ПМТФ, № 1, 1961

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПРИ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Г. В. Иванов

(Новосибирск)

Рассматривается устойчивость равновесия тонкостенных элементов при упруго-пластических деформациях и деформациях ползучести.

1. Постановка задачи. Критерий устойчивости равновесия. 1°. Полагаем, что при деформировании элемента в основном состоянии, т. е. состоянии, устойчивость которого изучается, внешние силы пропорциональны некоторому параметру.

Будем называть параметром нагружения и обозначать через λ при упругих и упруго-пластических деформациях параметр, которому пропорциональны внешние силы при деформировании в основном состоянии, а при ползучести — время с момента начала нагружения.

При отклонениях от основного состояния напряжения и деформации в любой точке элемента можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}(\xi) = \sigma_{x\overset{\circ}{x}}(\xi) + \sigma_{x\overset{\times}{x}}(\xi), \ldots, \tau_{xy}(\xi) = \tau_{x\overset{\circ}{y}}(\xi) + \tau_{x\overset{\times}{y}}(\xi), \ldots \\ &\varepsilon_{xx}(\xi) = \varepsilon_{x\overset{\circ}{x}}(\xi) + \varepsilon_{x\overset{\times}{x}}(\xi), \ldots, \gamma_{xy}(\xi) = \gamma_{x\overset{\circ}{y}}(\xi) + \gamma_{x\overset{\times}{y}}(\xi), \ldots \end{aligned} \quad \xi \in [0, \lambda] \tag{1.1}$$

Многоточие указывает на два аналогичных выражения, получаемых круговой заменой индексов x, y, z; величины с градусами соответствуют деформированию в основном состоянии, считаем их известными функциями ξ, величины с косым крестом будем называть дополнительными напряжениями, дополнительными деформациями.

Под сколь угодно малыми отклонениями от основного состояния будем понимать отклонения, при которых в (1.1) величины с косым крестом сколь угодно малы по сравнению с теми величинами, отмеченными нуликами, которые не равны нулю.

2°. При упругих деформациях по классическому критерию устойчивости равновесия [1] за критическое значение параметра нагружения принимается наименьшее значение λ, при котором возможно равновесное состояние, отличное от основного состояния.

3°. При обобщении классического критерия на случай неупругих деформаций будем полагать, что переход из основного состояния в соседнее равновесное состояние может осуществляться любым способом, при котором дополнительные деформации принадлежат классу $R[0, \lambda]$.

Будем говорить, что дополнительные деформации

$$\varepsilon_{x\overset{\times}{x}}(\xi), \ldots, \gamma_{y\overset{\times}{z}}(\xi), \ldots, \xi \in [0, \lambda]$$

принадлежат классу $R[0, \lambda]$, если они и их производные по ξ непрерывны всюду в $[0, \lambda]$, за исключением разве конечного числа значений ξ, $\xi \in [0, \lambda]$, при которых какие-либо из дополнительных деформаций или их производные по ξ могут претерпевать разрывы первого рода, и, если в $[0, \lambda]$ либо вообще не имеется, либо имеется лишь конечное число ненулевых промежутков $(b_k, b_{k+1}) \subset [0, \lambda]$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, в которых приращения дополнительных деформаций с приращениями дополнительных напряжений связаны законом Гука.

Под $\xi \in [a, b]$, $\xi \in [a, b)$, $\xi \in (a, b)$ понимаются соответственно $a \leqslant \xi \leqslant b$, $a \leqslant \xi < b$, $a < \xi < b$.

Под разрывами первого рода функции $f(x)$ подразумевается, что функция $f(x)$ в точке x_* имеет конечные односторонние пределы $f(x_*)_+$, $f(x_*)_-$, но сама функция в точке x_* не определена, либо ее значение не равно, по крайней мере, одному из пределов $f(x_*)_+$, $f(x_*)_-$. Здесь и в дальнейшем индексами плюс, минус отмечаются односторонние пределы функций соответственно справа и слева.

При неупругих деформациях процесс деформирования необратим. Поэтому при любых значениях параметра нагружения, при которых в основном состоянии имеют место неупругие деформации, возможно (из-за остаточных дополнительных деформаций) равновесное состояние, отличное от основного.

При обобщении классического критерия на случай неупругих деформаций возникающие из-за остаточных дополнительных деформаций равновесные состояния, отличные от основного состояния, можно исключить, наложив условие, чтобы параметр нагружения в процессе деформирования не уменьшался и, потребовав, чтобы при критическом значении параметра нагружения было возможным нетривиальное равновесное состояние.

