УДК 532.526.5+551.213.3

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ОБРАЗОВАНИЕ ПУЗЫРЬКОВ ПРИ ДЕКОМПРЕССИИ ВОДОНАСЫЩЕННОЙ МАГМЫ

С. И. Лежнин, Н. А. Прибатурин, А. Л. Сорокин

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: lezhnin@itp.nsc.ru

На основе классической теории нуклеации исследовано влияние вязкости на процесс образования пузырьков в водонасыщенной магме. Сравнение с экспериментальными данными подтверждает заметное влияние вязкости на скорость гомогенной нуклеации в магме.

Ключевые слова: гомогенная нуклеация, пересыщение, пузырьки, вязкость, магма.

Характер вулканических извержений в значительной мере определяется образованием и ростом пузырьков растворенных в магме газов, среди которых доминируют H_2O и CO_2 [1]. Динамика дегазации магмы зависит от количества образовавшихся пузырьков, для определения которого используются теоретические зависимости для скорости нуклеации [2, 3]. Однако эти зависимости не учитывают влияние вязкости магмы, которое очень велико [4].

Целью данной работы является вычисление скорости гомогенной нуклеации в водонасыщенной магме на основе классической теории нуклеации [5] с учетом влияния вязкости. Для случая кипения чистой жидкости скорость гомогенной нуклеации была вычислена с учетом влияния вязкости и теплопроводности в работе [6]. Предложенный в [6] метод используется в данной работе, причем для удобства сравнения результатов основные обозначения сохранены.

Напомним кратко основные положения классической теории нуклеации [5]. Предполагается, что зародыши новой фазы являются макроскопическими и функция распределения их по размеру $f(t,r)$ определяется из уравнения типа Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\Big(Af - B\,\frac{\partial f}{\partial r}\Big) = 0. \qquad (1)$$

Здесь A — скорость роста зародышей; B — коэффициент диффузии в “пространстве размеров”; J — скорость нуклеации. Для вычисления скорости роста закритических зародышей используется решение соответствующей континуальной задачи (теплопроводности, диффузии). При построении стационарного решения уравнения (1) граничное условие при $r \to 0$ имеет вид $f(r) = f_0(r)$, где $f_0(r)$ — функция распределения зародышей по размерам, определяемая согласно термодинамической теории флуктуаций. Граничное условие при $r \to \infty$ $J = \text{const}$. Из этих условий следует [5]

$$B = -A\Big(\frac{d\ln f_0}{dr}\Big), \qquad J = 2\sqrt{\frac{\sigma}{kT}}\,B(r_k)f_0(r_k),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного фонда INTAS (код проекта 01-0106).

где r_k — радиус критического зародыша; σ — поверхностное натяжение на границе фаз; k — постоянная Больцмана; T — температура среды.

Для условий дегазации водонасыщенной магмой по описанной схеме в [2] получено выражение

$$J = \frac{D_c C_0^2}{8\pi} \sqrt{\frac{kT}{\sigma}}\, \frac{2\sigma}{r_k P_0} \exp\Big(\frac{V_m \Delta P}{kT}\Big) \exp\Big(-\frac{4\pi\sigma}{3kT}\, r_k^2\Big). \tag{2}$$

Здесь C_0 — начальная концентрация воды в магме; D_c — коэффициент диффузии; P_0 — начальное давление при концентрации C_0; ΔP — перепад давления, соответствующий r_k; V_m — объем молекулы воды в расплаве. При выводе зависимости (2) предполагалось выполнение условия механического равновесия околокритических зародышей $p = p_0 + 2\sigma/r$, что позволило определить A из решения диффузионной задачи (p — давление пара в пузырьке радиуса r; p_0 — давление в расплаве).

