве $V_\xi = \{(x,\ y) \in R^2\colon\ x = \xi,\ y \geqslant \xi$ любое или $x \geqslant \xi$ любое, $y = \xi\}$, в частности на функции $\mathbf{U}(t) = (U_1(t),\ U_2(t))$ вида

$$U_1(t) = \begin{cases} X & \text{при } t \in [0,\ H], \\ \xi & \text{при } t \in (H,\ 1], \end{cases} \qquad U_2(t) = \begin{cases} \xi & \text{при } t \in [0,\ H], \\ Y & \text{при } t \in (H,\ 1], \end{cases} \tag{10}$$

где $0 \leqslant H \leqslant 1$; $X,\ Y \geqslant \xi$. Для функции (10) выбором $X,\ Y,\ H$ можно добиться выполнения равенств (7). Действительно, для $U_1(t)$, $U_2(t)$, заданных (10), равенства (7) есть

$$\begin{gathered} XH + \xi(1 - H) = a > \xi, \\ H/X + (1 - H)/\xi = b \in (1/a,\ 1/\xi), \\ \xi H + Y(1 - H) = c > \xi. \end{gathered} \tag{11}$$

Из первого равенства $H = (a - \xi)/(X - \xi) \in [0,\ 1]$. Подставив это выражение в левую часть второго равенства в (11), видим, что она есть $(X - \xi)/X(X - \xi) + (X - a)/\xi(X - \xi)$. Значения полученной функции при $X \in (a,\ \infty)$ пробегают интервал $(1/a,\ 1/\xi)$, в силу чего первые два уравнения в (11) разрешимы, а третье всегда может быть удовлетворено подходящим выбором $Y \geqslant \xi$. Таким образом, для функции $\mathbf{U}(t) = (U_1(t),\ U_2(t))$ при выборе $X,\ Y,\ H$ как решения системы (11) выполнены принцип максимума (9) и условия (7), (8). Кроме того, $\lambda_0 > 0$ и на множестве W_ξ $(\xi > 0)$ интегранты в (6), (7) непрерывны по u_1, u_2. Тогда применима часть 2 теоремы [9, с. 354], в силу которой $\mathbf{U}(t)$ (10) — решение задачи (6)—(8). Из (9) получаем, что минимальное значение интеграла (6) есть $\inf(\xi) = -\xi^2 + a\xi + b\xi$.

Теперь покажем, что при выполнении условий (7), (8) интегралу (6) можно придать любое значение, большее $\inf(\xi)$, в силу чего образ множества W_ξ^2 при отображении J (5) содержит множество $Z_\xi = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in R^4\colon\ x > \xi,\ 1/x < y < 1/\xi,\ z > \xi,\ t > -\xi^2 + x\xi + y\xi\}$. С этой целью введем в рассмотрение специальную игольчатую вариацию $\mathbf{V}(t)$ функции $\mathbf{u}(t) \in W_\xi^2$, определяемую формулой

$$V_i(t) = \begin{cases} u_i(t(1 + \delta)) & \text{при } t \in [0, 1/(1 + \delta)], \\ K_i \delta^{-1/2} & \text{при } t \in (1/(1 + \delta),\ 1], \end{cases} \qquad i = 1,2. \tag{12}$$

Здесь $\infty > C \geqslant K_1, K_2 \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ — параметры, удовлетворяющие условию $K_i\delta^{-1/2} \geqslant \xi$ $(i = 1, 2)$, в силу которого $\mathbf{V}(t) \in W^2_\xi$. Если обозначить $(a, b, c) = J_3(\mathbf{u}(t))$ значения первых трех функционалов на функции $\mathbf{u}(t) \in W^2_\xi$, то

$$\int_0^1 V_1(t)\,dt = \frac{a}{1+\delta} + K_1\delta^{\frac{1}{2}}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{V_1(t)} = \frac{b}{1+\delta} + \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{K_1}, \tag{13}$$

$$\int_0^1 V_2(t)\,dt = \frac{c}{1+\delta} + K_2\delta^{\frac{1}{2}}, \quad \int_0^1 V_1(t)\,V_2(t)\,dt = \frac{-\xi^2 + a\xi + b\xi}{1+\delta} + K_1K_2.$$