Нетривиальным будем называть равновесное состояние, отличное от основного состояния, в котором в любой точке элемента дополнительные деформации, если они положительны, не меньше, если отрицательны, то не больше дополнительных деформаций, возникающих в процессе перехода в это состояние из основного состояния.

Можно предложить следующее обобщение классического критерия на случай неупругих деформаций.

Критерий. За критическое значение параметра нагружения примем наименьшее значение λ, при котором возможно нетривиальное равновесное состояние при условии, что параметр нагружения в процессе деформирования не уменьшается, а переход из основного состояния в нетривиальное равновесное состояние осуществляется при дополнительных деформациях, принадлежащих классу $R\,[0, \lambda]$.

Критическое, в смысле этого критерия, значение параметра нагружения будем обозначать через λ_k.

2. Сравнение предлагаемого критерия с другими критериями устойчивости равновесия. 1°. По критерию Кармана [1] за критическое значение параметра нагружения принимается наименьшее значение λ, при котором возможно нетривиальное равновесное состояние при условии, что переход из основного состояния в нетривиальное равновесное состояние осуществляется при фиксированном значении параметра нагружения.

По критерию Шенли [1] за критическое значение параметра нагружения принимается наименьшее значение λ, при котором возможно нетривиальное равновесное состояние при условии, что переход из основного состояния в нетривиальное равновесное состояние осуществляется на промежутке $(\lambda - \alpha, \lambda)$, α — сколь угодно малая величина.

Из приведенных выше формулировок предлагаемого критерия и критериев Кармана и Шенли следует, что

$$\lambda_k \leqslant \lambda_* \leqslant \lambda^*$$

где λ_*, λ^* — значения параметра нагружения, критические в смысле критериев Шенли и Кармана.

Известно, что эксперименты при сложном нагружении лучше подтверждают теорию пластического течения [1], чем теорию малых упруго-пластических деформаций [1]. Решения же на основе критерия Шенли тех задач устойчивости равновесия, где имеется сложное нагружение, по теории пластического течения хуже соответствуют экспериментальным данным, чем решения по теории малых упруго-пластических деформаций. Это расхождение наиболее значительно в задаче о крутильной потере устойчивости равновесия прямоугольной пластинки с тремя свободными краями и одним шарнирноопертым, сжатой вдоль шарнирноопертого края. При решении этой задачи по теории пластического течения в постановке Шенли и Кармана получается, что критическая сжимающая сила равна таковой при чисто упругих деформациях, т. е. возникновение и величина пластических деформаций не оказывают никакого влияния на величину критической силы. Объяснению этого парадокса посвящен ряд работ различных авторов [2]. Существование парадокса было одной из причин создания новых теорий пластического течения [3, 4].

При пользовании предлагаемым критерием, как показано ниже в п. 4, указанного выше парадокса не возникает.

2°. Результаты исследования устойчивости равновесия в условиях ползучести, полученные в работах А. Р. Ржаницына [5], Ю. Н. Работнова и С. А. Шестерикова [6], соответствуют следующему критерию. За критическое время t_{**} (при ползучести $\lambda = t$, t — время с момента начала нагружения) принимается наименьшее среди тех t, начиная с которых возможно возрастание отклонений от основного состояния, при условии, что переход из основного состояния и возрастание отклонений осуществляются при дополнительных деформациях, имеющих непрерывные производные по времени.

Изложенные в работах [5, 6] методы дают только достаточные условия устойчивости в смысле этого критерия, т. е. в работах [5, 6] найдено

$$t_{**}' \leqslant t_{**}$$

Очевидно, при $t > t_k$ возможно возрастание отклонений. Поэтому в тех случаях, когда переход в нетривиальное равновесное состояние при $t = t_k$ осуществляется при дополнительных деформациях, имеющих непрерывные производные по времени, соотношение между временем t_{**}', получаемым изложенными в работах [5, 6] методами, и временем, критическим в смысле предлагаемого критерия, имеет вид

$$t_{**}' \leqslant t_k$$

3. Частный случай уравнений связи между дополнительными напряжениями и дополнительными деформациями. В задачах устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких и тонкостенных стержней, некоторых задачах устойчивости равновесия пластин при деформировании в основном состоянии осуществляется одноосное напряженное состояние

$$\sigma_z^\circ = \sigma^\circ, \quad \sigma_x^\circ = \sigma_y^\circ = \tau_{xy}^\circ = \tau_{yz}^\circ = \tau_{xz}^\circ = 0$$

