

УДК 536.242+532.54+533.7+519.688

Моделирование методом решеточных уравнений Больцмана течения вязкой жидкости и сопряженного теплообмена в прямоугольной полости с нагретой подвижной стенкой

Д. Алинеджад, Д.А. Эсфахани

Университет Маишада, Иран

E-mail: alinejad.javad@stu-mail.um.ac.ir, Abolfazl@um.ac.ir

В настоящей работе исследуется сопряженный теплообмен в прямоугольной полости с подогреваемой верхней стенкой методом решеточных уравнений Больцмана. Моделирование осуществлено для течения несжимаемой жидкости при числах Рейнольдса в промежутке от 100 до 500, отношениях температуропроводности от 1 до 100 и числах Прандтля от 0,7 до 7. Предполагается наличие теплового потока через верхнюю стенку. Результаты показывают, что метод решеточных уравнений Больцмана пригоден для исследования теплообмена в сопряженных задачах. Исследуется и обсуждается влияние чисел Рейнольдса, Прандтля и температуропроводности на гидродинамические и тепловые характеристики. Приводятся картины линий тока, распределение температуры в поле течения, безразмерная температура и число Нуссельта вдоль горячей стенки. Результаты указывают на то, что увеличение температуропроводности приводит к отводу большего количества энергии от стенки, и ее температура падает с увеличением чисел Рейнольдса и Прандтля.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, сопряженный теплообмен, полость, температуропроводность.

Введение

Задача сопряженного теплообмена в прямоугольной полости с подогреваемой подвижной верхней стенкой — предмет многих исследований ввиду ее приложений в промышленности и технике. Такими приложениями в промышленности являются аэродинамика, экструзия пластиковых листов, процесс конденсации металлической пластины в охлаждаемой ванне, экструзия полимерного листа из красителя. При изготовлении этих листов расплав выпускают через щель и затем вытягивают для достижения желаемой толщины. Скорости вытяжки и охлаждения оказывают заметное влияние на итоговые характеристики. Рассматриваемая задача анализировалась исследователями в различных случаях течения жидкости. В работе [1] было инициировано изучение пограничного слоя на непрерывной твердой поверхности, движущейся с постоянной скоростью в результате движения окружающей жидкости; такой пограничный слой в общем случае отличается от пограничного слоя на полубесконечной плоской пластине. Эта задача исследовалась в работе [2] для случая, когда поперечная скорость на движущейся поверхности отлична от нуля, а также учитываются эффекты тепло- и массообмена. Течение внутри пограничного слоя на стенке, которая вытягивается со скоростью,

пропорциональной расстоянию вдоль стенки, исследовалось в работе [3] методом неавтономного решения. Тепло- и массообмен в пограничном слое на вытягиваемом листе с учетом отсоса или вдува анализировался в [4] с использованием автономного решения. В работе [5] было представлено точное решение задачи Раджагопала. Авторами работы [6] исследовалось течение и теплообмен в вязкоупругой жидкости на непрерывном вытягиваемом листе со степенным законом для поверхностной температуры, включая влияние вязкой диссипации, внутреннего производства или поглощения тепла и работы, затрачиваемой на деформацию, в уравнении энергии. В [7] изучались характеристики течения и теплообмена в вязкой жидкости на нелинейно вытягиваемом листе без учета влияния диссипации тепла. Течение вязкой жидкости и теплообмен на нелинейно вытягиваемом листе рассматривались в работах [8, 9]. В [10] изучалось течение вязкой жидкости на нелинейно вытягиваемом листе при наличии химической реакции и магнитного поля. Авторами работы [11] рассматривалось влияние излучения на МГД-течение с учетом вытягивания листа в пористом пространстве. В работе [12] исследовалось влияние автономного решения задачи о течении и теплообмене жидкости, покоящейся на нелинейно вытягиваемой поверхности. Метод решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) был недавно разработан как новый инструмент для моделирования течений жидкости, теплопередачи и других сложных физических явлений. По сравнению с традиционными методами вычислительной гидродинамики метод решеточных уравнений Больцмана является методом моделирования на микро- и мезомасштабах, основанным на кинематике частиц. У него много преимуществ, таких как простое программирование, легкая реализация граничных условий и полный параллелизм. В работе [13] с помощью метода LBM моделировалась двумерная естественная конвекция в пористых средах. В работе [14] с помощью метода решеточных уравнений Больцмана изучался теплообмен в турбулентном течении в канале с применением моделирования крупномасштабных вихрей, в [15] он использовался при моделировании естественной конвекции наножидкостей в вертикальной квадратной емкости. Этот же метод применялся в работе [16] для моделирования теплопередачи при обтекании квадратной компоновки из четырех изотермических цилиндров. Целью настоящего исследования является реализация LBM для моделирования поля течения и теплопереноса в сопряженных задачах. Для этого представлено систематическое и детальное исследование конвективного охлаждения нагретого листа. Выполнены исследования для ряда параметров, таких как число Рейнольдса, число Прандтля и отношение температуропроводностей (a_s/a_f). Результаты моделирования также сравниваются с обычным моделированием с помощью вычислительной гидродинамики, выполненным другими исследователями.

