ЛИТЕРАТУРА

1. **Абрамович Г. Н.** Теория центробежной форсунки.— В кн.: Промышленная аэродинамика. М., ЦАГИ, 1944.
2. **Гольдштик М. А.** К теории эффекта Ранка (закрученный поток газа в вихревой камере).—«Изв. АН СССР. ОТН», 1963, № 1.
3. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
4. **Вулис А. А., Устименко Б. П.** К вопросу об аэродинамической схеме потока в циклонной камере.—«Вестн. АН Каз. ССР», 1954, № 4.

УДК 532.516

РАСЧЕТ АВТОКОЛЕБАНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ СПИРАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОЛЬЦЕВОЙ ТРУБЕ

А. Л. Уринцев

(*Ростов-на-Дону*)

Проведен анализ устойчивости спирального течения между концентрическими цилиндрами, вызванного вращением внутреннего цилиндра и осевым градиентом давления по отношению к малым, но конечным вращательно-симметричным возмущениям.

Теоретическое рассмотрение устойчивости спиральных течений обычно проводится в рамках линейной теории и существенно использует упрощающие предположения: вращательную симметрию возмущений, малость зазора между цилиндрами, малость осевого числа Рейнольдса [1—5]. Ограничения на величину осевого потока отсутствуют в работе [6], где задача решена асимптотическим методом в приближении узкого зазора. Анализ устойчивости без ограничений на величину зазора, основанный на уравнениях идеальной жидкости, проведен в [7]; случай скользящих один относительно другого цилиндров и невращательно-симметричных возмущений рассмотрен в [8]. Влияние осевого потока на границы устойчивости изучалось экспериментально в [9—14], автоколебания в кольцевой трубе наблюдались в [11, 12].

Подробное численное исследование устойчивости спиральных течений проведено в [15, 16], где наряду с вращательно-симметричными изучены трехмерные колебания и рассчитаны нейтральные кривые в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса, зазора и продольных волновых чисел. Строгое доказательство существования периодического по времени режима, возникающего в результате потери устойчивости спирального потока, вызванного вращением и очень медленным поступательным движением цилиндров, содержится в [17]; один пример рождения конвективных автоколебаний потока вязкой жидкости в цилиндрической трубе рассмотрен в [18].

В данной работе методом Ляпунова—Шмидта [17, 19—21] для случая узкощелевого канала, когда наиболее опасны осесимметричные возмущения [16], произведен расчет амплитуды вторичного нестационарного ламинарного режима и исследована его устойчивость при различных значениях числа Рейнольдса Re_z, построенного по осевой скорости. Показано, что если параметр $\mathrm{Re}_z < 40$ и число Рейнольдса вращательной компоненты спирального потока превышает критическое значение, даваемое линейной теорией, то мягко возбуждается устойчивое автоколебательное течение, имеющее вид волн, бегущих в жидкости вдоль оси цилиндров. Основное спиральное течение при этом теряет устойчивость.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ с коэффициентом кинематической вязкости ν заполняет пространство между двумя концентрическими цилиндрами радиусов r_1 и $r_2 (r_1 < r_2)$. Внутренний цилиндр вращается равномерно с угловой скоростью Γ, внешний — неподвижен. Примем за единицы длины, времени и массы величины $r_2 - r_1$, $(r_2 - r_1)^2/\nu$, $\rho(r_2 - r_1)^3$ и введем цилиндрическую систему координат r, θ, z', совместив ось z' с осью цилиндров. Интересуясь периодическими по времени режимами течения, обладающими вращательним симметрией ($\partial/\partial\theta \equiv 0$) и заданной периодичностью вдоль оси z', будое разыскивать решения безразмерных уравнений гидродинамики в форме Громеко — Лэмба

$$\partial \mathbf{v}'/\partial t + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}' + \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\omega}' + \mathrm{grad}\, h' = 0,\ \boldsymbol{\omega}' = \mathrm{rot}\, \mathbf{v}',\ \ \mathrm{div}\, \mathbf{v}' = 0, \tag{1.1}$$

зависящие только от переменных r и $z = z' - c't$ (c' — неизвестная фазовая скорость волн). Как доказано в [17], всякий изолированный предельный цикл системы (1.1) в осесимметричном случае допускает такое представление вследствие инвариантности уравнений относительно сдвига $z' \to z' + \mathrm{const}$. Разыскиваемые решения должны быть $2\pi/\alpha$-периодическими по z (α — заданное волновое число). Как видно из уравнений движения, средний по периоду градиент полного давления не зависит от поперечной координаты r, предположим его заданным