Правые части (13) задают функцию $\mathbf{r}(a, b, c, d, K_1, K_2, \delta)$ переменной δ, где $a, b, c, d = -\xi^2 + a\xi + b\xi + K_1K_2$ и K_1, K_2 — параметры. Достаточно показать, что для любых $(x, y, z, t) \in Z_\xi$ уравнение $\mathbf{r}(a, b, c, d, K_1, K_2, \delta) = (x, y, z, t)$ разрешимо при $\delta = \delta_0 > 0$ за счет подходящего выбора $\mathbf{u}(t) \in W^2_\xi$ и величин δ_0, K_1, K_2. Из (13) видно, что уравнение $\mathbf{r}(a, b, c, d, K_1, K_2, \delta) = (x, y, z, t)$ разрешимо относительно параметров a, b, c, d в виде $(a, b, c, d) = \mathbf{r}^{-1}(x, y, z, t, K_1, K_2, \delta)$, где функция $\mathbf{r}^{-1}(x, y, z, t, K_1, K_2, \delta) \to (x, y, z, t)$ при $\delta \to 0$ и непрерывна по δ. В силу $(x, y, z, t) \in Z_\xi$ и открытости множества Z_ξ, начиная с некоторого $\delta = \delta_0 > 0$, точка (a, b, c) принадлежит внутренности множества $J_3(W^2_\xi)$. Следовательно, для этих (a, b, c) разрешима задача (6)—(8). Возьмем в качестве $\mathbf{u}(t)$ в (12) решение задачи (6)—(8), а K_1, K_2 выберем из условия $K_1\delta_0^{-1/2} \geqslant \xi$, $K_2\delta_0^{-1/2} \geqslant \xi$, $C \geqslant K_1$, $K_2 \geqslant 0$, $K_1K_2 = d - (-\xi^2 + a\xi + b\xi)$ (поскольку $(a, b, c, d) \in Z_\xi$, начиная с некоторого $\delta_0 > 0$, то при $\delta < \delta_0$ величина $d - (-\xi^2 + a\xi + b\xi) > 0$ и выписанная система разрешима). Следовательно, для вариации (12) функции $\mathbf{U}(t)$ при указанном выборе $\delta_0 > 0$, K_1, K_2 выполняется равенство $J(\mathbf{V}(t)) = (x, y, z, t)$. Подытожим полученные результаты.

Предложение 1: а) образ множества W^2 при отображении J, заданном (5), совпадает с множеством $Z = \{(x, y, z, t) \in R^4\colon x > 0,\ y > 1/x,\ z > 0,\ t > 0\}$ с точностью до точек, принадлежащих границе указанного множества; б) любая точка множества Z может быть получена как значение отображения J (5) на кусочно-постоянной функции, принимающей не более трех различных значений.

Случай «а» предложения 1 легко получается предельным переходом при $\xi \to 0$ из предыдущих результатов. По поводу «б» отметим, что один из способов построения указанной в нем функции изложен выше (это вариация (12) функции $\mathbf{U}(t)$, определяемой из решения задачи (6)—(8) при соответствующем выборе величин $\delta_0 > 0$, K_1, K_2).

Перейдем к механической интерпретации полученных результатов. Предложение 1 позволяет дать описание множества всех возможных осредненных характеристик композиционных материалов одномерного строения (задача 1) и указать способ образования (синтеза) композитов с любыми из возможных характеристик (задача 2).

Предложение 2: а) композиционные материалы одномерного периодического строения, образованные из изотропных компонентов, могут иметь следующие осредненные характеристики и не могут иметь иных (с точностью до границ перечисляемых множеств):

теплоемкость

$$\hat{c} = X\ (X > 0); \tag{14}$$

тензор теплопроводности

$$\hat{a}_{11} = Y,\ \hat{a}_{22} = \hat{a}_{33} = Z\ (Z > 0,\ Y > 1/Z); \tag{15}$$