1. Метод решеточных уравнений Больцмана

Решеточная кинетическая теория и метод решеточных уравнений Больцмана были разработаны как довольно успешный альтернативный численный подход к решению широкого класса задач [17–19]. LBM был выведен из методов решеточного газа и может рассматриваться как явная дискретизация первого порядка точности уравнения Больцмана в фазовом пространстве. Он является мощным численным методом, основанным на кинетической теории, для моделирования течений жидкости [17, 20, 21] и теплопередачи [22, 23] и имеет много преимуществ по сравнению с обычными методами вычислительной гидродинамики, упомянутыми выше. В отличие от классического макроскопического подхода, основывающегося на уравнениях Навье–Стокса, метод решеточных уравнений Больцмана использует модель промежуточного масштаба для моделирования течения жидкости [22]. Он использует моделирование движения частиц жидкости для того, чтобы улавливать макроскопические параметры жидкости, такие как скорость и давление. В этом подходе область жидкости дискретизируется равно-

мерными декартовыми ячейками. Каждая ячейка содержит фиксированное число функций распределения, которые представляют число частиц жидкости, движущихся в этих дискретных направлениях. В зависимости от размерности и количества направлений скорости, имеются различные модели, которые можно использовать. В настоящем исследовании рассмотрены двумерное течение и двумерная квадратная решетка с девятью скоростями (модель D2Q9). Векторы скорости c_0, \dots, c_8 модели D2Q9 показаны на рис. 1. Для каждого вектора скорости хранится значение функции распределения f_k . В модели D2Q9 скорости вычисляются по формулам

$$c_k = \begin{cases} (0, 0), & k = 0, \\ (\pm 1, 0)c, (0, \pm 1)c, & k = 1, 2, 3, 4, \\ (\pm 1, \pm 1)c, & k = 5, 6, 7, 8, \end{cases}$$

где $c = \Delta x / \Delta t$ и k — направление решеточной скорости.

Решеточная модель Больцмана, использованная в настоящей работе, совпадает с описанной в работе [22]. Функции распределения вычисляются путем решения решеточного уравнения Больцмана, которое является особой дискретизацией кинетического уравнения Больцмана. После введения приближения Бхатнагара–Гросса–Крука можно сформулировать уравнение Больцмана в виде [24]

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_k^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) - f_k(\mathbf{x}, t)], \quad (1)$$

где Δt обозначает решеточный временной шаг, c_k — дискретная решеточная скорость в направлении k , τ обозначает решеточное время релаксации, f_k^{eq} — равновесная функция распределения. Равновесные функции распределения вычисляются по формуле

$$f_k^{\text{eq}} = \omega_k \rho \left[1 + \frac{\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right], \quad (2)$$

где значения весовых коэффициентов ω_k таковы:

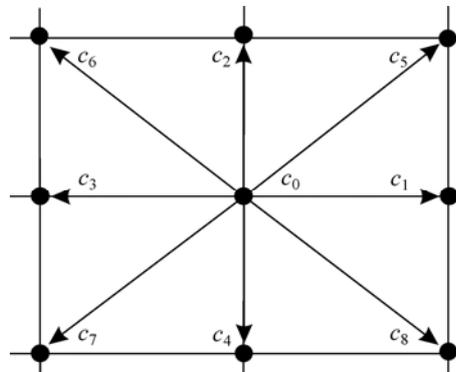
$$\omega_k = \begin{cases} 4/9, & k = 0, \\ 1/9, & k = 1, 2, 3, 4, \\ 1/36, & k = 5, 6, 7, 8, \end{cases}$$

и $c_s = c / \sqrt{3}$ — решеточная скорость звука.

