Продифференцировав (43), получим интегродифференциальное уравнение

(44)
$$\tilde{\chi}'(\tilde{p}) = \frac{1}{\dfrac{1}{2(\tilde{\chi}(\tilde{p})+1)^{3/2}} + \displaystyle\int_0^{\tilde{p}} \frac{d\tilde{x}}{2(\tilde{\chi}(\tilde{p}) - \tilde{\chi}(\tilde{x}) + 1)^{3/2}}},$$

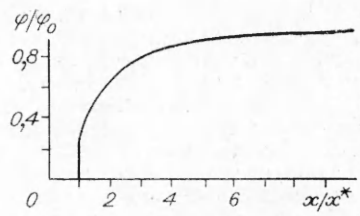

Рис. 2

для которого можно построить простой алгоритм численного решения. Внешне уравнение (44) напоминает задачу Коши, однако его правая часть содержит определенный интеграл искомой функции, верхним пределом которого является текущее значение переменной. Поэтому на каждом шаге численного интегрирования необходимо заново вычислять этот интеграл. Однако достаточная точность численного решения достигается при умеренном объеме расчетов в случае использования квадратурной формулы Ньютона — Котеса высокого (седьмого и выше) порядка для вычисления определенного интеграла и метода Рунге — Кутта для решения задачи Коши.

Построив зависимость $\tilde{\chi}(\tilde{p})$, легко из (42) найти и скорость роста неподвижного слоя $\varphi(\tilde{p})$ с учетом диффузии:

$$\varphi(\tilde{p}) = \frac{\dot{\gamma} l^{*2}}{2} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{p}} \tilde{\chi}'(\tilde{p}) = \frac{l^*}{2T} \tilde{\chi}'(\tilde{p}).$$

Вспомним, что скорость роста неподвижного слоя φ_0 без учета диффузии определяется соотношением $\varphi_0 = \pi^2 x/(4\dot{\gamma} T^2) = (\pi^2/4)(l^*/T)(1+\tilde{p})$, откуда $\dfrac{\varphi}{\varphi_0} = \dfrac{2}{\pi^2} \dfrac{\tilde{\chi}'(\tilde{p})}{1+\tilde{p}}$.

Из зависимости φ/φ_0 от безразмерной продольной координаты, представленной на рис. 2, следует, что поперечная диффузия оказывает заметное влияние на скорость зарастания на участке длиной $(5 \div 10)x^*$ (x^* определяется соотношением (34)).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ваганов Д. А.** Квазистационарное течение реагирующей жидкости, теряющей текучесть при глубоких степенях превращения // ПМТФ.— 1982.— № 3.
2. **Ваганов Д. А.** Стационарное течение реагирующей жидкости с меняющимися с глубиной превращения свойствами // ПМТФ.— 1984.— № 1.
3. **Малкин А. Я., Куличихин С. Г.** Реология в процессах образования и превращения полимеров.— М.: Химия, 1985.
4. **Брагинский Л. Н., Бегачев В. И., Барабаш В. М.** Перемешивание в жидких средах: Физические основы и инженерные методы расчета.— Л.: Химия, 1984.
5. **Будтов В. П., Консетов В. В.** Тепломассообмен в полимеризационных процессах.— Л.: Химия, 1983.

г. Ленинград *Поступила 27/X 1989 г., в окончательном варианте — 10/VIII 1990 г.*

УДК 532.546

С. Е. Холодовский

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

В естественных условиях неоднородность грунтов, как правило, обусловлена их слоистой структурой [1]. Исследованию задач фильтрации жидкости в слоистых грунтах (задач сопряжения) в точной или приближенной постановке посвящена обширная литература (см. обзор в [2]). В точной постановке впервые решение задач сопряжения для двух однородных зон, разделенных прямой или окружностью, дано в [3]. В [4—7] решены задачи сопряжения для трех и четырех однородных зон, разделенных окружностями или параллельными прямыми. При этом используются методы отражений [4], биполярных координат [5], сведения задачи к системе интегральных уравнений [6], решения функциональных уравнений [7].

В настоящей работе методом Фурье в обычных функциях дано решение общей плоской задачи сопряжения для произвольного числа неоднородных зон, разделенных параллельными прямыми, когда течение индуцируется произвольными особыми точками заданных функций медленного роста на бесконечности. В случае слоев с параболической, в частности с постоянной, проницаемостью потенциалы в каждом слое найдены в квадратурах через особенности гармонических функций. При этом слои могут в произвольном порядке перемежаться с трещинами и слабопроницаемыми завесами, которые моделируются бесконечно тонкими слоями бесконечно большой для трещин и бесконечно малой для завес проницаемости.