В рамках классической теории нуклеации предэкспоненциальный множитель не определяется однозначно [5]. На основе модели “частоты перехода молекул” в [3] для скорости нуклеации получена зависимость

$$J = 2\, \frac{n_0^2 V_m D_c}{a_0} \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \exp\Big(-\frac{4\pi}{3}\, \frac{\sigma}{kT} \Big(\frac{2\sigma}{\Delta P}\Big)^2\Big). \tag{3}$$

Здесь n_0 — концентрация (недиссоциированных) молекул воды; a_0 — расстояние между молекулами воды в расплаве. Сравнение зависимостей (2) и (3), проведенное в работе [7], показало, что в области интенсивной нуклеации предэкспоненциальные множители различаются не более чем на порядок. Отметим, что зависимости (2) и (3) не содержат явно вязкость магмы.

Перейдем к решению поставленной задачи. Вместо уравнения (1) в [6] используется эквивалентное уравнение

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial n} = \frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n}\Big(\dot n f_n - D\, \frac{\partial f_n}{\partial n}\Big) = 0$$

для функции распределения зародышей f_n по числу молекул n с нормировкой $\displaystyle\int_1^\infty f_n\, dn = N_b$ (N_b — число зародышей в единице объема). Здесь и далее точкой обозначена производная по времени. Построение решения этого уравнения по схеме [5] приводит к выражению

$$J = \frac{C_0 kT}{4\pi\sigma} \Big(\frac{d\dot n}{dr}\Big)_k \sqrt{\frac{\sigma}{kT}} \exp\Big(-\frac{4}{3}\, \frac{\pi\sigma r_k^2}{kT}\Big). \tag{4}$$

Используя формулу Герца — Кнудсена, запишем выражение для скорости изменения числа молекул в пузырьке

$$\dot n = \pi\beta u_t r^2 [p_r - p]/(kT), \tag{5}$$

где p_r — равновесное давление пара на поверхности пузырька; $u_t = \sqrt{8kT/(\pi m)}$ — средняя тепловая скорость молекул пара; β — коэффициент конденсации. Процесс диффузии в окрестности пузырька определяется решением стационарного уравнения $\Delta C = 0$ с граничными условиями $C(r) = C_r$, $C(\infty) = C_m$, которое имеет вид

$$C(\bar r) = C_m + (C_r - C_m) r/\bar r$$

($\bar r$ — расстояние от центра пузырька). Используя это решение, получим

$$\dot n = 4\pi r^2 \Big(\frac{\partial C}{\partial \bar r}\Big)_{\bar r = r} = 4\pi r D_c (C_m - C_r), \qquad C_r = C_m - \frac{\dot n}{4\pi r D_c}.$$

При локальном термодинамическом равновесии на поверхности пузырька связь p_r с концентрацией молекул воды определяется законом Генри $p_r = AC_r^2$. Подставляя эти выражения в (5), получим

$$\dot{n} = \frac{\pi\beta u_t r^2}{kT}\Big[A\Big(C_m - \frac{\dot{n}}{4\pi r D_c}\Big)^2 - p\Big].$$

Для околокритических пузырьков достаточно точным является приближение

$$\dot{n} = \frac{\pi\beta u_t r^2}{kT}\Big[AC_m^2 - 2AC_m\,\frac{\dot{n}}{4\pi r D_c} - p\Big].$$

После преобразований получим

$$\dot{n} = \pi\beta u_t r^2[AC_m^2 - p]/(kT(1+\delta)), \tag{6}$$

где $\delta = \beta u_t r A C_m/(2D_c kT)$. Для вычисления производной $(d\dot{n}/dr)_k$ в [6] использовалось уравнение Рэлея — Ламба

$$\rho r\ddot{r} + 3(\dot{r})^2/2 = p - p_0 - 2\sigma/r - 4\eta\dot{r}/r,$$

описывающее динамику сферического пузырька в вязкой жидкости. Выражая давление в пузырьке из этого уравнения, пренебрегая членом $3(\dot{r})^2/2$ ($\dot{r} = 0$ при $r = r_k$) и используя $\ddot{r} = \dot{r}\,d\dot{r}/dr$, после подстановки в (6) придем к выражению

$$\dot{n} = \frac{\pi\beta u_t r^2}{kT(1+\delta)}\Big[AC_m^2 - p_0 - \frac{2\sigma}{r} - 4\eta\,\frac{\dot{r}}{r} - \rho r\dot{r}\,\frac{d\dot{r}}{dr}\Big].$$