Макроскопические переменные плотности и скорости жидкости вычисляются как первые два момента функций распределения для каждой ячейки:

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 f_k \mathbf{c}_k. \quad (3)$$

Рис. 1. Двумерная решетка из девяти направлений скоростей в модели D2Q9.



Эта модель описана подробнее в работе [24]. Для поля температуры распределение g имеет вид

$$g_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = g_k(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau_g} [g_k^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) - g_k(\mathbf{x}, t)]. \quad (4)$$

Равновесные функции распределения для жидкости и твердого тела соответственно определяются по формулам [22]:

$$g_k^{\text{eq}} = \omega_k T \left[1 + \frac{c_k \mathbf{u}}{c_s^2} \right], \quad (5)$$

$$g_k^{\text{eq}} = \omega_k T. \quad (6)$$

Поле температур рассчитывается по формуле

$$T = \sum_{k=0}^6 g_k. \quad (7)$$

2. Вычислительная процедура

На рис. 2 представлена схема, рассматриваемая в данном исследовании. Левая и правая вертикальные границы изолированные, для верхней границы предполагается постоянный тепловой поток, на нижней границе задается постоянная температура T_c . Стенки размещены на границах расчетной области, и нужно задать неизвестные f_1, \dots, f_8 . Для определения неизвестных функций распределения в узлах верхней границы применяются условия, соответствующие условиям в центрах ячеек, и условия отражения, прилипания и движущейся границы при $u = \text{const}$. В качестве тепловых граничных условий на верхней стенке задается единичный безразмерный тепловой поток, а температура нижней границы предполагается постоянной. Наконец, левая и правая границы изолированные, и используется экстраполяция для получения неизвестных функций распределения. Качество численного решения оценивалось по линиям тока в прямоугольной полости при $Re = 500$, по положению главного вихря и по положениям вторичных угловых вихрей (слева, вверх по потоку, и справа, вниз по потоку) вблизи нижней стенки (рис. 3).

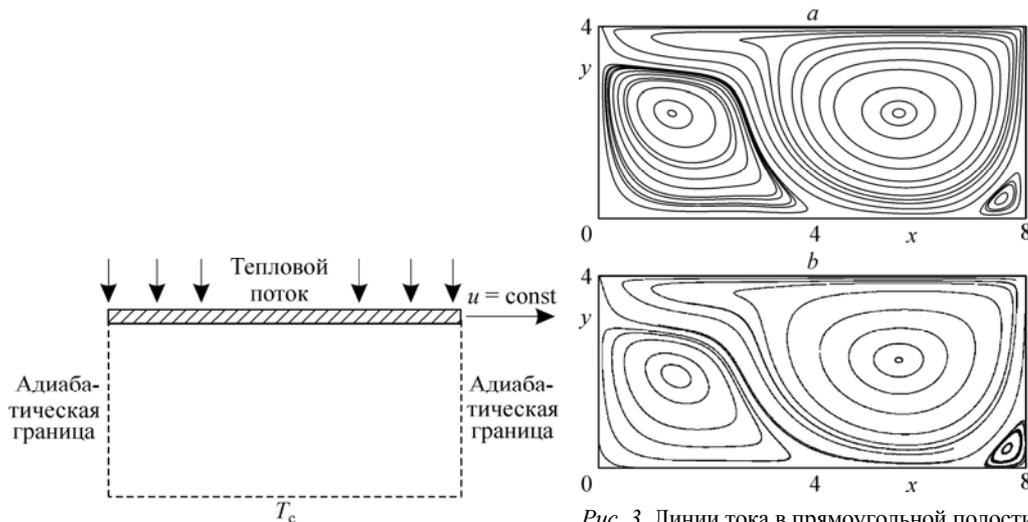


Рис. 2. Схема течения в прямоугольной полости.

