

## ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ И ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА КУМУЛЯТИВНЫХ СТРУЙ НА ОСОБЕННОСТИ ИХ ИНЕРЦИОННОГО РАСТЯЖЕНИЯ В СВОБОДНОМ ПОЛЕТЕ

УДК 623.4.082.6

А. В. Бабкин, С. В. Ладов, В. М. Маринин,  
С. В. Федоров

НИИ специального машиностроения Московского государственного  
технического университета им. Н. Э. Баумана, 107005 Москва

В работе [1] была рассмотрена физико-математическая модель деформирования элемента кумулятивной струи (КС) на стадии равномерного растяжения, предшествующей развитию процесса шейкообразования на КС и ее разрыву на отдельные безградиентные элементы. В рамках модели [1] элемент КС представлялся как несжимаемый цилиндрический жесткоидеальнопластический стержень, растягивающийся при постоянном значении лагранжева градиента осевой скорости. Модель [1] является одной из наиболее простых возможных моделей, описывающих растяжение КС в свободном полете, тем не менее позволяет составить некоторые «опорные» представления о характере изменения кинематических, динамических и энергетических характеристик этого процесса и установить рамки нахождения основной количественной характеристики разрушения струи — коэффициента предельного удлинения. Однако эти представления могут быть существенно уточнены при развитии физико-математической модели в части учета сжимаемости и упругопластических свойств, реально присущих материалу КС. В настоящей работе приведены две подобные физико-математические модели и обсуждаются полученные с их помощью результаты.

Как следует из [1], на стадии равномерного растяжения КС, когда ее элементы сохраняют близкую к цилиндрической форму, каждый из элементов может считаться цилиндрическим стержнем, все параметры движения и состояния которого, за исключением осевой скорости  $V_z$ , зависят только от радиальной координаты  $r$  и времени  $t$ . Данная особенность будет сохраняться вне зависимости от того, считается материал стержня несжимаемым жесткопластическим, как в [1], или же сжимаемым упругопластическим. В связи с этим можно рассматривать процесс деформирования каждого элемента КС в одном из его плоских сечений на основе решения одномерной с осевой симметрией нестационарной задачи динамики сжимаемой упругопластической среды.

Принципиальным отличием постановки такой задачи от подобных одномерных с осевой симметрией задач [2, 3] является необходимость перехода от плоского деформированного состояния при отсутствии осевых деформаций к трехосному деформированному состоянию, возникающему при растяжении цилиндрического стержня с постоянным лагранжевым градиентом осевой скорости. Необходимо и видоизменение закона сохранения массы с целью учета уменьшения площади поперечного сечения растягивающегося элемента КС и приходящейся на единицу длины массы элемента. Эти особенности легко учитываются с помощью кинематических соотношений [1].

Система уравнений, описывающая деформирование сжимаемого упругоидеальнопластического цилиндрического растягивающегося стержня, имеет вид

$$dm = 2\pi r dr \rho = dm_0 / (1 + \dot{\epsilon}_{z0} t); \quad (1)$$

$$\dot{V}_r = \partial(r\sigma_r)/\partial m - \sigma_\theta/(\rho r). \quad (2)$$

$$\dot{E} = (\sigma_r \dot{\epsilon}_r + \sigma_\theta \dot{\epsilon}_\theta + \sigma_z \dot{\epsilon}_z)/\rho; \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_r = \partial V_r / \partial r, \quad \dot{\epsilon}_\theta = V_r / r, \quad \dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_{z0} / (1 + \dot{\epsilon}_{z0} t), \quad \dot{r} = V_r; \quad (4)$$

$$p = K(\rho/\rho_0 - 1)(\rho/\rho_0)^2 + \gamma\rho(E - E_0); \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i^e + \dot{\epsilon}_i^p; \quad (6)$$