Вычислим производную $d\dot{n}/dr$, пренебрегая производной первого сомножителя и всеми членами, содержащими $(\dot{r})^2$. После громоздких, но простых преобразований получим при $r = r_k$

$$\Big(\frac{d\dot{n}}{dr}\Big)_k = \frac{\pi\beta u_t r_k^2}{kT(1+\delta_k)}\Big\{\frac{2\sigma}{r^2} - \frac{4\eta}{r}\,\frac{d\dot{r}}{dr} - \rho r\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)^2\Big\}_k. \tag{7}$$

Пренебрегая неидеальностью пара в пузырьке, запишем

$$\dot{n} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{4}{3}\,\frac{\pi r^3 p}{kT}\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{4}{3}\,\frac{\pi r^3}{kT}\Big[\rho r\ddot{r} + p_0 + \frac{2\sigma}{r} + 4\eta\,\frac{\dot{r}}{r}\Big]\Big).$$

Дифференцируя это выражение так же, как и в предыдущем случае, и вычисляя производную при $r = r_k$, получим

$$\Big(\frac{d\dot{n}}{dr}\Big)_k = \frac{4\pi r_k^2}{kT}\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)_k\Big[p_0 + \frac{4\sigma}{3r_k} + \frac{\gamma\eta}{3}\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)_k + \frac{1}{3}\,\rho r^2\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)_k^2\Big]. \tag{8}$$

Приравнивая правые части (7) и (8) друг к другу, получим кубическое уравнение относительно $d\dot{r}/dr$

$$\frac{\rho r_k^2}{3}\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)_k^3 + \Big(\frac{4\eta}{3} + \frac{\beta u_t \rho r_k}{4(1+\delta_k)}\Big)\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)_k^2 + \Big(p_0 + \frac{4\sigma}{3r_k} + \frac{\eta\beta u_t}{(1+\delta_k)r_k}\Big)\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)_k - \frac{\sigma\beta u_t}{2(1+\delta_k)r_k^2} = 0.$$

Вводя безразмерные переменные

$$z = \frac{(1+\delta_k)r_k}{\beta u_t}\Big(\frac{d\dot{r}}{dr}\Big)_k, \quad \omega = \frac{3}{2}\,\frac{\beta u_t\eta}{\sigma(1+\delta_k)}, \quad \omega' = \frac{1}{3}\,\frac{(\beta u_t)^2\rho r_k}{\sigma(1+\delta_k)^2}, \quad b = \frac{2\sigma}{p_k r_k},$$

приведем уравнение к безразмерному виду

$$\omega' z^3 + \frac{8}{9}\,\omega\Big(1 + \frac{27}{32}\,\frac{\omega'}{\omega}\Big)z^2 + \frac{2}{3}\Big(\frac{3-b}{b} + \omega\Big)z - \frac{1}{2} = 0.$$

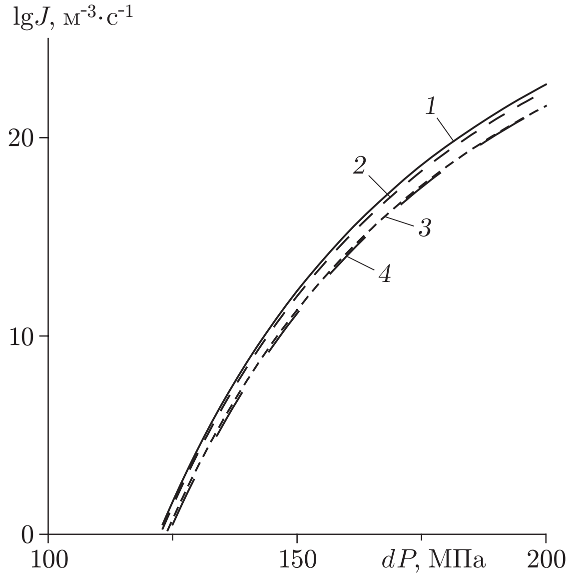

Рис. 1. Зависимость скорости нуклеации от давления пересыщения при различных значениях β:
1–3 — расчет по формуле (9) (*1* — $\beta = 1$; *2* — $\beta = 10^{-5}$; *3* — $\beta = 10^{-6}$); *4* — расчет по формуле (2)