Рис. 3. Линии тока в прямоугольной полости при $Re = 500$ в настоящей работе (a) и в работе [25] (b).

3. Результаты и их обсуждение

Сопряженный теплообмен со сложными граничными условиями, такими как экструзия пластмассовых листов, сильно зависит от локальной структуры течения. В таких системах различные значения вязкости и теплопроводности приводят к течению, характеризуемому сложными структурами. Это делает изучение распределения локального теплообмена трудной задачей. Целью работы является исследование влияния изменения скорости движения нагретой стенки и ее тепловых характеристик на течение и теплообмен. Скорость течения и теплообмена характеризуются числами Рейнольдса, изменяющимися от 100 до 500, числом Прандтля, изменяющимся от 0,7 до 7, и значением отношения теплопроводностей, изменяющимся от 1 до 100. Безразмерная температура, число Нуссельта, число Прандтля и число Рейнольдса определяются, соответственно, по формулам:

$$\theta = \frac{T - T_c}{q''L/k_f}, \quad (8)$$

$$\text{Nu}_x = \frac{-1}{\theta_m} \frac{\partial \theta}{\partial n} \Big|_{\text{поверхность листа}}, \quad (9)$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad (10)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho VL}{\mu}. \quad (11)$$

3.1. Влияние числа Рейнольдса

На рис. 4, 5 представлены картины течения и тепловые поля вдоль нагретой стенки. Увеличение числа Рейнольдса вызывает рост тепла, отводимого от стенки. Локальное число Нуссельта и безразмерная температура для различных значений числа Рейнольдса показаны на рис. 6, 7. Можно заметить, что безразмерная температура убывает с ростом числа Рейнольдса. Величина температурного градиента $|\partial \theta_f / \partial n|$ растет на правой стороне стенки вследствие роста количества движения потока. Это является важной мерой повышения надежности экструзии листов.

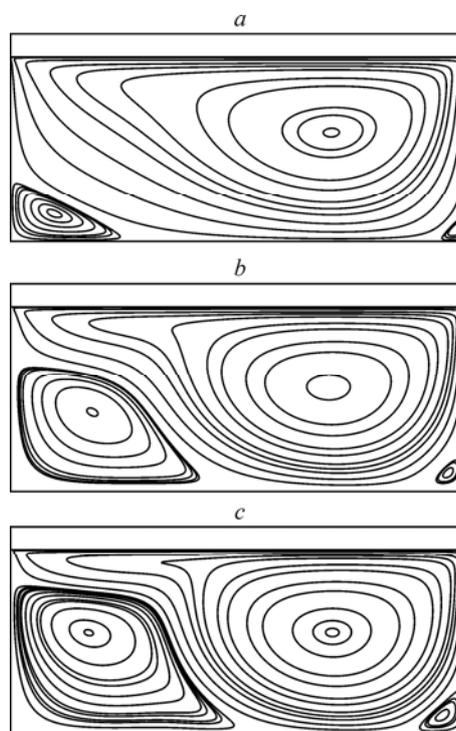


Рис. 4. Линии тока в полости при $\text{Re} = 100$ (a), 250 (b), 500 (c).