модули Юнга E_i, коэффициенты Пуассона ν_{ij} и модули сдвига G_{ij}

$$E_1 = \frac{(1-\nu)\,x}{(1+\nu)(1-2\nu)\,xy + 2\nu^2}, \quad E_2 = E_3 = x, \tag{16}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \frac{\nu\,(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\,xy + 2\nu^2}, \quad \nu_{23} = \nu,$$

$$G_{12} = G_{13} = \frac{2}{(1+\nu)\,y}, \quad G_{23} = \frac{2x}{1+\nu};$$

тензор коэффициентов теплового расширения

$$A_{11} = \frac{1+\nu}{1-\nu}z - \frac{2\nu}{1-\nu}\frac{t}{x}, \quad A_{22} = A_{33} = \frac{t}{x} \tag{17}$$

$$(x > 0,\ y > 1/x,\ z > 0,\ t > 0).$$

Переменные X, Y, Z, x, y, z, t в (14)—(17) в указанных для них областях изменения принимают независимые значения (не указанные явно компоненты тензоров с точностью до известных симметрий равны нулю); б) любые из возможных осредненных характеристик, указанных в (14)—(17), могут быть получены в качестве осредненных характеристик композита слоистого строения, образованного не более чем из трех различных материалов. Предложение 2 — прямое следствие предложения 1 и формул (1)—(4).

Замечание 1. Под композитом слоистого строения понимается композит одномерного строения, локальные характеристики которого — кусочно-постоянные функции. К указанному классу принадлежат композиты, получаемые сваркой, склейкой, послойным напылением и т. д. слоев однородных материалов. Из предложения 2 (случай «б») следует, что любые возможные осредненные характеристики композиционных материалов одномерного строения (в частности, композитов с непрерывным распределением локальных характеристик) могут быть достигнуты в классе композитов слоистого строения, наиболее технологичных в изготовлении.

Замечание 2. Число материалов, используемых для создания композита, конечно, может быть и более трех. Однако использование более трех материалов не расширяет множества значений осредненных характеристик, которые могут быть достигнуты.

На основании предложения 2 можно предложить следующую процедуру проектирования композитов одномерного строения с заданными осредненными характеристиками.

1. Приравняем соответствующие левые части формул (14)—(17) требуемым значениям осредненных характеристик c^0, a^0_{ij}, E^0_i, ν^0_{ij}, G^0_{ij}, A^0_{ij}. Получим систему алгебраических уравнений относительно переменных X, Y, Z, x, y, z, t.

2. Если полученная система не разрешима или для ее решения не выполнены приведенные в (14)—(17) неравенства, то материал с требуемыми характеристиками вообще не может быть создан в рассматриваемом классе композитов.

3. Если система разрешима и ее решение удовлетворяет приведенным в (14)—(17) неравенствам, то материал с требуемыми характеристиками может быть создан в классе композитов одномерного строения. Для получения проекта такого материала достаточно изложенными выше методами (см. формулы (6)—(13) и сопровождающий их текст) построить функции $(c(t), a(t), E(t), A(t)) \in W^4$ такие, что $\langle c \rangle = X$, $\langle 1/a \rangle = Y$, $\langle a \rangle = Z$, $\langle E \rangle = x$, $\langle 1/E \rangle = y$, $\langle A \rangle = z$, $\langle EA \rangle = t$. Функции $c(t)$, $a(t)$, $E(t)$, $A(t)$, где $t \in [0, 1]$, задают распределение материалов на периоде композита ($t = x_1/\varepsilon$). Композит одномерного периодического строения (с периодом $\varepsilon \ll 1$), имеющий локальные характеристики $c(x_1/\varepsilon)$, $a(x_1/\varepsilon)$, $E(x_1/\varepsilon)$, $A(x_1/\varepsilon)$, в силу (1)—(4) и п. 1, 2 будет обладать требуемыми осредненными характеристиками c^0, a^0_{ij}, E^0_i, ν^0_{ij}, G^0_{ij}, A^0_{ij}.

Замечание 3. При построении функций $c(t)$, $a(t)$, $E(t)$, $A(t)$ изложенными в (6)—(13) методами получаем проект композита, образованного из трех материалов. Как видно из (10), 13), величины $\mu_1 = H/(1 + \delta_0)$, $\mu_2 = 1 - H/(1 + \delta_0)$, $\mu_3 = \delta_0/(1 + \delta_0)$ равны объемным содержаниям образующих композит материалов.

Замечание 4. Формулы (6)—(13) дают один из возможных способов получения решения (очевидно, не единственного) задачи создания композита с заданными осредненными характеристиками. Другой способ решения указанной задачи, вытекающий из «б» предложения 2, состоит в поиске решения в классе композитов, образованных из конечного числа материалов (не менее трех).