Предполагая $\omega'/\omega^2 \ll 1$ (пренебрегая инерционными членами), получим уравнение

$$z^2 + \frac{3}{4}\,\frac{1}{\omega}\Big(\frac{3-b}{b} + \omega\Big)z - \frac{9}{16}\,\frac{1}{\omega} = 0.$$

Подставляя положительное решение этого уравнения в (7), а полученный результат — в (4), приходим к следующему выражению для скорости нуклеации:

$$J = 3C_0\,\frac{\beta u_t}{1+\delta_k}\sqrt{\frac{\sigma}{kT}}\,\frac{1}{b}\Big(\omega + \frac{3+b}{b} + \sqrt{\Big(\omega + \frac{3-b}{b}\Big)^2 + 4\omega}\,\Big)^{-1}\exp\Big(-\frac{4\sigma r_k^2}{3kT}\Big). \qquad (9)$$

Кроме коэффициентов вязкости, диффузии и постоянной закона Генри в предэкспоненту (9) входит коэффициент конденсации, который должен вычисляться методами кинетической теории газов. На рис. 1 представлено сравнение полученной зависимости при различных значениях β с зависимостью (2). Расчеты проведены при следующих значениях физических параметров: $C_0 = 3{,}45 \cdot 10^{27}$ м$^{-3}$, $P_0 = 200$ МПа, $T = 1173$ К, $D_c = 2{,}3 \cdot 10^{-11}$ м^2/с (соответствующих условиям экспериментов [8]), $\sigma = 0{,}08$ Н/м, $\eta = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с. Изменение β от 1 до 10^{-5} слабо влияет на скорость нуклеации, а при $\beta = 10^{-6}$ зависимости (2) и (9) практически совпадают.

В общем случае коэффициент конденсации может зависеть от кривизны поверхности, пересыщения и т. д. Все величины, входящие в (9), вычисляются для критического зародыша. Предполагая, что при малой вязкости зависимости (2) и (9) различаются незначительно и для околокритических пузырьков приближенно выполняется условие механического равновесия (как в [2]), определим β из условия равенства диффузионного и кинетического потоков молекул на поверхности околокритического пузырька:

$$\dot n = \pi\beta u_t r^2(p_r - p)/(kT) = 4\pi r D_c(C_m - C_r)$$

и

$$\beta = \frac{4D_c kT}{u_t r}\,\frac{C_m - C_r}{p_r - p}.$$

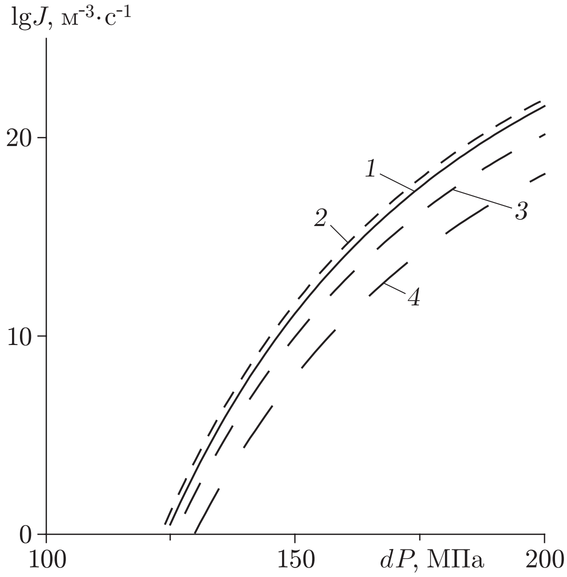

Рис. 2. Зависимость скорости нуклеации от давления пересыщения:
1 — расчет по формуле (2); *2–4* — расчет по формуле (10) (*2* — $\eta = 10^2$ Па · с; *3* — $\eta = 10^4$ Па · с; *4* — $\eta = 10^6$ Па · с)

