НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ДИСКАХ СОСТАВНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ТЕПЛООБМЕНА НА ТОРЦОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В. И. Ванько

(*Новосибирск*)

1. Рассмотрим сплошной диск, который прогревается с обода потоком рабочего газа постоянной температуры T_1.

Пусть r — текущий радиус, R — радиус диска на ободе, T — температура диска, γ — коэффициент теплоотдачи от рабочего газа к диску, λ— коэффициент теплопроводности материала диска, принимаемый постоянным; α— коэффициент температуропроводности, τ — время.

Введем безразмерные координату x, температуру u, критерий Био B, критерий Фурье F.

$$x=\frac{r}{R}\quad (0\leqslant x\leqslant 1),\qquad u=\frac{T}{T_1}\quad (0\leqslant u\leqslant 1)$$

$$B=\frac{\gamma R}{\lambda},\qquad F=\frac{\alpha\tau}{R^2}$$

Профиль диска будем предполагать составным гиперболическим и определим его уравнениями

$$h(x)=\begin{cases} kx^{\varkappa_1} & (a\leqslant x\leqslant 1)\\ \text{const} & (0\leqslant x\leqslant a)\end{cases}\qquad (\varkappa_1=-1,\ -2)$$

При $x=1$ происходит конвективный теплообмен, при $x=a$ должно выполняться равенство температур и тепловых потоков.

Уравнения теплопроводности будут иметь вид

$$\alpha\left\{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\frac{1+\varkappa_i}{x}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\}=\frac{\partial u_i}{\partial\tau}\qquad (i=1,\ 2),\qquad \varkappa_2=0 \tag{1.1}$$

граничные условия

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x}+B[1-u_1]=0\quad \text{при } x=1\qquad\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x}=0\quad \text{при } x=0$$

$$u_1=u_2,\quad \frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial u_2}{\partial x}\quad \text{при } x=a$$

начальное условие

$$u_i(x)=0\qquad \text{при } \tau=0$$

Задачу будем решать операционным методом при помощи преобразования Лапласа

$$[u(x,\ \tau)]=\int_0^\infty u(x,\ \tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau=U(x,\ s)$$

Переходя в уравнениях (1.1) и граничных условиях к изображению, учитывая начальное условие, получим уравнения

$$\frac{d^2U_i}{dx^2}+\frac{1+\varkappa_i}{x}\frac{dU_i}{dx}-\frac{s}{\alpha}U_i=0\qquad (i=1,\ 2)$$

с граничными условиями

$$-\frac{dU_1}{dx}+B\left[\frac{1}{s}-U_1\right]=0\quad \text{при } x=1,\qquad \frac{dU_2}{dx}=0 \text{ при } x=0$$

$$U_1=U_2,\quad \frac{dU_1}{dx}=\frac{dU_2}{dx}\quad \text{при } x=a, \tag{1.2}$$

2. Подробно рассмотрим случай $\varkappa_1=-1$. Для изображений решения будут иметь вид

$$\text{(зона 1)}\qquad U_1(x,\ s)=A_{11}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x+A_{12}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x\qquad (a\leqslant x\leqslant 1)$$

$$\text{(зона 2)}\qquad U_2(x,\ s)=A_{21}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x\right)+A_{22}K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\,x\right)\qquad (0\leqslant x\leqslant a)$$

Здесь $I_0(x)$, $K_0(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, так как $K_0(0)=\infty$, то необходимо положить $A_{22}=0$. Три постоянные интегрирования определятся из граничных условий

$$A_{11}=\frac{\Delta A_{11}}{\Delta}, \qquad A_{12}=\frac{\Delta A_{12}}{\Delta}, \qquad A_{21}=\frac{\Delta A_{21}}{\Delta}$$

Здесь

$$\Delta = I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)\left[-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\operatorname{sh}(1-a)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}-B\operatorname{ch}(1-a)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right]+$$
$$+I_0'\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)\left[-\sqrt{\frac{s}{a}}\operatorname{ch}(1-a)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}-B\operatorname{sh}(1-a)\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right]$$

$$\Delta A_{11}=\frac{B}{s}\left[\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)-\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)I_0'\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)\right]$$

$$\Delta A_{12}=\frac{B}{s}\left[\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)I_0'\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)-\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}a\right)\right]$$

$$\Delta A_{21}=-\frac{B}{s}$$

Переходя к оригиналу и используя связь между функциями Бесселя мнимого и действительного аргументов и соотношения между гиперболическими и тригонометрическими функциями, получим

$$u_1(x,\tau)=1-\sum_{n=1}^{\infty}2B\left[\frac{J_0(a\mu_n)\cos\mu_n(x-a)-J_1(a\mu_n)\sin\mu_n(x-a)}{\mu_n\psi'(\mu_n)}\right]\exp(-\mu_n^2F)$$

$$u_2(x,\tau)=1-\sum_{n=1}^{\infty}2B\frac{J_0(\mu_n x)}{\mu_n\psi'(\mu_n)}\exp(-\mu_n^2F)$$

Здесь μ_n — корни характеристического уравнения

$$\psi(\mu)=J_0(a\mu)[\mu\sin\beta\mu-B\cos\beta\mu]-J_1(a\mu)[\mu\cos\beta\mu+B\sin\beta\mu]=0$$

$$\psi'(\mu)=\frac{d\psi}{d\mu} \qquad \beta=1-a$$

3. Аналогичным способом получено решение для диска с показателем $\varkappa_1=-2$

$$u_1^*(x,\tau)=1-\sum_{n=1}^{\infty}2B\left[\frac{\Delta A_{11}^*}{\mu_n\psi'(\mu_n)}J_1(\mu_n x)-\frac{\Delta A_{12}^*}{\mu_n\psi'(\mu_n)}Y_1(\mu_n x)\right]\exp(-\mu_n^2F)$$

$$u_2^*(x,\tau)=1-\sum_{n=1}^{\infty}2B\left[\frac{\Delta A_{21}^*}{\mu_n\psi'(\mu_n)}J_0(\mu_n x)\right]\exp(-\mu_n^2F)$$

Здесь μ_n — корни уравнения

$$\psi(\mu)=[\mu J_0(\mu)+J_1(\mu)(B-1)]\left[-Y_0(a\mu)J_0(a\mu)+\frac{1}{a\mu}J_0(a\mu)Y_1(a\mu)+Y_1(a\mu)J_1(a\mu)\right]+$$
$$+[\mu Y_0(\mu)+Y_1(\mu)(B-1)]\left[J_0^2(a\mu)-\frac{1}{a\mu}J_1(a\mu)J_0(a\mu)+J_1^2(a\mu)\right]=0$$

$$\Delta A_{11}^*=\frac{1}{a\mu_n}Y_1(a\mu_n)J_0(a\mu_n)-J_0(a\mu_n)Y_0(a\mu_n)-Y_1(a\mu_n)J_1(a\mu_n)$$

$$\Delta A_{12}^*=\frac{1}{a\mu_n}J_1(a\mu_n)J_0(a\mu_n)-J_0^2(a\mu_n)-J_1^2(a\mu_n)$$

$$\Delta A_{21}^*=J_0(a\mu_n)Y_1(a\mu_n)-J_1(a\mu_n)Y_0(a\mu_n)$$

Поступила 25 IV 1961