$$\dot{S}_i = 2G[\dot{\epsilon}_i^e + (1/3)\dot{\rho}/\rho]; \quad (7)$$

$$\dot{\epsilon}_i^p = \lambda_n S_i; \quad (8)$$

$$S_r^2 + S_\theta^2 + S_z^2 \leq (2/3)Y_0^2; \quad (9)$$

$$\sigma_i = -p + S_i, \quad (10)$$

где  $m$  — радиальная массовая лагранжева координата;  $\rho$  — текущая плотность материала;  $V_r$  — радиальная компонента вектора скорости;  $E$  — удельная внутренняя энергия;  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  и  $S_r$ ,  $S_\theta$ ,  $S_z$  — радиальная, тангенциальная и осевая компоненты тензора напряжений и девиатора напряжений;  $\dot{\epsilon}_r$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta$ ,  $\dot{\epsilon}_z$  — соответствующие компоненты тензора скоростей деформаций;  $\dot{\epsilon}_{z0}$  — начальный градиент осевой скорости [1];  $p$  — давление;  $K$  — модуль объемного сжатия;  $G$  — модуль сдвига;  $Y_0$  — предел текучести материала; индексами  $e$  и  $p$  отмечены упругие и пластические составляющие компонент тензора скоростей деформаций; координатный индекс  $i$  подразумевается принимающим любое из значений  $i = r, \theta, z$ .

Система включает закон сохранения массы (1), записанный для единицы длины кольцевого элемента с учетом изменения ее в процессе удлинения стержня по отношению к начальной в виде  $dm_0 = 2\pi r_0 dr_0 \rho_0$  ( $r_0$  — радиальная лагранжева координата данного кольцевого элемента), уравнение движения (2), уравнение энергии (3) в адиабатическом приближении, кинематические соотношения (4), в которые также введен фиксированный закон изменения во времени осевой составляющей тензора скоростей деформаций [1]. Группа уравнений (5)–(9) характеризует физико-механические свойства материала КС и включает уравнение состояния (5) и уравнения пластического течения Прандтля — Рейсса для упругоидеальнопластического материала [3, 4]. Последние состоят из условия аддитивности упругих  $\dot{\epsilon}_i^e$  и пластических  $\dot{\epsilon}_i^p$  составляющих компонент тензора скоростей деформаций (6), закона Гука (7) в дифференциальной форме для упругих составляющих скоростей деформаций, ассоциированного закона пластического течения (8), в котором скалярный множитель  $\lambda_n$  определяется удельной мощностью пластической деформации:  $\lambda_n = (3/2)(\dot{\epsilon}_r^p S_r + \dot{\epsilon}_\theta^p S_\theta + \dot{\epsilon}_z^p S_z)/Y_0^2$ . Нормирующее слагаемое  $E_0$  в уравнении состояния определялось по нормальной температуре пропорционально удельной теплоемкости материала КС.

В качестве граничных условий, моделирующих условия растяжения элемента КС, задавались кинематическое граничное условие на оси стержня  $V_r(0, t) = 0$  и динамическое граничное условие на свободной боковой поверхности стержня  $r = R$   $\sigma_r(R, t) = 0$ .

Что касается задания начальных условий, адекватных начальным условиям деформирования элементов КС непосредственно сразу после их формирования в результате схлопывания кумулятивной облицовки, то достаточно обоснованно могут быть заданы начальный градиент осевой скорости  $\dot{\epsilon}_{z0}$  (по определяемому экспериментально или расчетным путем распределению скорости движения по длине КС) и начальная удельная внутренняя энергия  $E$  (через удельную теплоемкость материала по начальной температуре элементов КС [5]).

Относительно же начальных значений прочих параметров движения и состояния элементов КС (радиальные скорости  $V_r$  движения, характеристики напряженно-

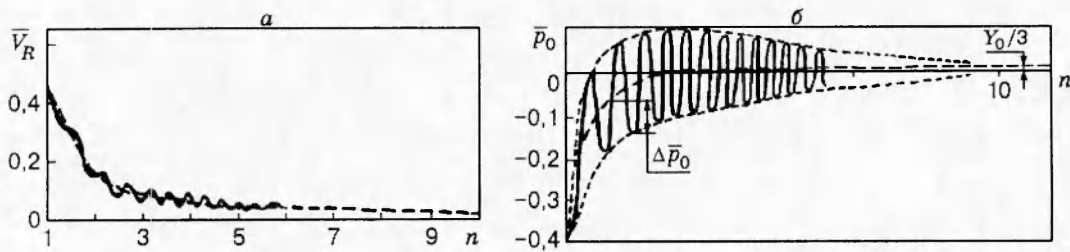


Рис. 1

деформированного состояния материала) экспериментальная информация отсутствует и вряд ли вообще может быть получена путем непосредственных измерений ввиду практического отсутствия возможности доступа в зону формирования КС. Однако недостающие начальные значения параметров движения и состояния вполне могут быть заданы на основе результатов, полученных в рамках модели несжимаемого жесткопластического высокоградиентного стержня [1]. Как видно из расчетов, в этом случае предсказываются наименее «жесткие» условия деформирования элемента КС, и оценка эволюции их кинематических параметров и параметров напряженно-деформированного состояния является оценкой по минимуму.