а при сколь угодно малых отклонениях от основного состояния могут возникать только дополнительные напряжения $\sigma^\times$, $\tau_{xz}^\times$, $\tau_{xz}^\times$, так что соотношения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} &\sigma_z^\circ = \sigma^\circ + \sigma^\times, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^\times, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}^\times, \quad \tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0 \\ &\varepsilon_z^\circ = \varepsilon^\circ + \varepsilon^\times, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^\times, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^\times, \quad \gamma_{xy} = \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

1°. Подставляя соотношения (3.1) в уравнения связи между напряжениями и деформациями и ограничиваясь сохранением сколь угодно малых величин только первого порядка, получим систему линейных (алгебраических, дифференциальных или интегральных) уравнений связи между дополнительными напряжениями и деформациями. Если дополнительные деформации

$$\varepsilon^\times(\xi), \qquad \gamma_{xz}^\times(\xi), \qquad \gamma_{yz}^\times(\xi), \quad \xi \in [0, \lambda]$$

известны, из указанной выше системы линейных уравнений можно найти дополнительные напряжения, которые при $\varepsilon^\times(\lambda)\neq 0$, $\gamma_{xz}^\times(\lambda)\neq 0$, $\gamma_{yz}^\times(\lambda)\neq 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma^\times(\lambda) &= E^\times(\lambda, \varepsilon^\times(\xi), \gamma_{xz}^\times(\xi), \gamma_{yz}^\times(\xi))\,\varepsilon^\times(\lambda) && (3.2)\\
\tau_{xz}^\times(\lambda) &= G_x^\times(\lambda, \varepsilon^\times(\xi), \gamma_{xz}^\times(\xi), \gamma_{yz}^\times(\xi))\,\gamma_{xz}^\times(\lambda) && (\xi\in[0,\lambda])\\
\tau_{yz}^\times(\lambda) &= G_y^\times(\lambda, \varepsilon^\times(\xi), \gamma_{xz}^\times(\xi), \gamma_{yz}^\times(\xi))\,\gamma_{yz}^\times(\lambda)
\end{aligned}$$

Ниже для теории пластического течения с упрочнением [1], теории ползучести типа теории течения [7] показано, что функционалы $E^\times$, $G_x^\times$, $G_y^\times$ в классе дополнительных деформаций $R'[0,\lambda]$ достигают наименьшего значения при

$$\varepsilon^\times(\xi)=\text{const},\qquad \gamma_{xz}^\times(\xi)=\text{const},\qquad \gamma_{yz}^\times(\xi)=\text{const}\qquad (\xi\in[0,\lambda])$$

К классу $R'[0,\lambda]$ отнесем те, принадлежащие классу $R[0,\lambda]$, до полнительные деформации, которые удовлетворяют какому-либо из не равенств

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^\times(\xi)\geqslant\varepsilon^\times(\lambda)<0, \qquad \gamma_{xz}^\times(\xi)\geqslant\gamma_{xz}^\times(\lambda)<0, \qquad \gamma_{yz}^\times(\xi)\geqslant\gamma_{xz}^\times(\lambda)<0\\
&\hspace{22em}(\xi\in[0,\lambda])\\
&\varepsilon^\times(\xi)\leqslant\varepsilon^\times(\lambda)>0, \qquad \gamma_{xz}^\times(\xi)\leqslant\gamma_{xz}^\times(\lambda)>0, \qquad \gamma_{yz}^\times(\xi)\leqslant\gamma_{yz}^\times(\lambda)>0
\end{aligned}$$

2°. Рассмотрим теорию пластического течения с упрочнением. Уравнения связи между напряжениями и деформациями в этом случае имеют вид [1]

при $T\leqslant\tau_s$ или при $T\geqslant\tau_s$, $dT\leqslant 0$

$$d\varepsilon_x=\frac{1}{E}\,[d\sigma_x-\nu(d\sigma_y+d\sigma_z)],\ldots,\quad d\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\,d\tau_{xy},\ldots \tag{3.3}$$

при $T\geqslant\tau_s$, $dT>0$

$$d\varepsilon_x=\frac{1}{E}\,[d\sigma_x-\nu(d\sigma_y+d\sigma_z)]+F(T)\,dT\,(\sigma_x-\sigma),\ldots$$

$$d\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\,d\tau_{xy}+2F(T)\,dT\tau_{xy},\ldots \tag{3.4}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_x-\sigma_z)^2+6\,(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)}$$

$$F(T)=\frac{3}{2T}\left(\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}\right),\qquad F(T)\geqslant 0,\qquad \sigma=\frac{1}{3}\,(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

Здесь E' — касательный модуль, E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, τ_s — предел текучести при сдвиге.