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int\limits_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{\partial h'}{\partial z} dz = \mathrm{const}.$$

Перечисленным условиям удовлетворяет не зависящее от z стационарное решение (спиральное течение)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{V}(r) = (0, V_\theta, V_z);\ \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega}(r) = (0, \Omega_\theta, \Omega_z) = \mathrm{rot}\, \mathbf{V}; \tag{1.2}$$
$$h' = H = \mathrm{const}\, z + 0{,}5\left(V_\theta^2 + V_z^2\right) + \int V_\theta^2/r dr$$

с компонентами скорости

$$V_\theta = \mathrm{Re}_\theta (d_1/r - d_2 r);\ V_z = \mathrm{Re}_z [d_3(r^2 - \xi^2) - d_4 \ln (r/\xi)],$$
$$\xi = r_1/(r_2 - r_1),\ d_2 = \xi/(1 + 2\xi),\ d_1 = (1 + \xi)^2 d_2,$$
$$d_4 = 2\bigg/\left[1 - \frac{1 + 2\xi + 2\xi^2}{1 + 2\xi} \ln (1 + 1/\xi)\right],\ d_3 = d_4 \frac{\ln (1 + 1/\xi)}{1 + 2\xi},$$

где $\mathrm{Re}_\theta = \Gamma r_1 (r_2 - r_1)/\nu$ — число Рейнольдса азимутальной компоненты V_θ, построенное по максимальной скорости Γr_1 и ширине канала; Re_z — число Рейнольдса осевого потока V_z, основанное на вязкости ν, ширине канала $r_2 - r_1$ и средней по сечению кольцевой трубы осевой скорости, так что имеет место равенство

$$2\pi \int\limits_{\xi}^{1+\xi} V_z r dr = \pi [(1 + \xi)^2 - \xi^2] \mathrm{Re}_z,$$

в случае узкого зазора ($\xi \to \infty$) профиль V_z переходит в параболический $V_z = 6\,\mathrm{Re}_z\, y(1-y)$, $y = r - \xi$.

Разыскивая периодические режимы, ответвляющиеся от решения (1.2), положим в (1.1)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{V} + \mathbf{v}(r, z),\ \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}(r, z),\ h' = H + h(r, z),\ c' = c\,\mathrm{Re}_z$$

и получим для определения возмущений $\mathbf{v}$, h, $\boldsymbol{\omega}$ и постоянной c нелинейную задачу на собственные значения

$$-c\,\mathrm{Re}_z d\mathbf{v}/dz + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} + \mathrm{grad}\,h = \mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\quad \int\limits_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{\partial h}{\partial z}\,dz = 0,\ \mathbf{v} = 0\,(r=\xi,\ 1+\xi),$$

для которой требуется отыскать ненулевое решение, $2\pi/\alpha$-периодическое по координате z.

2. Ряды Ляпунова — Шмидта. Пусть Re_0 — критическое значение параметра Re_θ. Положим $\mathrm{Re}_\theta = \mathrm{Re}_0 + \varepsilon^2$ и, считая ε малым, будем разыскивать решение задачи (1.3) в виде [19].

$$(\mathbf{v}, h, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k(\mathbf{v}_k, h_k, \boldsymbol{\omega}_k),\ c = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k c_k \tag{2.1}$$

и придем к серии рекуррентных задач ($k = 1, 2, 3,\ldots$)

$$\begin{gathered} -c_0\,\mathrm{Re}_z\,\partial\mathbf{v}_k/dz + \boldsymbol{\Omega}_0\times\mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k\times\mathbf{V}_0 + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}_k + \mathrm{grad}\,h_k = \mathbf{f}_k,\\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_k = \boldsymbol{\omega}_k,\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}_k = 0,\ \mathbf{v}_k = 0\ (r = \xi,\ 1+\xi),\\ \int\limits_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \frac{\partial h_k}{\partial z}\,dz = 0,\ (\mathbf{v}_k, h_k, \boldsymbol{\omega}_k)|_z = (\mathbf{v}_k, h_k, \boldsymbol{\omega}_k)|_{z+2\pi/\alpha} \end{gathered} \tag{2.2}$$