При $r \to r_k$ имеем $C_r \to C_m$, $p \to p_r(C_m)$. С учетом этого получим выражение для коэффициента конденсации

$$\beta = \frac{4D_c kT}{u_t r_k}\Big(\frac{dP}{dC}\Big)^{-1}_{C_m}.$$

При таком выборе β формулы для безразмерных параметров и полученная зависимость принимают следующий вид:

$$\omega = \frac{3}{2}\,\frac{\eta D_c kT}{\sigma r_k A C_m}, \qquad \omega' = \frac{1}{3}\Big(\frac{D_c kT}{AC_m}\Big)^2\frac{\rho}{r_k\sigma}, \qquad b = \frac{2\sigma}{p_k r_k},$$
$$J = \frac{3C_0^2 D_c kT}{r_k p_0}\sqrt{\frac{\sigma}{kT}}\frac{1}{b}\Big(\omega + \frac{3+b}{b} + \sqrt{\Big(\omega + \frac{3-b}{b}\Big)^2 + 4\omega}\Big)^{-1}\exp\Big(-\frac{4\sigma r_k^2}{3kT}\Big), \tag{10}$$

а условие $\omega'/\omega^2 \ll 1$ сводится к условию $\omega'/\omega^2 = 4\rho\sigma r_k/(27\eta^2) \ll 1$, которое выполняется с высокой точностью для характерных значений физических параметров магмы. Таким образом, при вычислении предэкспоненциального множителя учтен вклад давления и вязких сил в динамику пузырька, а условие механического равновесия пузырька использовано только для приближенного вычисления коэффициента конденсации.

Сравнение зависимостей (10) и (2) при различных значениях вязкости представлено на рис. 2. Расчеты выполнены для следующих параметров: $C_0 = 3{,}45 \cdot 10^{27}$ м$^{-3}$, $P_0 = 200$ МПа, $T = 1173$ К, $D_c = 2{,}3\cdot 10^{-11}$ м^2/с, $\sigma = 0{,}08$ Н/м. При малой вязкости зависимости практически совпадают, а при $\eta = 10^4$ Па · с скорость нуклеации уменьшается на один–два порядка в зависимости от пересыщения. Наиболее значительно влияние вязкости при $\eta = 10^6$ Па · с.

Для изучения механизма гомогенного зародышеобразования в магме проведены экспериментальные исследования при высоких температурах и давлениях [8, 9], соответствующих условиям в канале вулкана. Эксперименты [9] проводились при начальном давлении 200 МПа и температуре 1073 К. Однако режим гомогенного зародышеобразования в этих экспериментах наблюдался только для образцов, содержащих (кроме H_2O) значительное

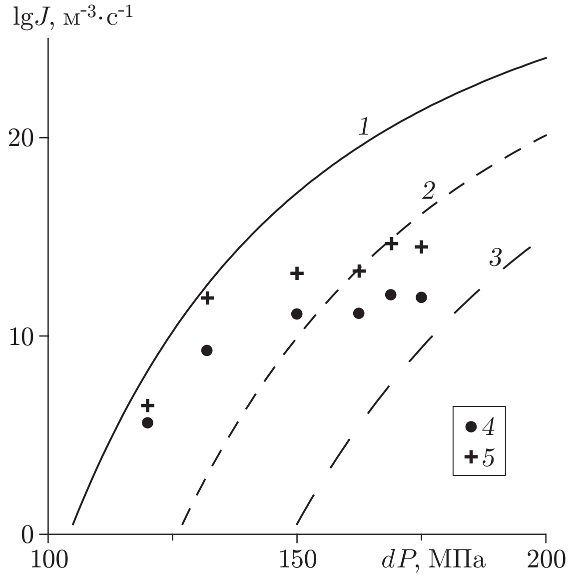

Рис. 3. Зависимость скорости нуклеации от давления пересыщения при различных значениях поверхностного натяжения:
1–3 — расчеты по зависимости (10) (*1* — $\sigma = 0{,}07$ Н/м; *2* — $\sigma = 0{,}08$ Н/м; *3* — $\sigma = 0{,}09$ Н/м); *4* — экспериментальные данные [9]; *5* — данные [9] с учетом корректировки