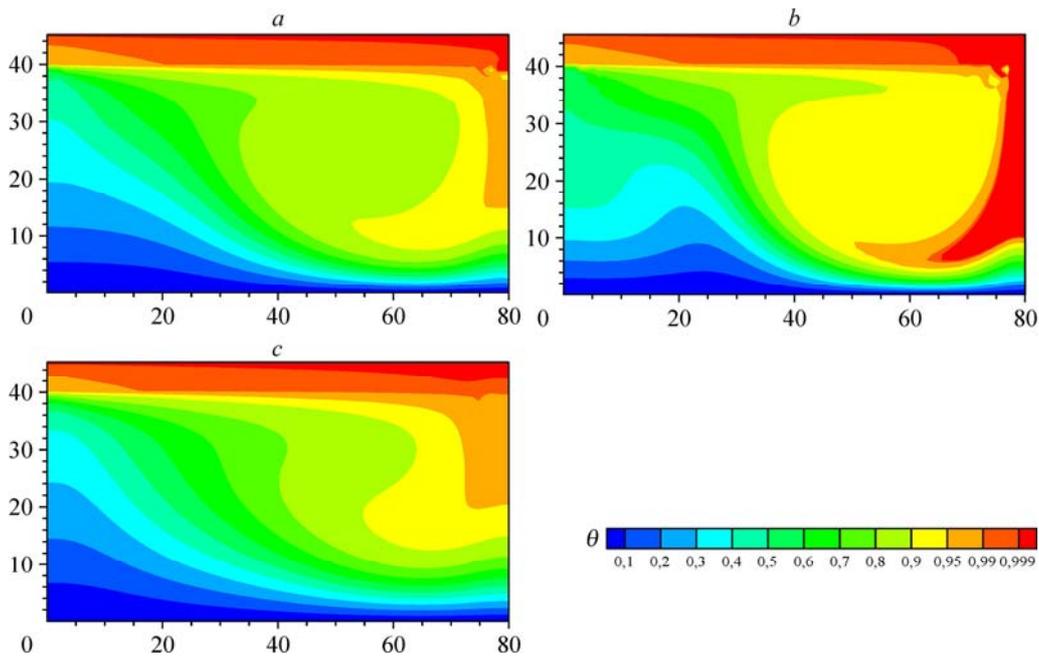


Рис. 5. Изотермы в полости при $Re = 100$ (a), 250 (b), 500 (c).

3.2. Влияние числа Прандтля

На рис. 8 и 9 показаны, соответственно, локальное число Нуссельта и безразмерная температура для $Pr = 0,71$ (воздух) и $Pr = 7$ (вода). Видно, что температура жидкости убывает с ростом числа Прандтля. Этот результат согласуется с тем фактом, что толщина теплового пограничного слоя уменьшается с ростом числа Прандтля. Однако величина градиента температуры на стенке убывает с ростом параметра Pr , что полностью противоположно поведению числа Прандтля. Более того, отрицательные значения градиента температуры на стенке указывают для всех значений безразмерных параметров на тот физический факт, что тепло течет от поверхности стенки к жидкости.

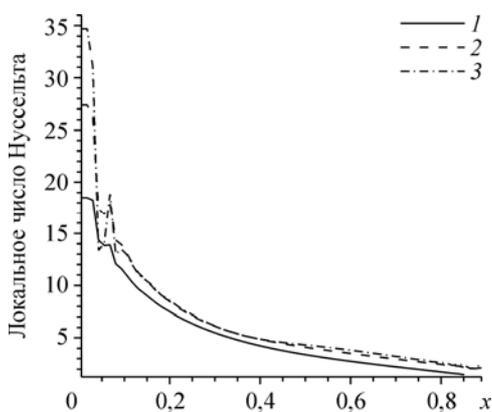


Рис. 6. Локальное число Нуссельта вдоль верхней стенки.
 $Re = 100$ (1), 250 (2), 500 (3).

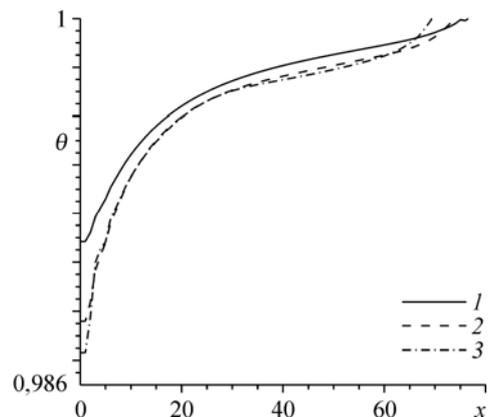


Рис. 7. Безразмерная температура вдоль верхней стенки.
Обозначения см. на рис. 6.