с известными правыми частями. Например,

$$\mathbf{f}_1 = 0,\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_1\times\boldsymbol{\omega}_1 + c_1\,\mathrm{Re}_z\,\partial\mathbf{v}_1/\partial z,$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}_1\times\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{v}_2\times\boldsymbol{\omega}_1 + c_2\,\mathrm{Re}_z\,\partial\mathbf{v}_1/\partial z + c_1\,\mathrm{Re}_z\,\partial\mathbf{v}_2/\partial z - (\boldsymbol{\Omega}_1\times\mathbf{v}_1 + \\ + \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{V}_1).$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}|_{\mathrm{Re}_\theta=\mathrm{Re}_0},\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}\Big|_{\substack{\mathrm{Re}_\theta=1\\ \mathrm{Re}_z=0}},\ \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathrm{rot}\,\mathbf{V}_0,\ \boldsymbol{\Omega}_1 = \mathrm{rot}\,\mathbf{V}_1.$$

При $k = 1$ получается линейная однородная задача для вычисления критических параметров Re_0, c_0 и собственной функции. Решение этой задачи разыскиваем в форме

$$\begin{gathered}(\mathbf{v}_1, h_1, \boldsymbol{\omega}_1) = \beta(\boldsymbol{\Phi}(y)e^{i\alpha z} + \boldsymbol{\Phi}^*(y)e^{-i\alpha z}),\\ \boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\varphi}, g, \boldsymbol{\gamma}),\ y = r - \xi,\end{gathered} \tag{2.3}$$

причем неизвестную вещественную постоянную β (амплитуду автоколебаний) можно считать положительной, так как этого всегда можно добиться, сдвинув начало отсчета на оси z. Звездочка означает операцию комплексного сопряжения. Отделяя переменную z, приходим к системе шести дифференциальных уравнений первого порядка

$$
\begin{gathered}
D\varphi_r = -q\varphi_r - i\alpha\varphi_z;\ D\varphi_\theta = \gamma_z - q\varphi_\theta;\ D\varphi_z = i\alpha\varphi_r - \gamma_\theta; \\
Dg = i\alpha c_0 \operatorname{Re}_z \varphi_r + i\alpha\gamma_\theta - A_r;\ D\gamma_\theta = i\alpha c_0 \operatorname{Re}_z \varphi_z - i\alpha h - q\gamma_\theta - \\
- A_z; \\
D\gamma_z = i\alpha\gamma_r - i\alpha c_0 \operatorname{Re}_z \varphi_\theta + A_\theta,\ \gamma_r = -i\alpha\varphi_0,\ q = (\xi + y)^{-1}, \\
D = d/dy,\ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{V}_0,
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

для которой требуется отыскать ненулевое решение, удовлетворяющее граничным условиям $\varphi_r = \varphi_\theta = \varphi_z = 0\,(y = 0, 1)$. В качестве нормировки удобно взять условие $\gamma_z = 1$ при $y = 0$. При таком выборе нормировки величина $2\beta\varepsilon$ при малых ε может быть интерпретирована как амплитуда пульсаций касательного напряжения $p_{r\theta}$ на внутреннем цилиндре.

Для построения сопряженной задачи [19] умножим скалярно первое уравнение из (2.2) при $k = 1$ на соленоидальный $2\pi/\alpha$-периодический по z вектор $\mathbf{\Psi}$, исчезающий при $r = \xi, 1 + \xi$, и произведем интегрирование по прямоугольнику $\{\xi \leqslant r \leqslant 1 + \xi,\ -\pi/\alpha \leqslant z \leqslant \pi/\alpha\}$ с весом r. Используя затем интегрирование по частям, перебросим производные с $\mathbf{v}_1$, h_1, $\boldsymbol{\omega}_1$ на $\mathbf{\Psi}$ и придем, введя вспомогательные переменные P и Λ, к сопряженной задаче

$$
\begin{gathered}
c_0 \operatorname{Re}_z \partial\mathbf{\Psi}/\partial z + \mathbf{\Psi}\times\mathbf{\Omega}_0 + \operatorname{grad} P + \operatorname{rot} \mathbf{\Lambda} = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{\Psi} = 0, \\
\operatorname{rot} \mathbf{\Psi} + \mathbf{V}_0\times\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Lambda},\ \mathbf{\Psi} = 0\ (r = \xi,\ 1 + \xi),
\end{gathered}
$$