Подставляя соотношения (3.1) в уравнения (3.3), (3.4), ограничиваясь сохранением сколь угодно малых величин только первого порядка, получим

$$T=T_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma^\times\operatorname{sign}\sigma^\circ,\qquad T_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma^\circ\operatorname{sign}\sigma^\circ$$

$$F(T)\,dT=F(T_0)\,dT_0+d\left[F(T_0)\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma^\times\operatorname{sign}\sigma^\circ\right]$$

При

$$T_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma^\times\operatorname{sign}\sigma^\circ\leqslant\tau_s$$

или при

$$T_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sigma^\times\operatorname{sign}\sigma^\circ\geqslant\tau_s,\qquad dT_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\,d\sigma^\times\operatorname{sign}\sigma^\circ\leqslant 0$$

имеем

$$d\sigma^\times=E\,d\varepsilon^\times,\qquad d\tau_{xz}^\times=G\,d\gamma_{xz}^\times,\qquad d\tau_{yz}^\times=G\,d\gamma_{yz} \tag{3.5}$$

При

$$T_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^\times \operatorname{sign}\sigma^\circ \geqslant \tau_s, \qquad dT_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} d\sigma^\times \operatorname{sign}\sigma^\circ > 0$$

имеем

$$\begin{aligned} d\varepsilon^\times &= \frac{1}{E} d\sigma^\times + \frac{2}{3} d\left[F(T_0) T_0 \sigma^\times\right] \\ d\gamma_{yz}^\times &= \frac{1}{G} d\tau_{yz}^\times + 2F(T_0)\, dT_0 \tau_{yz}^\times \\ d\gamma_{xz}^\times &= \frac{1}{G} d\tau_{xz}^\times + 2F(T_0)\, dT_0 \tau_{xz}^\times \end{aligned} \tag{3.6}$$

При изучении связи между дополнительными напряжениями и деформациями в какой-либо точке элемента в случае теории пластического течения удобно взять в качестве независимой переменной не параметр нагружения, а функцию параметра нагружения $T_0 = T_0(\lambda)$. Полагаем $T_0 = T_0(\lambda)$ — неубывающая функция. Из уравнений (3.5), (3.6) видим, что в этом случае в (3.2)

$$E^\times = E^\times(T, \varepsilon^\times(\xi)), \ G_x^\times = G_x^\times(T, \ \gamma_{xz}^\times(\xi)), \ G_y^\times = G_y^\times(T, \gamma_{yz}^\times(\xi)), \ \xi \in [0, T]$$

Здесь и ниже в этом пункте для упрощения записи опущены нулики у T_0, σ°, ε° — величин, соответствующих деформированию в основном состоянии.

1) Очевидно (см. (3.6)), при тех $\varepsilon^\times(\xi)$, $\xi \in [0, T]$, при которых не возникало разгрузки ни при каком $\xi \in [0, T]$

$$E^\times(T, \varepsilon^\times(\xi)) = E'(T) \tag{3.7}$$

В частности, равенство (3.7) справедливо при $\varepsilon^\times(\xi) = \mathrm{const}$, $\xi \in [0, T]$

Пусть $\varepsilon^\times(\xi)$ такова, что при $\xi = T'$ начинается разгрузка и

$$\sigma^\times(T') = E'(T')\, \varepsilon^\times(T')$$

Если

$$T + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^\times(T) \operatorname{sign}\sigma < T' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^\times(T') \operatorname{sign}\sigma'$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma \operatorname{sign}\sigma, \qquad T' = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma' \operatorname{sign}\sigma'$$

то

$$\sigma^\times(T) = E^\times(T)\, \varepsilon^\times(T) = E'(T')\, \varepsilon^\times(T') + E\left[\varepsilon^\times(T) - \varepsilon^\times(T')\right]$$

и, следовательно,

$$E^\times(T) \geqslant E'(T') \ \text{при} \ T \geqslant T'$$

$$\varepsilon^\times(T') \leqslant \varepsilon^\times(T) > 0 \ \text{или} \ \varepsilon^\times(T') \geqslant \varepsilon^\times(T) < 0$$

Если при $\xi = T''$ опять наступает пластическое состояние, то

$$T'' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^\times(T'') \operatorname{sign}\sigma'' = T' + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma^\times(T') \operatorname{sign}\sigma' \tag{3.8}$$

Величина T'' отличается от T' на сколь угодно малую величину; $T'' \geqslant T'$, поэтому можно принять

$$\operatorname{sign}\sigma' = \operatorname{sign}\sigma'', \quad \sigma'' = \sigma' + E'(T')(\varepsilon'' - \varepsilon')$$

и, следовательно, записать (3.8) в виде

$$\sigma^\times(T'') = \sigma^\times(T') + \sigma' - \sigma''$$

Принимаем, что $\varepsilon^\times(T'') = \varepsilon^\times(T') + \varepsilon' - \varepsilon''$, тогда $\sigma^\times(T'') = E'(T'')\, \varepsilon^\times(T'')$ или $E^\times(T'') \geqslant E'(T'')$.