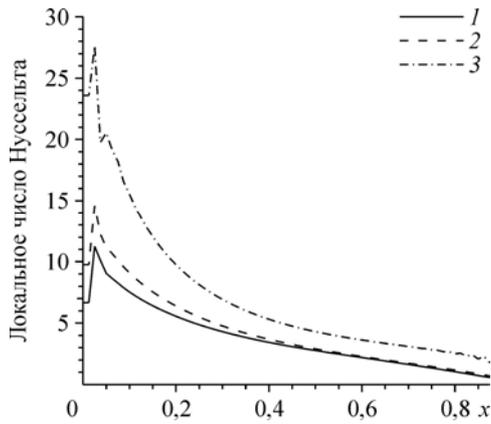


Рис. 8. Локальное число Нуссельта вдоль верхней стенки.
 $Pr = 0,7$ (1), 1 (2), 7 (3).

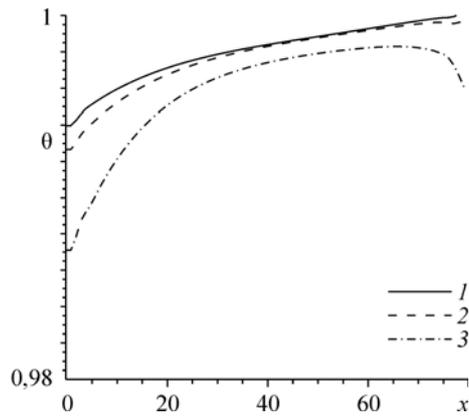


Рис. 9. Безразмерная температура вдоль верхней стенки.
Обозначения см. на рис. 8.

3.3. Влияние отношения теплопроводностей

Теплопроводность стенки оказывает большое влияние на скорость сопряженного теплообмена, как это видно из рис. 10. Здесь предполагается, что число Рейнольдса постоянно и равно 500, но отношение теплопроводностей равно 1, 10, 50 и 100. С ростом отношения теплопроводностей снижается внутреннее сопротивление потоку тепла. На рис. 11 показано распределение безразмерной температуры

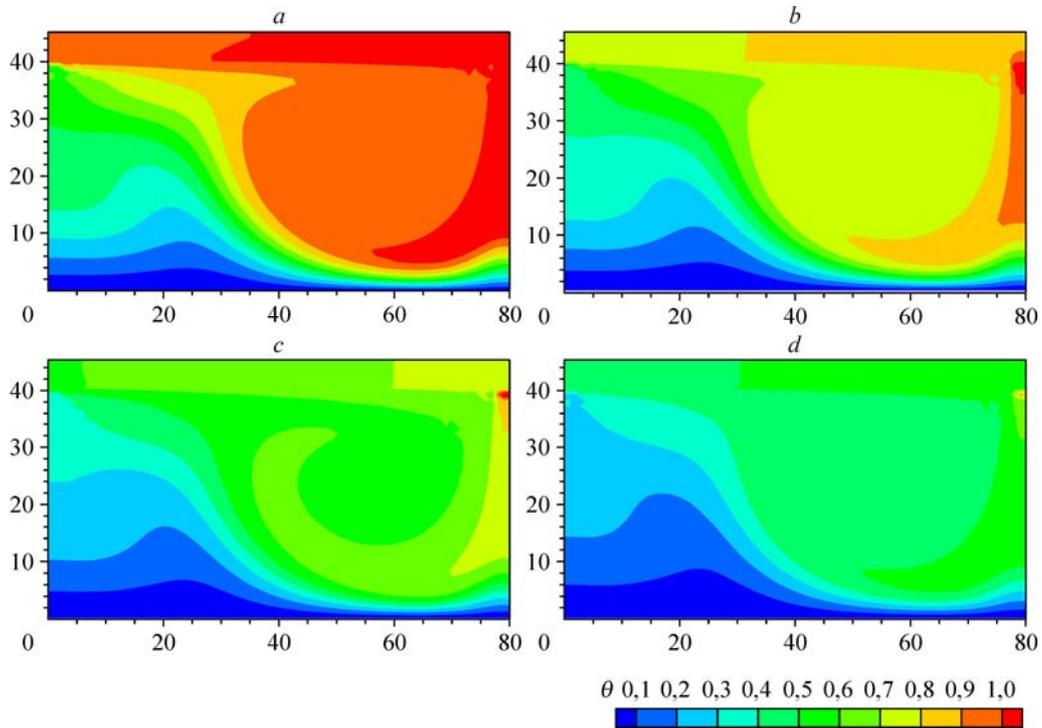


Рис. 10. Изменение изотерм при $Re = 500$: $a_s/a_f = 1$ (a), 10 (b), 50 (c), 100 (d).