которая после отделения переменной z $(\mathbf{\Psi}, P, \mathbf{\Lambda}) = (\mathbf{\Psi}, p, \lambda)e^{i\alpha z}$ сводится к системе

$$
\begin{gathered}
D\psi_r = -i\alpha\psi_z - q\psi_r;\ D\psi_\theta = \lambda_z - q\psi_\theta + V_{0\theta}\psi_r; \\
D\psi_z = i\alpha\psi_r - \lambda_\theta + V_{0z}\psi_r;\ D_p = i\alpha\lambda_\theta - i\alpha c_0 \operatorname{Re}_z \psi_r + \Omega_{0\theta}\psi_z - \Omega_{0z}\psi_\theta; \\
D\lambda_\theta = -i\alpha p - q\lambda_\theta - i\alpha c_0 \operatorname{Re}_z \psi_z - \Omega_{0\theta}\psi_r; \\
D\lambda_z = i\alpha\lambda_r + i\alpha c_0 \operatorname{Re}_z \psi_\theta - \Omega_{0z}\psi_r,\ \lambda_z = V_{0\theta}\psi_z - (i\alpha + V_{0z})\psi_\theta
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

с граничными условиями $\psi_r = \psi_\theta = \psi_z = 0$ $(y = 0{,}1)$ и дополнительным условием нормировки $\lambda_z = 1$ при $y = 0$. Условие разрешимости неоднородной задачи (2.2) имеет вид

$$
\int\limits_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} \int\limits_0^1 (\mathbf{f}_k(y, z), \boldsymbol{\psi}(y))\, e^{-i\alpha z} r\, dy\, dz = 0 \quad (k = 2, 3, 4, \ldots).
\tag{2.6}
$$

Применяя его при $k = 2$ и учитывая, что в силу (2.3)

$$
\begin{gathered}
\mathbf{f}_2 = i\alpha c_1 \operatorname{Re}_z (e^{i\alpha z}\boldsymbol{\varphi} - e^{-i\alpha z}\boldsymbol{\varphi}^*) + \beta^2(\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\gamma}^* + \boldsymbol{\varphi}^*\times\boldsymbol{\gamma} + e^{2i\alpha z}\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\gamma} + \\
+ e^{-2i\alpha z}\boldsymbol{\varphi}^*\times\boldsymbol{\gamma}^*),
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

находим, что $c_1 = 0$, если величина

$$
I_1 = \int\limits_0^1 (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})\, r\, dy
$$

отлична от нуля. Последнее условие проверялось численно и в рассмотренных случаях оказалось выполненным. Решение задачи (2.2) при $k = 2$ в соответствии с (2.7) ищем в форме

$$(2.8)\qquad (\mathbf{v}_2, h_2, \omega_2) = \beta^2[(\mathbf{W}, S, \mathbf{L}) + (\mathbf{w}, s, \mathbf{l})\, e^{2i\alpha z} + (\mathbf{w}^*, s^*, \mathbf{l}^*) e^{-2i\alpha z}].$$

Заметим, что в правую часть (2.8) следовало бы добавить решение однородной задачи Φ с некоторым числовым множителем β_1, однако из условия разрешимости при $k = 4$ следует, что $\beta_1 = 0$. Подстановка дает для коэффициентов при нулевой гармонике уравнения

$$DW_\theta = L_z - qW_\theta;\ DW_z = -L_\theta,\ W_\theta = W_z = 0\ (y = 0, 1);$$

$$(2.9)\qquad DL_\theta = B_z - qL_\theta;\ DL_z = -B_\theta;\ W_r = L_r \equiv 0;$$

$$DS = B_r - \Omega_{0\theta}W_z + \Omega_{0z}W_\theta - V_{0z}L_\theta + V_{0\theta}L_z,$$

$$\mathbf{B} = \varphi\times\gamma^* + \varphi^*\times\gamma,\ S = 0\ (y = 1).$$

Добавленное граничное условие для S фиксирует произвольную постоянную в определении полного давления. Коэффициенты при второй гармонике отыскиваем, решая краевую задачу

$$Dw_r = -qw_r - 2i\alpha w_z;\ Dw_\theta = l_z - qw_\theta;\ Dw_z = 2i\alpha w_r - l_\theta;$$

$$(2.10)\qquad Ds = 2i\alpha(c_0 \operatorname{Re}_z w_r + l_\theta) - C_r;\ Dl_\theta = 2i\alpha(c_0 \operatorname{Re}_z w_z - s) - ql_\theta - C_z;$$

$$Dl_z = 2i\alpha(l_r - c_0 \operatorname{Re}_z w_\theta) + C_\theta,\ w_r = w_\theta = w_z = 0\ (y = 0, 1),$$

$$l_r = -2i\alpha w_\theta,\ \mathbf{C} = \mathbf{\Omega}_0\times\mathbf{w} + \mathbf{l}\times\mathbf{V}_0 - \varphi\times\gamma.$$