Рассмотрим линейную фильтрацию жидкости на плоскости x, y, разделенной на зоны $D_i(y_i < y < y_{i-1})$ с функциями проницаемости $K_i(y) \in C^1$, когда течение индуцируется особыми точками функций $f_i(x, y)$ в зонах D_i, где $K_i > 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, $y_0 = \infty$, $y_{n+1} = -\infty$, $f_i(x, y_j) = O(|x|^m)$, при этом у функций $f_i(x, y_j)$ есть предел при $|x| \to \infty$. Для потенциалов φ_i, имеющих особые точки функций f_i, в зонах D_i получим задачу сопряжения:

$$\operatorname{div}(K_i \nabla \varphi_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1; \tag{1}$$

$$y = y_i: \ \varphi_i = \varphi_{i+1}, \quad K_i \partial\varphi_i/\partial y = K_{i+1}\partial\varphi_{i+1}/\partial y, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

В общем случае $|f_i| \bar{\in} L(\partial D_i)$, например, когда f_i — потенциалы источников, и поэтому метод Фурье не применим.

Учитывая, что дифференцирование по $x(D_x)$ понижает порядок полюсов функций $f_i(x, y_j)$ на бесконечности и соотношения (1), (2) инвариантны относительно операции D_x, рассмотрим задачу (1), (2) относительно функций $u_i = D_x^k \varphi_i$, $k \leqslant m+2$, имеющих особые точки функций $F_i = D_x^k f_i$, при этом $|F_i| \in L(\partial D_i)$. Операция D_x соответствует Σ-дифференцированию Σ-моногенных функций [8]. Применяя метод Фурье, функции u_i найдем в виде

$$u_i = F_i + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \sum_{\nu=1}^{2} \left(a_i^\nu \eta_i + b_i^\nu \xi_i\right) \delta_\nu \, d\lambda, \tag{3}$$

где ν — индекс; $a_1^\nu = b_{n+1}^\nu = 0$; $\delta_1 = \cos\lambda x$; $\delta_2 = \sin\lambda x$; $\eta_i(y, \lambda)$, $\xi_i(y, \lambda)$ — ограниченные в D_i решения задач Коши

$$\left(K_i \eta_i'\right)' - \lambda^2 K_i \eta_i = 0; \tag{4}$$

$$y = y_1: \ \xi_1 = 1, \qquad y = y_{i-1}: \ \xi_i = 0, \ \xi_i' = -\lambda, \tag{5}$$

$$y = y_n: \ \eta_{n+1} = 1, \quad y = y_i: \quad \eta_i = 1, \ \eta_i' = 0,$$

$\eta_i' = D_y \eta_i$; параметры $a_i^\nu(\lambda)$, $b_i^\nu(\lambda)$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$a_i^\nu + b_i^\nu \xi_{ii} - a_{i+1}^\nu \eta_{i+1i} = r_i^\nu, \tag{6}$$

$$K_{ii} b_i^\nu \xi_{ii}' + K_{i+1i} a_{i+1}^\nu \eta_{i+1i}' - K_{i+1i} b_{i+1}^\nu = R_i^\nu, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь

$$\xi_{ii} = \xi_i > 0, \quad \xi_{ii}' = -\frac{\xi_i'}{\lambda} > 0, \quad \eta_{i+1i} = \eta_i > 0, \quad \eta_{i+1i}' = \frac{\eta_{i+1}'}{\lambda} > 0 \tag{7}$$

при $y = y_i$, $\lambda > 0$; $K_{ij} = K_i(y_j)$; $r_i^\nu = h_{i+1i}^\nu - h_{ii}^\nu$; $R_i^\nu = \left(K_{ii} H_{ii}^\nu - K_{i+1i} H_{i+1i}^\nu\right)/\lambda$; h_{ij}^ν и H_{ij}^ν — коэффициенты Фурье соответственно функций $F_i(x, y_j)$ и $D_y F_i(x, y_j)$ по $\cos\lambda x$ при $\nu = 1$ и по $\sin\lambda x$ при $\nu = 2$. Неравенства (7) выполняются в силу свойств решений уравнений вида (4): если $\eta_i \eta_i' \geqslant 0$ при $y = y_j$, то $\eta_i \eta_i' > 0$ при $y > y_j$ [9]. Посредством встречной диагонализации решение системы (6) найдем в виде