количество CO_2. Впервые режим гомогенного зародышеобразования для водонасыщенных образцов наблюдался в экспериментах [8], проведенных при более высокой температуре (1173 K).

Сравнение результатов расчетов по (10) с экспериментальными данными [8] для различных значений поверхностного натяжения представлено на рис. 3, где приведены также результаты корректировки экспериментальных данных по зависимости для длительности нуклеации, полученной в [10]. Скорость нуклеации определялась в [8] по полному времени декомпрессии. Однако интервал времени, на котором происходит интенсивная нуклеация, мал по сравнению с полным временем декомпрессии. Для корректировки скорости нуклеации измеренная в [8] числовая концентрация пузырьков делилась на длительность нуклеации, вычисленную по зависимости из [10]. Как следует из рис. 3, в результате корректировки скорость нуклеации увеличивается на два–три порядка. При сравнении необходимо учитывать, что на экспериментальные данные при умеренной скорости декомпрессии (0,025 МПа/с) может влиять гетерогенная нуклеация на стенках капсулы. Это отмечено в [8], где обработка данных этих опытов проводилась с учетом остаточного содержания воды в образцах. Результаты, полученные при скорости декомпрессии 8,5 МПа/с, не имеют таких погрешностей. С учетом этих замечаний можно сделать вывод, что $\sigma = 0{,}08$ Н/м. Это значение близкó к значению $\sigma = 0{,}076$ Н/м, для которого в [11] получено хорошее соответствие результатов расчета экспериментальным данным [3]. Отличие $\sigma = 0{,}08$ Н/м от значения $\sigma = 0{,}10 \div 0{,}11$ Н/м, полученного в [8] с использованием (3), связано с учетом влияния вязкости в зависимости (10).

Возможным подтверждением влияния вязкости на скорость нуклеации является различие результатов экспериментов [8] и [9]. Значения температуры в этих экспериментах различаются на 100 K. Это, по-видимому, является причиной того, что для близких начального содержания воды и давления гомогенная нуклеация в [9] не наблюдалась (для образцов без CO_2). Уменьшение массовой концентрации на 1 % и температуры на 100 K в этой области параметров приводит к увеличению вязкости на порядок [4]. Вычисленные с

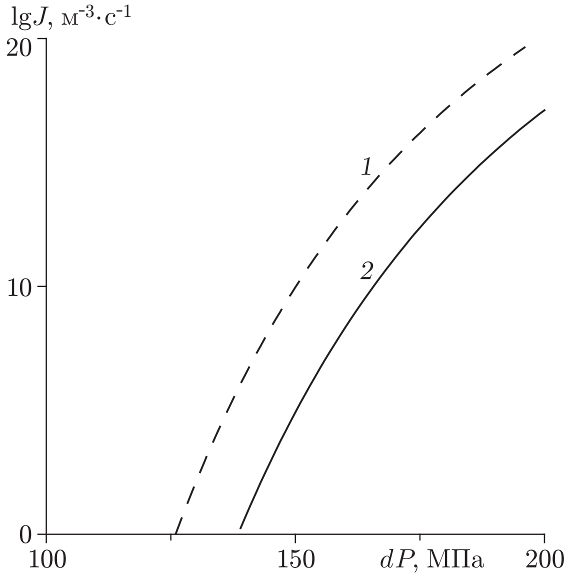

Рис. 4. Зависимость (10) скорости нуклеации от давления пересыщения при $\sigma = 0{,}08$ Н/м для условий экспериментов:
1 — $T = 1173$ К, $C = 5{,}2$ % [8]; *2* — $T = 1073$ К, $C = 4{,}6$ % [9]