Решение системы уравнений (1)–(10) при указанных начальных и граничных условиях было получено посредством численного интегрирования с помощью конечно-разностной схемы [3, 6].

В качестве примера, дающего представление о количественной стороне процесса растяжения элемента КС, рассматриваемого в рамках модели цилиндрического сжимаемого упругопластического стержня, на рис. 1 приведены результаты расчетов для элемента средней части медной КС лабораторного кумулятивного заряда с начальным радиусом  $R_0 = 3,5$  мм при  $\dot{\epsilon}_{z0} = 3,18 \cdot 10^5$  с<sup>-1</sup>,  $Y_0 = 0,2$  ГПа,  $G = 45,6$  ГПа и  $K = 80,2$  ГПа. Результаты приведены в виде зависимостей давления на оси элемента струи  $\bar{p}_0 = p(0, t)/(\rho_0 \dot{\epsilon}_{z0}^2 R_0^2)$  (рис. 1, б) и радиальной скорости движения его боковой поверхности  $\bar{V}_R = V_r(R, t)/(\dot{\epsilon}_{z0} R_0)$  (рис. 1, а) от текущего коэффициента удлинения элемента КС  $n = 1 + \dot{\epsilon}_{z0} t$  [1].

Расчеты растяжения элемента КС с учетом сжимаемости и упругопластических свойств материала предсказывают существование колебательного процесса. Колебательный характер имеют изменения напряжений и скоростей, причем колебания параметров происходят относительно показанных штриховыми линиями значений, характерных для соответствующего несжимаемого жесткопластического стержня [1].

Как видно из рис. 1, б, давление на оси симметрии для несжимаемого стержня при его удлинении асимптотически стремится к характерному для одноосного растяжения значению  $-Y_0/3$ , что для элемента КС с указанными выше параметрами достигается практически уже при 4-кратном его удлинении ( $n = 4$ ). Однако существование колебательного процесса приводит к тому, что в соответствующий момент времени внутри струи действуют периодически меняющие знак напряжения с максимальным абсолютным значением около  $p_0 = 1$  ГПа. Амплитуда  $\Delta p_0$  знакопеременных напряжений внутри элемента КС со временем уменьшается, и в конечном счете напряженное состояние все же приближается к состоянию одноосного растяжения. Колебания скоростей и давлений имеют переменный период  $T$ , равномерно уменьшающийся с удлинением стержня. При этом в течение одного цикла колебаний изменение распределений по радиальной координате  $r$  давления и компонент тензора напряжений происходит плавно (с сохранением приблизительно параболического характера), что позволяет характеризовать эволюцию напряженного состояния при растяжении стержня зависимостью давления на оси симметрии, показанной на рис. 1, б.

Очевидно, причинами проявления колебательного процесса при растяжении элемента КС являются присущие реальным материалам и учитываемые в рамках рассматривае-

мой модели свойства сжимаемости и инерционности материала. Количественная характеристика первого — начальная плотность  $\rho_0$ , а второго — модуль объемного сжатия  $K$ . Появлению и существованию колебательного процесса может быть дано следующее объяснение.

Процесс растяжения любого элемента КС нестационарный. Значения параметров движения и состояния элемента, определяемые в предположении несжимаемости материала [1], являются некими квазиравновесными значениями. Они удовлетворяют законам сохранения массы и импульса и по отношению к растягивающемуся стержню будут как бы динамическим аналогом параметров покоя в свободном нерастягивающемся стержне.