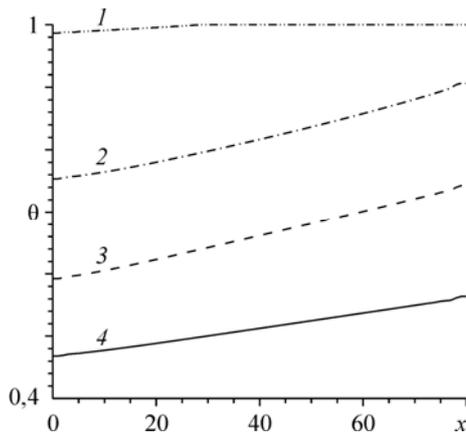


Рис. 11. Безразмерная температура вдоль верхней стенки.

$a_s/a_f = 1$ (1), 10 (2), 50 (3), 100 (4).

на поверхности стенки. При $a_s/a_f = 1$ стенка действует как теплоизолятор и распределение безразмерной температуры значительно отличается для более высоких отношений температуропроводностей. Температура поверхности убывает с увеличением отношения температуропроводностей. С увеличением отношения температуропроводностей кондуктивный поток в твердой фазе также встречает меньшее тепловое сопротивление, и в результате этого при более высоких отношениях твердая фаза становится почти изотермической.

Выводы

Выполнено подробное численное исследование течения и теплообмена в прямоугольной полости с нагретой подвижной верхней стенкой. Реализован двумерный метод решеточных уравнений Больцмана для исследования задач сопряженного теплообмена. По сравнению с обычными методами вычислительной гидродинамики использование ЛВМ в данной задаче имеет преимущества, связанные с простотой расчетной процедуры наряду с возможностью реализации сложных граничных условий. С целью иллюстрации гибкости метода исследовалось влияние различных параметров, таких как число Рейнольдса, число Прандтля и температуропроводность. Предполагалось, что стенка нагрета с помощью равномерного теплового потока. Результаты указывают на то, что с увеличением чисел Рейнольдса и Прандтля суммарное тепло, отведенное от стенки, заметно увеличивается. Этот результат согласуется с тем фактом, что течение ускоряется вблизи движущейся поверхности и вызывает рост теплопередачи от нее. Температуропроводность играет важную роль в скорости сопряженного теплообмена. С увеличением температуропроводности снижается внутреннее сопротивление тепловому потоку, и это приводит к отводу большего количества энергии от нагретой стенки.

Исследование частично поддержано грантом Центра моделирования и систем управления машиностроительного факультета Университета Машхад (Иран).

Список литературы

1. Sakiadinos B.C. Boundary layer behavior on continuous solid surfaces // American Inst. Chem. Engineers. 1961. Vol. 7. P. 26–28.
2. Erickson L.E., Fan L.T., Fox V.G. Heat and mass transfer on a moving continuous moving surface // Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals. 1966. Vol. 5. P. 19–25.
3. Danberg J.E., Fansler K.S. A nonsimilar moving wall boundary layer problem // Quarterly Appl. Math. 1979. Vol. 34. P. 305–309.
4. Gupta P.S., Gupta A.S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // The Canadian J. Chem. Engng. 1977. Vol. 55. P. 744–746.
5. Troy W.C., Overman E.A., II, Ermentrout G.B., Keener J.P. Uniqueness of flow of a second-order fluid past a stretching sheet // Quarterly Appl. Math. 1987. Vol. 44, No. 4. P. 753–755.
6. Vajravelu K., Roper T. Flow and heat transfer in a second grade fluid over a stretching sheet // Inter. J. Non-Linear Mech. 1999. Vol. 34, No. 6. P. 1031–1036.
7. Vajravelu K. Viscous flow over a nonlinearly stretching sheet // Appl. Math. and Computation. 2001. Vol. 124, No. 3. P. 281–288.