Нетрудно убедиться теперь, что имеет место неравенство

$$E^\times(T, \varepsilon^\times(\xi)) \geqslant E'(T) \ \text{при} \ \varepsilon^\times(\xi) \in R'[0, T]$$

2) Очевидно (см. (3.6)), если

$$\gamma_{xz}^{\times}(\xi) = \mathrm{const}, \qquad \gamma_{yz}^{\times}(\xi) = \mathrm{const}, \qquad \xi \in [0, T]$$

то

$$G_x^{\times}(T, \gamma_{xz}^{\times}(\xi)) = G \exp\left[-2G\int_{\tau_s}^{T} F(T)\,dT\right]$$

$$G_y^{\times}(T, \gamma_{yz}^{\times}(\xi)) = G \exp\left[-2G\int_{\tau_s}^{T} F(T)\,dT\right] \tag{3.9}$$

Лемма. Пусть в промежутке $[T_i, T_{i+1}]$ выполнены условия $\gamma_{xz}^{\times}(T_i) \neq 0$ или $\gamma_{xz}^{\times}(T_i) = \tau_{xz}^{\times}(T_i) = 0$, а $\gamma_{xz}^{\times}(\xi)$ связано с $\tau_{xz}^{\times}(\xi)$ уравнениями (3.6) при $\xi \in [T_i, T_i')$, $\xi \in (T_i'', T_{i+1}]$, уравнениями (3.5) при $\xi \in (T_i', T_i'')$, производная $d\gamma_{xz}^{\times}/d\xi$ не меняет знака в промежутках $[T_i, T_i')$, $(T_i'', T_{i+1}]$, $T_i \leqslant T_i' \leqslant T_i'' \leqslant T_{i+1}$, тогда

$$\begin{gathered}(\tau_{xz}^{\times}(T_i) + G\delta_i^{(1)}) \exp[-f(T_i, T_i', T_i'', T_{i+1})] - G\delta_{i+1}^{(1)} \leqslant \tau_{xz}^{\times}(T_{i+1}) \leqslant \\ \leqslant (\tau_{xz}^{\times}(T_i) - G\delta_i^{(2)}) \exp[-f(T_i, T_i', T_i'', T_{i+1})] + G\delta_{i+1}^{(2)}\end{gathered} \tag{3.10}$$

где

$$\gamma_{xz}^{\times}(T_i) = \gamma^{(1)} - \delta_i^{(1)}, \quad \gamma_{xz}^{\times}(T_{i+1}) = \gamma^{(1)} - \delta_{i+1}^{(1)}, \quad \gamma^{(1)} \geqslant \gamma_{xz}^{\times}(\xi),\ \xi \in [T_i, T_{i+1}]$$

$$\gamma_{xz}^{\times}(T_i) = \gamma^{(2)} + \delta_i^{(2)}, \quad \gamma_{xz}^{\times}(T_{i+1}) = \gamma^{(2)} + \delta_{i+1}^{(2)}, \quad \gamma^{(2)} \leqslant \gamma_{xz}^{\times}(\xi),\ \xi \in [T_i, T_{i+1}]$$

$$f(T_i, T_i', T_i'', T_{i+1}) = 2G\left(\int_{T_i}^{T_i'} F(T)\,dT + \int_{T_i''}^{T_{i+1}} F(T)\,dT\right)$$

Замечание. В случае, когда $T_i'' = T_i'$, в условиях леммы под

$$\gamma_{xz}^{\times}(T_i'), \qquad \tau_{xz}^{\times}(T_i'), \qquad \gamma_{xz}^{\times}(T_i''), \qquad \tau_{xz}^{\times}(T_i'')$$

следует понимать соответственно

$$\gamma_{xz}^{\times}(T_i')_-, \qquad \tau_{xz}^{\times}(T_i')_-, \qquad \gamma_{xz}^{\times}(T_i')_+, \qquad \tau_{xz}^{\times}(T_i')_+$$