Как уже отмечено, начальные условия при расчете растяжения элемента КС задавались кинематически и динамически согласованными из условия несжимаемости материала согласно модели [1]. Поэтому в начальный момент времени ( $t = 0$ ,  $n = 1$ ) значения параметров движения и состояния как бы уравновешены: начальному градиенту осевой скорости  $\dot{\epsilon}_{z0}$  отвечают линейное распределение радиальной скорости  $V_r$  по радиусу элемента и параболические распределения компонент тензора напряжений и давления  $p$  (рис. 1).

Модель несжимаемой среды предполагает бесконечно большую скорость распространения любых возмущений, так что по мере удлинения стержня с течением времени и плавного уменьшения градиента осевой скорости монотонно уменьшаются радиальные скорости движения частиц стержня и напряжения внутри него (штриховые линии на рис. 1). Реальные же среды и более близкая к реальности модель сжимаемой среды такой особенностью не обладают. Если предположить, что в какой-то момент времени (например, в начальный) радиальная скорость наружной поверхности  $V_R$  соответствует скорости для несжимаемого стержня, то уже в близкий последующий момент она должна уменьшаться по модулю.

Однако в силу наличия у материала КС инерционности такое уменьшение скорости запаздывает по времени, сходящееся радиальное движение к оси продолжается с несколько большей скоростью, что приводит к появлению «избыточных» сжимающих радиальных напряжений (а следовательно, и осевых напряжений и давления). Последние тормозят радиальное движение частиц струи, и в силу той же инерционности состояние «динамического равновесия», характерное для несжимаемого стержня, вновь оказывается пройденным на этот раз в сторону уменьшения модуля радиальной скорости, что влечет за собой появление «избыточных» по отношению к квазиравновесным значениям растягивающих напряжений и т. д. — колебательный процесс происходит с попеременной сменой фаз «избыточного» растяжения и сжатия в материале стержня.

Расчеты, проведенные в рамках представленной выше физико-математической модели процесса растяжения элемента КС как цилиндрического сжимаемого упругоидеально-пластического стержня, показали, что на значения его параметров движения и состояния существенно влияют начальный радиус  $R_0$  элемента КС, начальный градиент осевой скорости  $\dot{\epsilon}_{z0}$ , плотность материала  $\rho_0$ , модуль объемного сжатия  $K$ , предел текучести  $Y_0$ . Практически не влияющими на процесс равномерного растяжения КС оказались модуль сдвига  $G$  материала (отвечает малому влиянию упругих деформаций для сильно-развитого пластического течения при деформировании КС), коэффициент Грюнайзена  $\gamma$  и начальная температура материала КС (соответствует слабому проявлению свойства сжимаемости при деформировании КС, когда изменения плотности и возникающие в материале давления невелики). Согласно теории размерностей [7], безразмерное значение  $\Delta \bar{p}_0 = \Delta p_0 / (\rho_0 \dot{\epsilon}_{z0}^2 R_0^2)$  амплитуды колебаний давления на оси стержня оказывается зависящим от безразмерных комплексов:

$$S = K / (\rho_0 \dot{\epsilon}_{z0}^2 R_0^2), \quad \bar{U} = Y_0 / (\rho_0 \dot{\epsilon}_{z0}^2 R_0^2), \quad n = 1 + \dot{\epsilon}_{z0} t. \quad (11)$$

Здесь комплекс  $S$  может быть интерпретирован как характеризующий соотношение сжи-

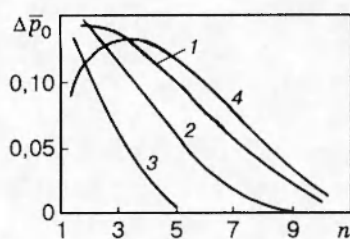


Рис. 2

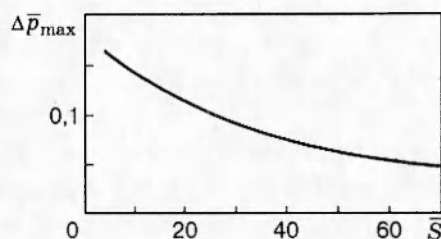


Рис. 3

маемости и инерционности материала элемента КС (в соответствии с [1] комплекс  $\rho_0 \dot{\epsilon}_{z0}^2 R_0^2$  является начальной удельной кинетической энергией радиального движения материала элемента), а комплекс  $\bar{U}$  — как характеризующий соотношение уровня внутренних сил, возникающих в элементе КС при пластическом течении, и инерционности [1].

