

**ТЕРМОУПРУГОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГОРЯЧИХ ПЯТЕН  
С НЕАСИМПТОТИЧЕСКИМ КРАЕМ  
ФИЗИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ**

УДК 539.3

**Б. В. Нерубайло**

**Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва**

Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка из физически ортотропного материала, у которой вдоль какого-либо контура имеется произвольное число периодически расположенных горячих пятен произвольной формы. В полубесконечной оболочке горячие пятна могут располагаться в непосредственной близости от неасимптотического края оболочки, а в частном случае даже примыкать к нему. В принятой постановке горячее пятно может трактоваться как инородное включение, которое обладает отличным от основного материала оболочки коэффициентом линейного температурного расширения при постоянной температуре оболочки. Коэффициенты линейного температурного расширения в продольном и окружном направлении принимаются различными; произведение коэффициента линейного расширения на модуль упругости постоянное по оболочке. Такие исследования представляют как теоретический, так и практический интерес в связи с проблемой термочувствительности выполненных из тугоплавких материалов (например, карбидов циркония) конструктивных элементов различных высокотемпературных установок при возникновении в них температурных полей большой степени локализации — горячих пятен. Именно в таких зонах, где на общее напряженное состояние накладывается еще и локализованное напряженное состояние вследствие появления горячих пятен или макровключений, наиболее вероятно зарождение микротрещин, которое в хрупком материале чревато разрушением даже при однократном воздействии горячих пятен, а в случае, если материал обладает достаточными пластическими свойствами, — при многократных воздействиях, или теплосменах.

При использовании полных уравнений теории физически ортотропных упругих тонких оболочек, построенной на основе гипотез Кирхгофа — Лява, задача о действии на оболочку температурного поля  $t(\alpha, \beta)$  может быть приведена к следующим двум дифференциальным уравнениям относительно разрешающих функций  $\Phi^*(\alpha, \beta)$ ,  $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$  [1]:

$$\mathcal{L}\Phi^*(\alpha, \beta) = (\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t})c^{-2}Rt^*(\alpha, \beta), \quad \mathcal{L}\Phi^{**}(\alpha, \beta) = -(6c^2)^{-1}(\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t})ht^{**}(\alpha, \beta). \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\partial^8}{\partial\alpha^8} + a_{6,2} \frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2} + 2\nu_2 \frac{\partial^6}{\partial\alpha^6} + a_{4,4} \frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\beta^4} + a_{4,2} \frac{\partial^6}{\partial\alpha^4\partial\beta^2} + \lambda \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \\ & + a_{2,6} \frac{\partial^8}{\partial\alpha^2\partial\beta^6} + a_{2,4} \frac{\partial^6}{\partial\alpha^2\partial\beta^4} + a_{2,2} \frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \left( \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1 \right)^2 + \frac{1 - \nu_1\nu_2}{c^2} \lambda \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}; \\ a_{6,2} = & \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} + 4\mu_1; \quad a_{4,4} = 2\lambda \left[ 3 + \frac{\nu_1}{\mu_2} (1 - \nu_1\nu_2) - 4\nu_1(\nu_2 + \mu_1) \right]; \quad a_{4,2} = a_{4,4}; \\ a_{2,6} = & \lambda a_{6,2}; \quad a_{2,4} = 2\lambda(a_{6,2} - \nu_2); \quad \mu_2 = (G/E_2)(1 - \nu_1\nu_2); \quad a_{2,2} = \lambda((\lambda - \nu_2^2)/\mu_1 - 2\nu_2); \\ & \mu_1 = (G/E_1)(1 - \nu_1\nu_2); \quad \lambda = E_2/E_1 = \nu_2/\nu_1; \quad c^2 = h^2/12R^2; \end{aligned}$$

$\alpha, \beta$  — безразмерные продольная и окружная координаты;  $R$  и  $h$  — радиус и толщина

оболочки;  $E_1$  и  $E_2$  — модули упругости материала оболочки в направлениях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;  $G$  — модуль сдвига;  $\nu_1$  — коэффициент поперечного сжатия в направлении  $\beta$  при растяжении в направлении  $\alpha$ ;  $\nu_2$  — коэффициент поперечного сжатия в направлении  $\alpha$  при растяжении в направлении  $\beta$ ;  $\alpha_{1t}$ ,  $\alpha_{2t}$  — коэффициенты линейного температурного расширения в направлении  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;  $t^*(\alpha, \beta) = (t_1 + t_2)/2$ ;  $t^{**}(\alpha, \beta) = (t_2 - t_1)/2$ ;  $t_2(\alpha, \beta)$ ,  $t_1(\alpha, \beta)$  — температура внутренней и наружной поверхности оболочки.