Доказательство. Очевидно

$$\tau_{xz}^{\times}(T_i') = \left[\tau_{xz}^{\times}(T_i) + G\int_{T_i}^{T_i'} \frac{d\gamma_{xz}^{\times}}{d\xi}(\exp f(T_i, \xi))\,d\xi\right]\exp[-f(T_i, T_i')]$$

$$\tau_{xz}^{\times}(T_i'') = \tau_{xz}^{\times}(T_i') + G[\gamma_{xz}^{\times}(T_i'') - \gamma_{xz}^{\times}(T_i')] \tag{3.11}$$

$$\tau_{xz}^{\times}(T_{i+1}) = \left[\tau_{xz}^{\times}(T_i'') + G\int_{T_i''}^{T_{i+1}} \frac{d\gamma_{xz}}{d\xi}(\exp f(T_i'', \xi))\,d\xi\right]\exp[-f(T_i'', T_{i+1})]$$

Пусть, например

$$\frac{d\gamma_{xz}^{\times}}{d\xi} \geqslant 0, \qquad \xi \in [T_i, T_i'), \qquad \frac{d\gamma_{xz}^{\times}}{d\xi} \leqslant 0, \qquad \xi \in (T_i'', T_{i+1}]$$

(доказательство леммы в других случаях аналогично доказательству леммы в этом случае). Тогда

$$\begin{gathered}\{\tau_{xz}^{\times}(T_i) + G[\gamma_{xz}^{\times}(T_i') - \gamma_{xz}^{\times}(T_i)]\}\exp[-f(T_i, T_i')] \leqslant \tau_{xz}^{\times}(T_i') \leqslant \\ \leqslant \tau_{xz}^{\times}(T_i)\exp[-f(T_i, T_i')] + G[\gamma_{xz}^{\times}(T_i') - \gamma_{xz}^{\times}(T_i)]\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\tau_{xz}^{\times}(T_i'')\exp[-f(T_i'', T_{i+1})] + G[\gamma_{xz}^{\times}(T_{i+1}) - \gamma_{xz}^{\times}(T_i'')] \leqslant \tau_{xz}^{\times}(T_{i+1}) \leqslant \\ \leqslant \{\tau_{xz}^{\times}(T_i'') + G[\gamma_{xz}^{\times}(T_{i+1}) - \gamma_{xz}^{\times}(T_i'')]\}\exp[-f(T_i'', T_{i+1})]\end{gathered}$$

В рассматриваемом случае неравенства (3.10) следуют из (3.11), (3.12) и очевидных неравенств

$$[\gamma_{xz}^{\times}(T_{i+1})-\gamma_{xz}^{\times}(T_i)]\exp[-f(T_i'', T_{i+1})]\leqslant$$
$$\leqslant\delta_{i+1}^{(2)}-\delta_i^{(2)}\exp[-f(T_i, T_i', T_i'', T_{i+1})]$$
$$-\delta_{i+1}^{(1)}+\delta_i^{(1)}\exp[-f(T_i, T_i', T_i'', T_{i+1})]\leqslant$$
$$\leqslant\{\gamma_{xz}^{\times}(T_i'')-\gamma_{xz}^{\times}(T_i')+[\gamma_{xz}^{\times}(T_i')-\gamma_{xz}^{\times}(T_i)]\exp[-f(T_i, T_i')]\}\times$$
$$\times\exp[-f(T_i'', T_{i+1})]+\gamma_{xz}^{\times}(T_{i+1})-\gamma_{xz}^{\times}(T_i'')$$

Теорема. При любой $\gamma_{xz}^{\times}(\xi)\in R'[0, T]$ имеет место неравенство

$$G_x^{\times}(T, \gamma_{xz}^{\times}(\xi))\leqslant G\exp[-f(\tau_s, T)]$$

Доказательство. Так как $\gamma_{xz}^{\times}(\xi)\in R[0, T]$, то промежуток $[\tau_s, T]$ можно разбить точками

$$\tau_s=T_1<T_2<\ldots<T_{n+1}=T$$

на некоторое число n промежутков $[T_i, T_{i+1}]$, $i=1, 2, \ldots, n$, в каждом из которых выполнены условия леммы и, следовательно, неравенства (3.10). Если $\gamma_{xz}^{\times}(\xi)\leqslant\gamma_{xz}^{\times}(T)>0$, $\xi\in[0, T]$, то в неравенствах (3.10) в качестве $\gamma^{(1)}$ можно взять $\gamma_{xz}^{\times}(T)$, тогда $\delta_{n+1}^{(1)}=0$ и

$$\tau_{xz}^{\times}(T)\geqslant[\tau_{xz}^{\times}(T_n)+G\delta_n^{(1)}]\exp[-f(T_n, T_n', T_n'', T_{n+1})]\geqslant$$
$$\geqslant[\tau_{xz}^{\times}(T_{n-1})+G\delta_{n-1}^{(1)}]\exp[-f(T_{n-1}, T_{n-1}', \ldots, T_{n+1})]\geqslant$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\geqslant[\tau_{xz}^{\times}(T_1)+G\delta_1^{(1)}]\exp[-f(T_1, T_1', \ldots, T_{n+1})]=$$
$$=G\gamma_{xz}^{\times}(T)\exp[-f(T_1, T_1', T_1'', \ldots, T_{n+1})]$$