На рис. 2, 3 показан характер влияния на безразмерную амплитуду  $\Delta \bar{p}_0$  колебаний напряжений безразмерных комплексов (11). Рис. 2 построен по результатам расчетов при постоянном  $S$  и различных значениях  $\bar{U}$  ( $U = 0,018; 0,073; 0,29$  — кривые 1–3). Как видно из рис. 2, максимальное по всему процессу значение амплитуды  $\Delta \bar{p}_{\max}$  колебаний напряжений практически не зависит от комплекса  $\bar{U}$  и, следовательно, определяется соотношением сжимаемости и инерционности.

Характер зависимости  $\Delta \bar{p}_{\max}$  от комплекса  $S$  показан на рис. 3, построенном по результатам расчетов при постоянном  $\bar{U}$ . Чем более сжимаемый и плотный материал КС и чем более массивный и градиентный элемент КС, тем с большей амплитудой происходят колебания. Соотношение же пластических сил и инерционности определяет характер затухания колебаний, которое происходит тем интенсивней, чем более значим диссипирующий фактор, характеризуемый величиной  $Y_0$ , по сравнению с «запасом инерционности»  $\rho_0 \dot{\epsilon}_{z0}^2 R_0^2$ .

Что же касается влияния определяющих безразмерных комплексов (11) на период колебаний, то результаты численных расчетов практически точно аппроксимируются весьма правильной зависимостью безразмерного периода колебаний  $\bar{T} = T \dot{\epsilon}_{z0}$  лишь от двух комплексов:  $\bar{T} = 2,7/\sqrt{nS}$ . В размерной форме период колебаний имеет вид

$$T = 2,7(R_0/\sqrt{n})\sqrt{\rho_0/K} = 2,7\sqrt{\rho_0 R^2/K}, \quad (12)$$

где  $R$  — текущий радиус стержня (элемента КС). Как видно из (12), период колебаний параметров при растяжении сжимаемого стержня определяется соотношением его погонной (приходящейся на единицу длины растягивающегося стержня) массы  $\rho_0 R^2$  и характеристики объемной упругости  $K$ . В связи с этим зависимость (12) оказывается вполне аналогичной известной для простейшей колебательной системы, включающей инерционный и упругий элементы.

Таким образом, моделирование процесса равномерного растяжения КС с учетом сжимаемости и упругопластических свойств материала позволяет получить дополнительную информацию об особенностях эволюции напряженно-деформированного состояния в элементах струи. Однако найденные с помощью представленной выше модели результаты (например, зависимость (12) для периода колебаний  $T$ ) являются результатами как бы «вычислительного эксперимента», в то время как причины существования именно такого характера зависимости остаются нераскрытыми, что требует более углубленного рассмотрения. Оно может быть проведено с помощью еще одной модели, сочетающей в себе лучшие стороны модели [1] элемента КС как несжимаемого жесткопластического стержня (относительная простота и возможность получения элементов аналитического решения) и модели элемента КС как сжимаемого стержня. При этом в качестве основы может быть

использована модель [1], а упрощающие допущения могут базироваться на представленных выше результатах более сложной модели при сохранении в новой модели основного достоинства предыдущей — учета сжимаемости материала.

Будем предполагать, что в процессе растяжения элемента КС как сжимаемого жесткопластического стержня распределение давления  $p$  по радиусу  $r$  стержня имеет параболический вид

$$p = C_2 r^2 + C_0, \quad (13)$$

где коэффициенты  $C_2$  и  $C_0$  являются функциями только времени  $t$ .

Закон сжимаемости материала стержня запишем в форме

$$p = K \ln(\rho/\rho_0), \quad (14)$$

что вполне может заменить более общее уравнение состояния (5) для относительно малых давлений и объемных деформаций, реализующихся в материале КС при ее растяжении, с учетом слабого влияния на параметры колебательного процесса тепловой составляющей (5).