Перемещения, усилия, изгибающие моменты и другие факторы связаны с разрешающими функциями  $\Phi^*(\alpha, \beta)$ ,  $\Phi^{**}(\alpha, \beta)$  с помощью дифференциальных соотношений [2].

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь воздействия на оболочку температурного поля  $t^*(\alpha, \beta)$ , имея в виду, что решение для температурного поля  $t^{**}(\alpha, \beta)$  может быть построено аналогично (индекс \* ниже опускаем).

Численная реализация решения уравнений общей теории цилиндрических ортотропных оболочек связана с определенными трудностями. Высокий порядок разрешающих уравнений (1) и громоздкость выражений для искомым факторов через разрешающую функцию делают практически невозможным получение удобных аналитических решений краевых задач. Тем более исключается возможность записи решений в замкнутом виде или в виде конечных формул, не содержащих рядов. Поэтому при решении краевых задач обратимся к методам асимптотического синтеза (МАС) напряженно-деформированного состояния [5, 2], для чего запишем приближенные уравнения: полубезмоментной теории, простого краевого эффекта, обобщенные уравнения Власова — Доннелла и уравнения тангенциального состояния.

Уравнение полубезмоментной теории получим путем упрощения первого из разрешающих уравнений (1) на основе принятия сильного неравенства  $(|\partial^2\Phi/\partial\beta^2|) \gg (|\partial^2\Phi/\partial\alpha^2|)$ :

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} + \frac{\lambda c^2}{1 - \nu_1\nu_2} \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} \left( \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1 \right)^2 \Phi = \frac{\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}}{\lambda(1 - \nu_1\nu_2)} Rt(\alpha, \beta). \quad (2)$$

Разрешающее уравнение (2), полученное из (1) с помощью критерия В. В. Новожилова [3], являющееся обобщением разрешающего уравнения полубезмоментной теории В. З. Власова [4], описывает здесь основное состояние.

Разрешающее уравнение неосесимметричного простого краевого эффекта

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \lambda \frac{1 - \nu_1\nu_2}{c^2} w = (\nu_2^2 - \lambda) \frac{\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}}{c^2} Rt(\alpha, \beta) \quad (3)$$

получено из (1) путем применения сильных неравенств

$$\left| \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} \right|, \quad \left| \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} \right| \gg |\Phi|.$$

Обобщенное на случай физически ортотропных оболочек разрешающее уравнение теории пологих оболочек (Власова — Доннелла) имеет вид

$$\left( \frac{\partial^8}{\partial\alpha^8} + a_{6,2} \frac{\partial^8}{\partial\alpha^6\partial\beta^2} + a_{4,4} \frac{\partial^8}{\partial\alpha^4\partial\beta^4} + a_{2,6} \frac{\partial^8}{\partial\alpha^2\partial\beta^6} + \lambda^2 \frac{\partial^8}{\partial\beta^8} + \lambda \frac{1 - \nu_1\nu_2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} \right) \Phi(\alpha, \beta) = \frac{\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}}{c^2} Rt(\alpha, \beta). \quad (4)$$

Уравнение (4) получено из (1) путем сохранения только старших производных, т. е. производных восьмого порядка.

При очень высокой изменяемости напряженного состояния (оценка приведена ниже) возникает ситуация, когда можно пренебречь последним членом в уравнении (4) по сравнению с остальными. Тогда уравнение (4) переходит в полигармоническое, и напряженное состояние оболочки распадается на два независимых состояния: тангенциальное и

изгибное. Первое из них, аналогичное плоской задаче теории упругости, возникает при действии нагрузок в срединной поверхности оболочки и при температурном поле  $t^*(\alpha, \beta)$ , постоянном по толщине. Второе, аналогичное изгибу пластинки, возникает при действии поперечной нагрузки и при температурном поле  $t^{**}(\alpha, \beta)$ .