Применяя (2.6) при $k = 3$, получаем уравнение

$$i\alpha c_2 \operatorname{Re}_z I_1 + \beta^2 I_2 = I_3,$$

$$I_2 = \int_0^1 (\varphi\times\mathbf{L} + \mathbf{W}\times\gamma + \varphi^*\times\mathbf{l} + \mathbf{w}\times\gamma^*, \psi)\, r\,dy,$$

$$I_3 = \int_0^1 (\mathbf{\Omega}_1\times\varphi + \gamma\times\mathbf{V}_1, \psi)\, r\,dy,$$

решая которое, находим вещественные постоянные β и c_2

$$\beta = \sqrt{\operatorname{Real}(I_1^* I_3)/\operatorname{Real}(I_1 I_2^*)},\quad c_2 = \frac{\operatorname{Im}(I_2^* I_3)}{\alpha \operatorname{Re}_z \operatorname{Real}(I_1 I_2^*)}.$$

Вычисления при помощи ЭВМ показали, что для рассмотренных значений параметров подкоренное выражение является положительным. Отсюда вытекает [19, 20] сходимость рядов (2.1) и единственность при малых ε построенного автоколебательного решения, существующего в закритической области $\operatorname{Re}_\theta = \operatorname{Re}_0 + \varepsilon^2$.

Для исследования устойчивости спирального течения и ответвившегося волнового режима в классе возмущений с периодом $2\pi/\alpha$ по z' составляем дважды при помощи (1.1) уравнения в вариациях и ищем вектор скорости в виде $\mathbf{u}(r, z' - c_0 \operatorname{Re}_z t) \exp \sigma t$ для первого случая и в форме $\mathbf{u}'(r, z' - c't) \exp \sigma' t$ —для второго. Это приводит к задачам на собственные значения показателей экспонент σ и σ'

$$\begin{cases} \sigma\mathbf{u} - c_0 \operatorname{Re}_z \partial\mathbf{u}/\partial z + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{u} + \operatorname{rot} \mathbf{u}\times\mathbf{V} + \operatorname{grad} \chi + \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ \mathbf{u} = 0 \ (r = \xi, \ 1 + \xi), \ z = z' - c_0 \operatorname{Re}_z t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma'\mathbf{u}' - c'\partial\mathbf{u}'/\partial z + (\mathbf{\Omega} + \omega)\times\mathbf{u}' + \operatorname{rot} \mathbf{u}'\times(\mathbf{V} + \mathbf{v}) + \operatorname{grad} \chi' + \\ + \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{u}' = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \ \mathbf{u}' = 0 \ (r = \xi, \ 1 + \xi), \ z = z' - c't. \end{cases}$$

Интересуясь поведением возмущений при малой надкритичности, разыскиваем решения выписанных задач в виде рядов по ε [20] и приходим к результату

$$\sigma = \sigma_2\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^2); \ \sigma' = \sigma_2'\varepsilon^2 + 0(\varepsilon^2),$$

$$\sigma_2 = -I_3/I_1, \ \operatorname{Real}\sigma_2' = -\operatorname{Real}\sigma_2,$$

причем наличие положительной вещественной части у коэффициента σ_2 или σ_2' свидетельствует о неустойчивости соответствующего течения.

3. **Численные результаты**. Вычисления автоколебательного режима были проведены на ЭВМ ODRA-1204 для зазора $\xi=50$ и различных числах Re_z. Предварительно были уточнены методом Ньютона критические значения параметров c_0, Re_0, найденные в [15]; волновое число выбиралось из соображений минимальности критического числа Рейнольдса $\operatorname{Re}_0(\alpha)$.

Re_z	α	Re_0	c_0	β	$10^6 c_2$	$10^2 \operatorname{Real}\sigma_2$
4,30	3,13	296,60	1,1696	19,58	—3,33	8,94
11,3	3,14	308,82	1,1683	19,73	—2,96	9,19
17,8	3,15	329,31	1,1660	20,02	—1,33	9,61
29,2	3,20	383,62	1,1606	20,78	4,98	10,7
39,7	3,25	450,31	1,1545	21,95	27,5	12,1

Затем приводилось решение краевых задач (2.4), (2.5), (2.9), (2.10) при помощи комплексного варианта метода ортогонализации [22, 23], вычисление интегралов I_1, I_2, I_3 сводилось к решению задачи Коши от внешнего цилиндра к внутреннему с параллельным интегрированием всей большой системы дифференциальных уравнений стандартным методом Рунге — Кутта четвертого порядка с автоматическим выбором шага.