Распределение радиальной компоненты  $V_r$  вектора скорости частиц стержня по радиусу  $r$  может быть найдено из решения уравнения неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \dot{\epsilon}_z = 0,$$

в котором осевая скорость деформации  $\dot{\epsilon}_z$  считается известной функцией времени и изменяется в соответствии с (4). С учетом принятых допущений (13), (14) уравнение неразрывности приводится к виду

$$\frac{1}{K} (\dot{C}_2 r^2 + \dot{C}_0 + 2C_2 r V_r) + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \dot{\epsilon}_z = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение с учетом граничного условия  $V_r = 0$  при  $r = 0$ , находим

$$V_r = \frac{K}{2C_2} \left( \dot{\epsilon}_z + \frac{\dot{C}_0}{K} - \frac{\dot{C}_2}{C_2} \right) \left[ \exp \left( -\frac{C_2 r^2}{K} \right) - 1 \right] \frac{1}{r} - \frac{\dot{C}_2}{2C_2} r.$$

Учитывая далее, что давление в инерционно-деформирующей КС существенно меньше модуля объемного сжатия ( $C_2 r^2/K \ll 1$ ), с использованием разложения в ряд экспоненты получим выражение

$$V_r = -(\dot{\epsilon}_z + \dot{C}_0/K)(r/2) - \dot{C}_2 r^3/(4K). \quad (15)$$

Для нахождения неизвестных функций  $C_0$  и  $C_2$  в распределении давления (13) используем уравнение движения (2) для радиальной компоненты скорости, записав его в форме

$$\rho \frac{dV_r}{dt} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{S_r - S_\theta}{r}.$$

Интегрируя это уравнение по радиусу стержня от некоторого его текущего значения  $r$  до радиуса наружной поверхности  $R$  с учетом граничного условия  $\sigma_r(R) = 0$ , получим

$$\int_r^R \rho \frac{dV_r}{dt} dr = -\sigma_r(r) + \int_r^R \frac{S_r - S_\theta}{r} dr,$$

откуда следуют два соотношения, устанавливающие взаимосвязь между искомыми функциями  $C_0$  и  $C_2$ :

$$C_2 R^2 + C_0 - S_r(R) = 0; \quad (16)$$

$$\int_0^R \rho \frac{dV_r}{dt} dr = C_0 - S_r(0) + \int_0^R \frac{S_r - S_\theta}{r} dr. \quad (17)$$

Вследствие выявленной расчетным путем несущественности влияния упругости материала КС на изменение параметров движения и состояния в процессе растяжения ее элементов для получения приближенного решения значения радиальных компонент девиатора напряжений на оси и на поверхности стержня вполне могут быть приняты соответствующими значениям, найденным по модели несжимаемого жесткопластического стержня [1]:  $S_r(0) = S_r(R) = -Y_0/3$ . Для приближенного же определения входящего в правую часть выражения (17) интеграла могут быть использованы соотношения Сен-Венана — Леви — Мизеса  $S_{ij} = (2/3)(Y_0/\dot{\epsilon}_i)\dot{\epsilon}_{ij}$  [4], где интенсивность скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_i$  (как и для несжимаемого стержня) можно считать равной текущей осевой скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_z$ , а компоненты  $\dot{\epsilon}_{ij}$  тензора скоростей деформаций можно найти с помощью кинематических соотношений по распределению скорости (15):

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\epsilon}_z + \frac{\dot{C}_0}{K}\right) - \frac{3}{4} \frac{\dot{C}_2 r^2}{K}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_r}{r} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\epsilon}_z + \frac{\dot{C}_0}{K}\right) - \frac{\dot{C}_2 r^2}{4K}.$$

С учетом сделанных допущений интеграл в правой части (17) приводится к выражению

$$\int_0^R \frac{S_r - S_\theta}{r} dr = -\frac{1}{6} \frac{Y_0}{\dot{\epsilon}_z} \frac{\dot{C}_2 r^2}{K}.$$