8. **Cortell R.** MHD flow and mass transfer of an electrically conducting fluid of second grade in a porous medium over a stretching sheet with chemically reactive species // *Chemical Engng. and Processing*. 2007. Vol. 46, No. 8. P. 721–728.
9. **Cortell R.** Viscous flow and heat transfer over a nonlinearly stretching sheet // *Appl. Math. and Computation*. 2007. Vol. 184, No. 2. P. 864–873.
10. **Raptis A., Perdikis C.** Viscous flow over a non-linearly stretching sheet in the presence of a chemical reaction and magnetic field // *Inter. J. Non-Linear Mech.* 2006. Vol. 41, No. 4. P. 527–529.
11. **Abbas Z., Hayat T.** Radiation effects on MHD flow in a porous space // *Inter. J. Heat and Mass Transfer*. 2008. Vol. 51, No. 5–6. P. 1024–1033.
12. **Cortell R.** Effects of viscous dissipation and radiation on the thermal boundary layer over a nonlinearly stretching sheet // *Physics Lett., Section A*. 2008. Vol. 372, No. 5. P. 631–636.
13. **Zhao C.Y., Dai L.N., Tang G.H., Qu Z.G., Li Z.Y.** Numerical study of natural convection in porous media (metals) using lattice Boltzmann method (LBM) // *Inter. J. Heat and Fluid Flow*. 2010. Vol. 31. P. 925–934.
14. **Wu H., Wang J., Tao Z.** Passive heat transfer in a turbulent channel flow simulation using large eddy simulation based on the lattice Boltzmann method framework // *Inter. J. Heat and Fluid Flow*. 2011. Vol. 32. P. 1111–1119.
15. **Lai F.-H., Yang Y.-T.** Lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer of Al₂O₃/water nanofluids in a square enclosure // *Inter. J. Thermal Sciences*. 2011. Vol. 50. P. 1930–1941
16. **Esfahani J.A., Be-Hagh A.V.** LB simulation of heat transfer in flow past a square unit of four isothermal cylinders // *Comptes Rendus Mecanique*. 2012. Vol. 340. P. 526–535.
17. **Chopard B., Luthi P.O.** Lattice Boltzmann computations and applications to physics // *Theoret. Comput. Phys*. 1999. Vol. 217. P. 115–130.
18. **Nourgaliev R.R., Dinh T.N., Theofanous T.G., Joseph D.** The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *Int. J. Multiph. Flow*. 2003. Vol. 29. P. 117–169.
19. **Yu D., Mei R., Luo L.S., Shyy W.** Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation // *Progr. Aerospace. Sci.* 2003. Vol. 39. P. 329–367.
20. **Mohammad A.A.** *Applied Lattice Boltzmann Method for Transport Phenomena, Momentum, Heat Mass Transfer.* University of Calgary Press, Calgary, 2007.
21. **Aghajani D.M., Farhadi M., Sedighi K.** Effect of heater location on heat transfer and entropy generation in the cavity using the lattice Boltzmann method // *Heat Transfer Research*. 2009. Vol. 40. P. 521–536.
22. **Mezrhab A., Jami M., Abid C., Bouzidi M., Lallemand P.** Lattice Boltzmann modeling of natural convection in an inclined square enclosure with partitions attached to its cold wall // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2006. Vol. 27. P. 456–465.
23. **He X., Luo L.S.** Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equations // *J. Stat. Phys.* 1997. Vol. 88. P. 927–944.
24. **Thürey N., Rüde U.** Stable free surface flows with the lattice Boltzmann method on adaptively coarsened grids // *Comput. Vis. Sci.* 2009. Vol. 12. P. 247–263.
25. **Volkov K.N.** Bifurcation of the lines of an incompressible viscous-fluid flow in a rectangular cavity with a moving wall // *J. Eng. Phys. and Thermophys.* 2006. Vol. 79, No. 2. P. 289–294.

*Статья поступила в редакцию 15 августа 2012 г.,
после доработки — 10 декабря 2012 г.*