Пример — существование композита, обладающего отрицательным коэффициентом теплового расширения, образованного из компонентов с положительными коэффициентами теплового расширения (задача синтеза).

Рассмотренные композиты образованы из компонентов, имеющих коэффициенты теплового расширения $A(x_1/\varepsilon) > 0$ (т. е. из компонентов, расширяющихся при нагревании). Композиту в целом за счет управления его локальными характеристиками можно придавать новые свойства, отличные от свойств его компонентов. Покажем, что, в частности, можно добиться отрицательности A_{11} (т. е. того, что в направлении оси Ox_1 композит в целом будет вести себя как материал, сжимающийся при нагревании). Согласно первой формуле (17), возможные значения осредненного коэффициента теплового расширения A_{11} определяются равенством

$$A_{11} = \frac{1+\nu}{1-\nu} z - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{t}{x} \quad (x > 0,\ z > 0,\ t > 0,\ y > 1/x). \tag{18}$$

Как видно из (18), множество возможных значений A_{11} есть $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, композит, обладающий отрицательным коэффициентом A_{11}, существует.

Рассмотрим задачу синтеза композита с отрицательным коэффициентом A_{11}. Один путь ее решения (на основании формул (6)—(13)) изложен выше; проиллюстрируем другой метод, отмеченный в замечании 4. Согласно предложению 2, все возможные значения A_{11} могут быть получены в классе слоистых композитов, образованных не более чем из трех материалов. Пусть E_i, A_i, H_i — модуль Юнга, коэффициент теплового расширения и объемное содержание i-го материала ($i = 1, 2, 3$). Тогда все возможные значения A_{11} даются формулой (18), в которой следует положить

$$x = \sum_{i=1}^{3} E_i H_i, \quad y = \sum_{i=1}^{3} H_i/E_i,$$

$$z = \sum_{i=1}^{3} A_i H_i, \quad t = \sum_{i=1}^{3} E_i A_i H_i,$$

$$0 \leqslant H_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{3} H_i = 1, \quad E_i, A_i > 0.$$

Задача синтеза сводится при этом к конечномерной. После ее дискретизации приходим к задаче конечного перебора с целью поиска наборов

Композиция	i	$E_i \cdot 10^{10}$, Па	$A_i \cdot 10^{-6}$, К$^{-1}$	H_i	$A_{11} \cdot 10^{-6}$, К$^{-1}$
Иридий	1	52,8	6,5	0,1	—3,79
Инвар	2	13,5	0,2	0,9	
Тефлон	1	9,8	220	0,1	—49,0
Гетинакс	2	1,2	20	0,9	
Иридий	1	52,8	6,5	0,05	
Вольфрам	2	39	4,5	0,05	—2,79
Инвар	3	13,5	0,2	0,9	

величин E_i, A_i, H_i ($i = 1, 2, 3$), доставляющих требуемые значения A_{11}. Указанный перебор реализован на ЭВМ БЭСМ-6. Исходя из выданных ЭВМ решений задачи синтеза композита с отрицательным коэффициентом A_{11} (ЭВМ выдано порядка ста проектов) подобраны композиции из реально существующих материалов, обладающие отрицательным коэффициентом A_{11}. Указанные композиции представлены в таблице (при совпадении характеристик двух слоев композиция приводится как двухкомпонентная).

Авторы благодарят участников семинара ОМДТТ Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО АН СССР за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Spagnolo S.** Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche.— Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1968, v. 4, N 22.
2. **Бахвалов Н. С.** Осредненные характеристики тел с периодической структурой.— ДАН СССР, 1974, № 5.
3. **Ха Тьен Нгоан.** О сходимости решений краевых задач для последовательности эллиптических систем.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1977, № 5.
4. **Жиков В. В., Козлов С. М. и др.** Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов.— УМН, 1979, т. 34, № 5(209).
5. **Колпаков А. Г.** К определению некоторых эффективных характеристик композиционных материалов.— В кн.: Пятый Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981.
6. **Колпаков А. Г.** Эффективные термоупругие характеристики неоднородного материала.— В кн.: Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1981, вып. 49.
7. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов.— М.: МГУ, 1984.
8. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. и др.** Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Физматгиз, 1961.
9. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление.— М.: Наука, 1979.

Поступила 29/X 1985 г.