Определяя далее дифференцированием соотношения (15)  $dV_r/dt$  и вычисляя интеграл в левой части (17) по-прежнему в предположении малости  $p$  в материале по сравнению с  $K$ , а также записывая соотношение (15) для боковой поверхности стержня, получим систему трех уравнений, описывающих процесс растяжения цилиндрического сжимаемого пластического стержня:

$$C_2 R^2 + C_0 = -Y_0/3; \quad (18)$$

$$\frac{\rho_0 R^2}{4} \left\{ \frac{1}{2} \left( \dot{\epsilon}_z + \frac{\dot{C}_0}{K} \right)^2 + \frac{\dot{C}_2 R^2}{2K} \left( \dot{\epsilon}_z + \frac{\dot{C}_0}{K} \right) + \frac{\dot{C}_2^2 R^4}{8K^2} - \frac{1}{K} \ddot{C}_0 - \frac{R^2}{4K} \ddot{C}_2 - \ddot{\epsilon}_z \right\} = \dot{C}_0 + \frac{Y_0}{3} - \frac{1}{6} \frac{Y_0}{\dot{\epsilon}_z} \frac{\dot{C}_2 R^2}{K}; \quad (19)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\left( \dot{\epsilon}_z + \frac{\dot{C}_0}{K} \right) \frac{R}{2} - \frac{\dot{C}_2 R^3}{4K}. \quad (20)$$

Уравнения (19), (20) являются обыкновенными дифференциальными, и в целом система (18)–(20) существенно менее сложная, чем уравнения (1)–(10). Помимо имеющих чисто технический характер очевидных преимуществ получения численной информации об исследуемом процессе, система уравнений (18)–(20) позволяет путем дальнейших преобразований найти уравнение вынужденного колебательного процесса в растягивающемся стержне (элементе КС) и установить аналитическую зависимость периода колебаний от параметров КС и характеристик материала.

Путем исключения искомой функции  $C_0$  уравнения (19), (20) приводятся к виду

$$\ddot{C}_2 + \left( \frac{8}{9} \frac{Y_0}{\rho_0 \dot{\epsilon}_z R^2} - \frac{10}{3} \dot{\epsilon}_z \right) \dot{C}_2 + \frac{5}{6} \frac{\dot{C}_2^2 R^2}{K} + \frac{16}{3} \frac{K}{\rho_0 R^2} C_2 = \frac{2}{3} \frac{K}{R^2} (2\ddot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_z^2); \quad (21)$$

$$\frac{dR}{dt} = \left( -\dot{\epsilon}_z + \frac{\dot{C}_2 R^2}{2K} \right) \frac{R}{2}. \quad (22)$$

Влиянием сжимаемости на изменение поперечных размеров стержня можно прене-

брець и поэтому входящий в (21) текущий радиус элемента КС можно принимать изменяющимся в соответствии с законом  $R = R_0/\sqrt{1 + \varepsilon_{z0}t}$  для модели несжимаемой среды. В этом случае (21) может рассматриваться независимо от уравнения (22), которое будет использоваться лишь для определения скорости  $V_R$  поверхности стержня.

Таким образом, произведено описание динамического растяжения сжимаемого пластического стержня, по существу, обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (21). Нетрудно видеть, что это уравнение соответствует вынужденному нелинейному колебательному процессу. Хотя оно и не решается аналитически, однако позволяет сделать определенные выводы о характере колебательного процесса уже на основе анализа своих коэффициентов. Так, частота колебаний  $\omega$  определяется коэффициентом при самой искомой функции  $C_2(t)$ , и период колебаний

$$T = 2\pi/\omega = (\pi\sqrt{3}/2) R\sqrt{\rho_0/K} = 2,72R\sqrt{\rho_0/K},$$

что практически точно совпадает с зависимостью (12), полученной как аппроксимация результатов вычислительного эксперимента в рамках численного решения одномерной нестационарной задачи динамики сжимаемой упругопластической среды, и, по существу, объясняет причины существования именно такой зависимости для периода колебаний.

Как известно из теории колебаний, коэффициент при первой производной  $\dot{C}_2$  в уравнении (22) определяет характер изменения амплитуды колебательного процесса. Амплитуда колебаний должна уменьшаться с течением времени при положительности этого коэффициента и нарастать в противоположном случае. С учетом взаимосвязи текущих и начальных значений радиуса и градиента осевой скорости условие нарастания амплитуды колебаний сводится к неравенствам

$$1 \leq n \leq \sqrt[3]{(15/4)(\rho_0\dot{\varepsilon}_{z0}R_0^2/Y_0)}, \quad (23)$$

что говорит о возможности нарастания амплитуды колебаний на начальной стадии растяжения стержня при достаточно большом начальном соотношении инерционных и пластических сил и объясняет характер начальных участков представленных на рис. 2 результатов численного расчета.