Полученные результаты (см. таблицу) позволяют (при не слишком больших осевых числах Рейнольдса) интерпретировать найденное решение как устойчивое волновое движение жидкости, вызываемое сносом вторичных тейлоровских вихрей осевым потоком.

Автор благодарит В. И. Юдовича за внимание к работе.

Поступила 10 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Goldstein S.** The stability of viscous fluid between rotating cylinders.—«Proc. Cambr. Philos. Soc.», 1937, vol. 33, p. 41—61.
2. **Di Prima R. C.** The stability of a viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow.—«J. Fluid Mech.», 1960, vol. 9, N 4, p. 621—629.
3. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
4. **Krueger E. R., Di Prima R. C.** The stability of a viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow.—«J. Fluid Mech.», 1964, vol. 19, N 4.
5. **Datta S. K.** Stability of spiral flow between concentric cylinders at low axial Reynolds numbers.—«J. Fluid Mech.», 1965, vol. 21, N 4.
6. **Hughes T. H., Reid W. H.** The stability of spiral flow between rotating cylinders.—«Philos. Trans. Roy. Soc.», 1968, vol. A 263, N 1135, p. 57—91.
7. **Wedemeyer E.** Stabilität spiraliger Strömungen in einem zylindrischen Ringraum.—«Mitt. M. Plank-Inst. Strömungsforschung und der Aerodyn. Versuchsanst.», 1969, Bd 44.
8. **Hung W. L., Joseph D. D., Munson B. R.** Global stability of spiral flow. Pt 2.—«J. Fluid Mech.», 1972, vol. 51, N 3, p. 593—612.
9. **Cornisch R. I.** Flow of water through fine clearences with relative motion of the boundaries.—«Proc. Roy Soc.», 1933, vol. A 140, p. 227—240.
10. **Fage A.** The influence of wall oscillations, wall rotation, and entry eddies of the breakdown of laminar flow in an annular pipe.—«Proc. Roy. Soc.», 1938, vol. A165, p. 513—517.
11. **Kaye J., Elgar E. C.** Modes of adiabatic and diabatic flow in an annulus with an inner rotating cylinder.—«Trans. ASME», 1958, vol. 80, N 3.
12. **Donnelly R. J., Fultz D.** Experiments on the stability of spiral flow between rotating cylinders.—«Proc. Nat. Acad. Sci.», 1960, vol. 46, N 8, p. 1150—1154.
13. **Snyder M. A.** Experiments on the stability of spiral flow at low axial Reinolds numbers.—«Proc. Roy. Soc.», 1962, vol. A265, N 1321.
14. **Schwarz K. W., Springett B. E., Donnelly R. J.** Modes of instability in spiral flow between rotating cylinders.—«J. Fluid Mech.», 1964, vol. 20, pt. 2.
15. **Лисейкина Т. А.** Устойчивость спиральных течений. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1973.
16. **Вильгельмн Т. А., Штерн В. Н.** Устойчивость спирального течения в кольцевом зазоре.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3, с. 35—44.
17. **Юдович В. И.** Математические вопросы теории устойчивости течений жидкости. Дис. на соиск. учен. степени доктора физ.-мат. наук. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1972.
18. **Уринцев А. Л.** Автоколебания в жидкости, подогреваемой снизу.— В кн.: Сообщ. на 2-й конференции Ростовского мат. об-ва. Ростов-на-Дону, 1968, с. 153—157.
19. **Юдович В. И.** Возникновение автоколебаний в жидкости.—ПММ, 1971, т. 35, № 4.
20. **Юдович В. И.** Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима.— ПММ, 1972, т. 36, № 3.
21. **Андрейчиков И. П., Юдович В. И.** Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.—«Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 4, с. 791.
22. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.—«Усп. мат. наук»,1961, т.XVI, вып. 3 (99), с. 171—174.
23. **Conte S. D.** The numerical solution of linear boundary value problems.—«SIA-Review», 1966, vol. 8. N 3, p. 309—321.