$$b_1^\nu = \frac{P_1^\nu}{v_1},\ a_i^\nu = \left(S_{i-1}^\nu v_i + P_i^\nu K_{ii-1} G_{i-1}\right)\frac{1}{Q_i},$$

$$b_i^\nu = \left(P_i^\nu g_i - S_{i-1}^\nu K_{i+1i} V_{i+1}\right)\frac{1}{Q_i},\quad a_{n+1}^\nu = \frac{S_n^\nu}{g_{n+1}},$$

где $Q_i = g_i v_i + K_{ii-1} K_{i+1i} V_{i+1} G_{i-1} > 0$; v_i, V_i, P_i^ν, g_i, G_i, S_i^ν выражаются из рекуррентных соотношений

$$v_i = \xi_{ii} K_{i+1i} V_{i+1} + K_{ii}\xi_{ii}' v_{i+1}\eta_{i+1i} > 0,$$

$$V_i = \eta_{ii-1}' v_i + K_{i+1i} V_{i+1} > 0,\quad v_{n+1} = 1,\quad V_{n+1} = \eta_{n+1n}',$$

$$P_i^\nu = r_i^\nu K_{i+1i} V_{i+1} + \eta_{i+1i}\left(R_i^\nu v_{i+1} + K_{i+1i} P_{i+1}^\nu\right),\quad P_{n+1}^\nu = 0$$

при $i = n, \ldots, 1$;

$$g_{i+1} = K_{i+1i}\eta_{i+1i}' G_i + K_{ii}\xi_{ii}'\eta_{i+1i} g_i > 0,$$

$$G_i = \xi_{ii} g_i + K_{ii-1} G_{i-1} > 0,\quad g_1 = G_1 = 1,\quad S_i^\nu = R_i^\nu G_i -$$

$$- K_{ii}\xi_{ii}\left(r_i^\nu g_i - S_{i-1}^\nu\right),\quad S_0^\nu = 0$$

при $i = 1(2), \ldots, n(n+1)$. Учитывая достаточную гладкость функций F_i, можно показать, что интегралы (3) сходятся и допускают дифференцирование необходимое число раз.

Посредством k-кратного интегрирования функций (3) по x найдем потенциалы течения φ_i в форме

(8) $$\varphi_i = \underbrace{\int \ldots \int}_{k} u_i\, dx \ldots dx + \operatorname{Re}\sum_{p=0}^{k} C_{ip} Z_i^p(0, z).$$

Здесь $Z_i^p(0, z)$ — формальные степени Берса [8] с характеристикой $K_i(y)$, при которых коэффициенты C_{ip} определяются из характера особых точек потенциалов на бесконечности. Если функции проницаемости записать как $K_i(y) = (\beta_i y + \gamma_i)^2$, то f_i выражаются через особые точки гармонических функций $\Phi_i(x, y)$: $f_i = \Phi_i/\sqrt{K_i}$, при этом решения задач Коши (4), (5) примут конечный вид

(9) $$\xi_1 = \sqrt{\frac{K_{11}}{K_1(y)}}\, e^{-\lambda(y-y_1)},\quad \xi_i = -\sqrt{\frac{K_{ii-1}}{K_i(y)}}\, \operatorname{sh}\lambda(y - y_{i-1}),$$

$$\eta_i = \frac{\beta_i \operatorname{sh}\lambda(y-y_i) + \lambda\sqrt{K_{ii}}\operatorname{ch}\lambda(y-y_i)}{\lambda\sqrt{K_i(y)}},\quad \eta_{n+1} = \sqrt{\frac{K_{n+1n}}{K_{n+1}(y)}}\, e^{\lambda(y-y_n)},$$

т. е. в данном случае потенциалы выражаются в квадратурах (8).

В полученных формулах возможен переход к пределу при $l_\mu = y_{\mu-1} - y_\mu \to 0$, $K_\mu \to \infty$ ($K_\mu \to 0$) для произвольных однородных зон D_μ. При этом слои D_μ вырождаются в трещины (завесы), которые характеризуются соответственно параметрами $A_\mu = \lim l_\mu K_\mu$, $B_\mu = \lim (l_\mu/K_\mu)$.