Характер изменения амплитуды колебаний  $\Delta\bar{r}$  согласно упрощенной модели растяжения элемента КС определяется путем численного интегрирования уравнения (21). При этом в качестве начальных условий могут быть заданы значения коэффициента  $C_2$  и его производной по времени  $\dot{C}_2$ , определенные по соотношениям модели несжимаемого жесткопластического стержня [1]:  $C_{20} = -3\rho_0\dot{\varepsilon}_{z0}^2/8$ ,  $\dot{C}_{20} = 3\rho_0\dot{\varepsilon}_{z0}^3/4$ .

Пример расчета растяжения сжимаемого жесткопластического стержня показан на рис. 2 кривой 4, причем характеристики материала и параметры элемента струи для этого случая соответствуют варианту расчета растяжения сжимаемого упругопластического стержня, показанному на этом же рисунке кривой 1; видно, что имеет место удовлетворительное соответствие результатов, полученных с помощью различных моделей, что можно рассматривать как их дополнительную взаимную проверку.

В заключение представим некоторые практические соображения, вытекающие из выявленных с помощью физико-математического моделирования особенностей поведения КС в процессе ее равномерного удлинения.

Как следует из [1, 8], длительность стадии равномерного удлинения КС и предельная способность ее элементов к удлинению до разрыва  $n_{пр}$  увеличиваются с разупрочнением материала, что отвечает уменьшению значения предела текучести  $Y_0$  материала в условиях КС. В частности, при полном разупрочнении материала ( $Y_0 = 0$ ) способность элементов КС к удлинению неограниченна ( $n_{пр} \rightarrow \infty$ ). Из этого следуют соответствующие практические меры по управлению процессом удлинения КС с целью увеличения ее эффективной длины. Однако существование и характер эволюции колебательного процесса при

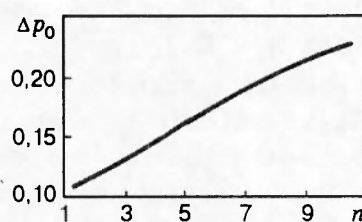


Рис. 4

равномерном растяжении КС накладывают определенные ограничения на возможности подобного положительного воздействия на КС. Так, из (23) следует, что при полном разупрочнении материала КС ее растяжение будет происходить при нарастающей амплитуде колебаний напряжений и скоростей.

Подобный пример показан на рис. 4, где представлены результаты расчета растяжения полностью разупрочненного элемента медной КС с параметрами, отвечающими расчетным вариантам 1 и 4 на рис. 2. Ясно, что при подобном нарастании амплитуды действующих внутри КС напряжений возможно объемное разрушение ее материала в фазах растягивающих напряжений с последующим радиальным рассеиванием материала, уменьшением средней плотности КС, что не может не сказаться на ее пробивном действии.

Возможно, именно этим обстоятельством следует объяснить известный характер разрушения свинцовых КС — равномерное удлинение с последующим «внезапным» объемным разрушением [1]. Свинец обладает высокой плотностью и хорошей сжимаемостью, легкоплавок и в условиях КС, по-видимому, полностью разупрочнен. Все эти факторы работают на интенсификацию колебательного процесса при растяжении свинцовой КС и приводят в итоге к объемному ее разрушению. Низкая же пробивная способность кумулятивных зарядов со свинцовыми облицовками, на первый взгляд противоречащая гидродинамической теории кумуляции [2], является уже следствием «катастрофы», происшедшей с КС на стадии ее удлинения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабкин А. В., Ладов С. В., Маринин В. М., Федоров С. В. Особенности инерционного растяжения кумулятивных струй в свободном полете // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 3–9.
2. Физика взрыва / Под ред. К. П. Станюковича. М.: Наука, 1975.
3. Дресвянников В. И. Численная схема расчета связанных термомеханических и электромагнитных полей в упругопластических телах // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: ГГУ, 1980.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
5. Дильдин Ю. М., Колмаков А. И., Ладов С. В. Особенности пластической деформации материала кумулятивной облицовки // Тр. МВТУ. 1983. № 399.
6. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
8. Chou P. C., Carleone J. The stability of shaped-charge jets // J. Appl. Phys. 1977. V. 48, N 10. P. 4187–4194.

Поступила в редакцию 4/XII 1995 г.