откуда следует, что в этом случае

$$G_x^{\times}(T, \gamma_{xz}^{\times}(\xi))\geqslant G\exp[-f(\tau_s, T)]$$

Если $\gamma_{xz}^{\times}(\xi)\geqslant\gamma_{xz}^{\times}(T)<0$, $\xi\in[0, \mathrm{T}]$, то в неравенствах (3.10) в качестве $\gamma^{(2)}$ можно взять $\gamma_{xz}^{\times}(T)$, тогда $\delta_{n+1}^{(2)}=0$ и

$$\tau_{xz}^{\times}(T)\leqslant[\tau_{xz}^{\times}(T_n)-G\delta_n^{(2)}]\exp[-f(T_n, T_n', T_n'', T_{n+1})]\leqslant$$
$$\leqslant[\tau_{xz}^{\times}(T_{n-1})-G\delta_{n-1}^{(2)}]\exp[-f(T_{n-1}, T_{n-1}', \ldots, T_{n+1})]\leqslant$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\leqslant[\tau_{xz}^{\times}(T_{n-1})-G\delta_1^{(2)}]\exp[-f(T_1, T_1', \ldots, T_{n+1})]=$$
$$=G\gamma_{xz}^{\times}(T)\exp[-f(T_1, T_1', \ldots, T_{n+1})]$$

Откуда следует, что и в этом случае

$$G_x^{\times}(T, \gamma_{xz}^{\times}(\xi))\geqslant G\exp[-f(\tau_s, T)]$$

3) Совершенно аналогично предыдущему можно установить, что

$$G_y^{\times}(T, \gamma_{yz}^{\times}(\xi))\geqslant G\exp[-f(\tau_s, T)],\qquad \gamma_{yz}^{\times}(\xi)\in R'(0, T] \tag{3.13}$$

3°. Рассмотрим ползучесть типа течения. Уравнения связи между напряжениями и деформациями в этом случае имеют вид [7]

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{1}{E}[\dot{\sigma}_x-\nu(\dot{\sigma}_y+\dot{\sigma}_z)]+F(T, t)(\sigma_x-\sigma), \ldots$$
$$\dot{\gamma}_{xy}=\frac{1}{G}\dot{\tau}_{xy}+2F(T, t)\tau_{xy}, \ldots$$

Здесь $F(T, t)$ — положительная функция, причем $[F(T, t)T]'\geqslant 0$, штрих здесь означает дифференцирование по T, точка — дифференцирование по времени.

Подобно случаю теории пластического течения можно доказать, что

$$
\begin{aligned}
&E^\times(t, \varepsilon^\times(\xi)) = E \exp\left[-\frac{2}{3} E \int_0^t [F(T_0, t)\, T_0]'\, dt\right] \\
&G_x^\times(t, \gamma_{xz}^\times(\xi)) = G \exp\left[-2G \int_0^t F(T_0, t)\, dt\right] \qquad (3.14)\\
&G_y^\times(t, \gamma_{yz}^\times(\xi)) = G \exp\left[-2G \int_0^t F(T_0, t)\, dt\right]
\end{aligned}
$$

при $\varepsilon^\times(\xi) = \mathrm{const}$, $\gamma_{xz}^\times(\xi) = \mathrm{const}$, $\gamma_{yz}^\times(\xi) = \mathrm{const}$, $\xi \in [0, t]$

$$
\begin{aligned}
&E^\times(t, \varepsilon^\times(\xi)) \geqslant E \exp\left[-\frac{2}{3} E \int_0^t [F(T_0, t)\, T_0]'\, dt\right] \\
&G_x^\times(t, \gamma_{xz}^\times(\xi)) \geqslant G \exp\left[-2G \int_0^t F(T_0, t)\, dt\right] \qquad (3.15)\\
&G_y^\times(t, \gamma_{yz}^\times(\xi)) \geqslant G \exp\left[-2G \int_0^t F(T_0, t)\, dt\right]
\end{aligned}
$$

при любых $\varepsilon^\times(\xi)$, $\gamma_{xz}^\times(\xi)$, $\gamma_{yz}^\times(\xi)$, $\xi \in [0, t]$, принадлежащих классу $R'[0, t]$.