Образец	dP, МПа	J_1, м^3/с	J_2, м^3/с
VGD6	160	$6{,}5 \cdot 10^{11}$	$2{,}18 \cdot 10^{8}$
VGD10	178	$1{,}2 \cdot 10^{16}$	$1{,}12 \cdot 10^{13}$
VGD13	190	$1{,}9 \cdot 10^{18}$	$2{,}81 \cdot 10^{15}$

учетом различия температур и содержания воды по зависимости (10) значения скорости нуклеации при $\sigma = 0{,}08$ Н/м различаются на пять–шесть порядков (рис. 4). Результаты расчета скорости нуклеации J_1 по формуле (3) и J_2 по формуле (10) для типичных условий экспериментов [9] представлены в таблице (где dP — уменьшение давления в эксперименте с указанным образцом). Расчеты J_1 проводились для $\sigma = 0{,}105$ Н/м (использованного в [9] для проведения оценок по (3)), а величина J_2 вычислялась при $\sigma = 0{,}08$ Н/м. При указанных пересыщениях J_2 на три порядка меньше J_1 даже при значительно меньшей величине поверхностного натяжения, что определяется влиянием вязкости. Однако полученные оценки скорости нуклеации значительно превышают порог чувствительности $J_0 = 10^4$ м^3/с, указанный в [9], и не дают однозначного объяснения отсутствия гомогенной нуклеации в этих экспериментах.

Полученная в данной работе зависимость учитывает влияние вязкости на скорость гомогенной нуклеации при декомпрессии водонасыщенной магмы. С соответствующей корректировкой эта зависимость может применяться для расчета влияния вязкости на скорость гетерогенной нуклеации. Проведенное сравнение с экспериментальными данными подтверждает заметное влияние вязкости на скорость гомогенной нуклеации в магме.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Слезин Ю. Б.** Механизм вулканических извержений. М.: Научный мир, 1998.
2. **Toramaru A.** Vesiculation process and bubble size distributions in ascending magmas with constant velocities // J. Geophys. Res. 1989. V. 94, N B12. P. 17.523–17.542.

3. **Hurwitz S., Navon O.** Bubble nucleation in rhyolitic melst: Experiments at high pressure, temperature, and water content // Earth Planet. Sci. Lett. 1994. V. 122. P. 267–280.
4. **Hess K.-U., Dingwell D. B.** Viscosities of hydrous leucogranitic melts: A non-Arrhenian model // Amer. Mineral. 1996. V. 81. P. 1297–1300.
5. **Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.** Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
6. **Каган Ю.** К кинетике кипения чистой жидкости // Журн. физ. химии. 1960. Т. 34, № 2. С. 92–101.
7. **Navon O., Lyakhovsky V.** Vesiculation processes in silicic magmas // The physics of explosive volcanic eruptions / Eds by J. S. Gilbert, R. S. J. Sparks. L.: Geol. Soc. London Spec. Publ., 1998. V. 145. P. 27–50.
8. **Mangan M., Sisson T.** Delayed, disequilibrium degassing in rhyolite magma: Decompression experiments and implications for explosive volcanism // Earth Planet. Sci. Lett. 2000. V. 183. P. 441–455.
9. **Mourtada-Bonnefoi C., Laporte D.** Experimental study of homogenous bubble nucleation in rhyolite magmas // Geophys. Res. Lett. 1999. V. 26. P. 3505–3508.
10. **Toramaru A.** Numerical study of nucleation and growth of bubbles in a viscous magmas // J. Geophys. Res. 1995. V. 100, N B2. P. 1913–1931.
11. **Чернов А. А., Кедринский В. К., Давыдов М. Н.** Спонтанное зарождение пузырьков в газонасыщенном расплаве при его мгновенной декомпрессии // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 162–168.

Поступила в редакцию 30/III 2004 г.,
в окончательном варианте — 11/V 2004 г.