Проиллюстрируем сказанное на примере течения под точечной плотиной в слоисто-однородном грунте, состоящем из трех зон D_i, из которых средняя D_2 вырождается в трещину или завесу. В данном случае $f_1 = (H_1 - H_2)\pi^{-1}\operatorname{arctg} x/y$ (H_i — значения потенциала φ_1 на линии бьефов $y = 0$, $y_i < 0$) и для функции ξ_1 кроме условий (5) имеем $\xi_1 = 0$ при $y = 0$. Так как $f_1 \in L(\partial D_1)$, то после дифференцирования f_1 по x с учетом (9), где $\beta_i = 0$, $\xi_1 = \operatorname{sh}\lambda y/\operatorname{sh}\lambda y_1$, найдем функции u_i (3), откуда окончательно потенциалы течения примут вид (8)

$$\varphi_1 = \frac{H_1 - H_2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \int_0^\infty \frac{a}{\lambda Q} e^{\lambda y_1}\operatorname{sh}\lambda y \sin\lambda x\, d\lambda\right] + \frac{H_1 + H_2}{2},$$

$$\varphi_3 = K_1 \frac{H_2 - H_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda Q} e^{\lambda(y-y_1)} \sin \lambda x \, d\lambda + \frac{H_1 + H_2}{2}.$$

Здесь $a = K_3 - K_1 + \lambda A$, $Q = (K_3 + \lambda A)s + K_1 c$ для трещины с параметром A и $a = K_3 - K_1 - K_1 K_3 \lambda B$, $Q = K_3 s + K_1 c (K_3 \lambda B + 1)$ для завесы с параметром B; $s = \operatorname{sh} \lambda |y_1|$; $c = \operatorname{ch} \lambda y_1$. Отсюда, в частности, следует, что горизонтальная трещина $y = y_1$ увеличивает, а завеса $y = y_1$ уменьшает скорость фильтрации на линии бьефов, при этом потенциал на трещине и поток на завесе непрерывны, что согласуется с другими моделями трещины [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арье А. Г.** Физические основы фильтрации подземных вод.— М.: Недра, 1984.
2. **Буйкис А. А.** Моделирование процессов фильтрации в слоистых средах методом консервативного осреднения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Рига, 1987.
3. **Голубева О. В.** Обобщение теоремы об окружности на фильтрационные течения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1966.— № 1.
4. **Чемерис А. Н., Шпилевой А. Я.** О построении фильтрационных течений в неоднородных средах // Проблемы теоретической гидродинамики.— Тула: ТГПИ, 1977.
5. **Ярмицкий А. Г.** Фильтрационная теорема о двух окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 4.
6. **Пилатовский В. П.** Основы гидромеханики тонкого пласта.— М.: Недра, 1966.
7. **Копаев А. В., Радыгин В. М.** Фильтрационные теоремы об окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1990.— № 1.
8. **Берс Л.** Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.— М.: ИЛ, 1961.
9. **Сансоне Д.** Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: ИЛ, 1953.

г. Брянск *Поступила 20/VI 1990 г.*

УДК 532.533

Э. Г. Азнакаев

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЯХ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

В работе проводится описание процессов переноса в многокомпонентных смесях плотных газов и жидкостей. Используется метод описания процессов переноса в плотных средах, впервые предложенный в [1].

1. Исходная система уравнений и постановка задачи. При описании процессов переноса в многокомпонентных плотных смесях примем следующую модель:

— частицы среды считаются бесструктурными с массой m_i и диаметром σ_i ($i = 1, 2, \ldots, m$ — номер компонента смеси, m — число компонентов смеси);

— все компоненты смеси характеризуются одной температурой T и массовой скоростью $\mathbf{u}$;

— рассматривается парный механизм взаимодействия частиц. Потенциал парного межмолекулярного взаимодействия частиц i-го и j-го сортов $\varphi_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ определяется в виде суммы потенциалов твердых сфер $\varphi_{\text{т.с}\, ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ и дальнодействующей притягивающей части межмолекулярного потенциала $\Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ [2]:

$$\varphi_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \begin{cases} \varphi_{\text{т.с}\, ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), & |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < \sigma_{ij}, \\ \Phi_{0ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), & |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \geqslant \sigma_{ij}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$ — пространственные координаты частиц i-го и j-го сортов; $\sigma_{ij} = (\sigma_i + \sigma_j)/2$ — расстояние между частицами i-го и j-го сортов при их контакте.