4. Крутильная форма потери устойчивости равновесия пластинки. Принимаем, что при выпучивании прямоугольной пластинки с тремя свободными краями и одним шарнирноопертым, сжатой вдоль шарнирно-опертого края, срединная плоскость пластинки переходит в линейчатую поверхность.

Уравнение равновесия

$$
\begin{gathered}
\sigma^\circ I_p r^\times = L^\times \\
L^\times = 2\int_\Omega x\tau_{yz}^\times\, d\Omega, \quad \tau_{yz}^\times = G_y^\times \gamma_{yz}^\times, \quad \gamma_{yz}^\times = 2xr^\times \qquad (4.1)
\end{gathered}
$$

Здесь I_p — полярный момент инерции, $r^\times$ — кручение, x — координата, отсчитываемая от срединной поверхности вдоль нормали к ней.

Очевидно, λ_k есть наименьшее значение среди значений λ, при которых уравнение (4.1) имеет решение

$$
\frac{\sigma^\circ}{\sigma_Э^\circ} = \frac{G_y^\times(\lambda, \gamma_{yz}^\times(\xi))}{G}, \quad \gamma_{yz}^\times(\xi) \in R'[0, \lambda] \qquad (4.2)
$$

$\sigma_Э^\circ$ — критическое напряжение при упругих деформациях.

1°. *Теория пластического течения с упрочнением.* В этом случае $\lambda = \sigma^\circ$. Из (3.9), (3.13), (4.2) следует, что

$$
\frac{\sigma_K^\circ}{\sigma_Э^\circ} = \exp\left[-2G \int_{\tau_s}^{T_K} F(T_0)\, dT_0\right], \qquad T_K = \frac{\sigma_K^\circ \operatorname{sign} \sigma_K^\circ}{\sqrt{3}}
$$

При линейном упрочнении ($E' = \mathrm{const}$) и условии несжимаемости материала

$$
\frac{\sigma_K^\circ}{\sigma_Э^\circ} = \left(\frac{\sigma_S^\circ}{\sigma_K^\circ}\right)^{E/E'-1} \qquad (4.3)
$$

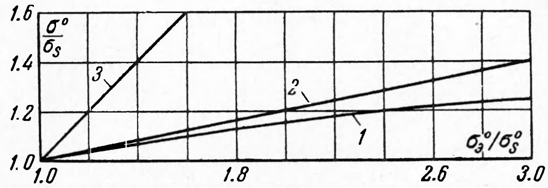
Здесь σ_S° — предел текучести при простом растяжении.

По теории малых упруго-пластических деформаций при линейном упрочнении и условии несжимаемости материала и в предлагаемой постановке, и в постановке Шенли

$$\frac{\sigma_*^\circ}{\sigma_\partial^\circ} = \frac{E'}{E - (E - E')\,\sigma_S^\circ / \sigma_*^\circ} \tag{4.4}$$

Здесь σ_*° — критическое напряжение.

Сравнение условий (4.3), (4.4) для случая $E' = 0.2\,E$ приведено на фигуре. Кривая *1* и прямая *2* соответствуют условиям (4.3), (4.4), прямая *3* — решению по теории течения в постановке Шенли и Кармана.



Фиг. 1

Из фигуры видно, что критические, в смысле предлагаемого критерия, напряжения и по теории пластического течения, и по теории малых упруго-пластических деформаций (на фигуре кривая *1* и прямая *2* соответственно) близки между собой, т. е. при пользовании предлагаемым критерием не возникает парадокса, встречающегося при пользовании критерием Шенли.

2°. *Теория ползучести типа течения.* В этом случае $\lambda = t$. Из (3.14), (3.15), (4.2) следует, что t_k определяется условием

$$\frac{\sigma^\circ}{\sigma_\partial^\circ} = \exp\left[-2G\int_0^{t_k}[F(T_0, t)\,T_0]'\,dt\right]$$

Автор приносит благодарность Л. М. Качанову и Ю. Н. Работнову за указания, советы и замечания при выполнении этой работы и подготовке ее к печати.

Поступила 4 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
2. Дракер Д., Онат Е. Неупругая потеря устойчивости и теории течения. Сб. перев., Механика, 1955, № 3.
3. Batdorf I. B. Theories of plastic buckling. Journal of the Aeronautical Science, 1949, Vol. 16, № 7.
4. Клюшников В. Д. Устойчивость пластин за пределом упругости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
5. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. Гостехиздат, 1949.
6. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок при ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
7. Качанов Л. М. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1949.