В случае температурного поля, постоянного по толщине оболочки, для тангенциального состояния получим разрешающее уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + \left( \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \lambda \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} = (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) Rt(\alpha, \beta). \quad (5)$$

Рассмотрим полубесконечные оболочки со свободным краем и с жестко заземленным краем под действием системы горячих пятен, которые возникают в зоне свободного (жесткого) края оболочки. Поместим начало координат в центре одной из нагретых областей (в центре горячего пятна) и представим температурное поле в форме ряда Фурье в окружном направлении и в форме интеграла Фурье в продольном направлении:

$$t(\alpha, \beta) = t_0 \theta(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta, \quad \theta(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha \omega d\omega \int_0^{\infty} \theta(\alpha) \cos \omega \alpha d\alpha. \quad (6)$$

Здесь  $t_0$  — амплитудное значение температуры;  $\theta(\alpha)$  — безразмерная функция распределения температуры вдоль образующей;  $\theta_n$  — коэффициент ряда Фурье;  $k$  — количество горячих пятен в фиксированном сечении оболочки  $\alpha = 0$ .

Ищем решение разрешающего уравнения (1) в форме

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\alpha) \cos kn\beta. \quad (7)$$

В результате подстановки (6), (7) в (1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции  $\Phi_n(\alpha)$ :

$$\bar{\mathcal{L}} \Phi_n(\alpha) = (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) c^{-2} Rt_0 \theta_n \theta(\alpha); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} = & \frac{d^8}{d\alpha^8} + (2\nu_2 - a_{6,2} k^2 n^2) \frac{d^6}{d\alpha^6} + (a_{4,4} k^4 n^4 - a_{4,2} k^2 n^2 + \lambda) \frac{d^4}{d\alpha^4} - \\ & - (a_{2,6} k^6 n^6 - a_{2,4} k^4 n^4 + a_{2,2} k^2 n^2) \frac{d^2}{d\alpha^2} + \lambda^2 k^4 n^4 (k^2 n^2 - 1)^2 + (1 - \nu_1 \nu_2) c^{-2} \lambda \frac{d^4}{d\alpha^4}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для рассматриваемых оболочек решение должно удовлетворять краевым условиям на бесконечности и следующим краевым условиям на крае оболочки при  $\alpha = -\xi$ :

— свободный край

$$T_{1n}(-\xi) = S_n(-\xi) = 0 \quad (\text{тангенциальные условия}); \quad (10)$$

$$Q_{1n}^*(-\xi) = G_{1n}(-\xi) = 0 \quad (\text{нетангенциальные условия}); \quad (11)$$

— заземленный край

$$u_n(-\xi) = v_n(-\xi) = 0 \quad (\text{тангенциальные условия}); \quad (12)$$

$$w_n(-\xi) = w'_{\alpha n}(-\xi) = 0 \quad (\text{нетангенциальные условия}). \quad (13)$$

Численная реализация краевых задач для дифференциального уравнения (8) с краевыми условиями (10)–(13) связана, как уже отмечалось ранее, с известными трудностями, которые могут быть преодолены, если применить МАС напряженного состояния, сформулированные в [5] и развитые в [2]. МАС позволяют заменить краевую задачу для дифференциального уравнения (8) с краевыми условиями (10)–(13) на ряд краевых задач для

дифференциальных уравнений более простой структуры и более низкого порядка: (2)–(5). В [5, 2] предложено три МАС:

1) основан на условии обеспечения минимума асимптотической погрешности и применении уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта при «низких» номерах гармоник  $n$ , уравнений Власова — Доннелла при «средних» и «высоких»  $n$ ;

2) основан на использовании уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта при «низких»  $n$ , уравнений Власова — Доннелла при «средних»  $n$ , уравнений типа плоской задачи теории упругости и изгиба пластин при «высоких»  $n$ ;

3) основан на применении уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта при «низких» и «средних»  $n$  и уравнений типа плоской задачи и изгиба пластин при «высоких»  $n$ .

К «низким», «средним» и «высоким» номерам гармоник относятся соответственно  $n \leq \bar{n}$ ,  $\bar{n} + 1 \leq n \leq n^*$ ,  $n \geq n^* + 1$ . Для физически ортотропных оболочек формулы для номеров гармоник  $n = \bar{n}$ ,  $n = n^*$ , определяющих границы применения приближенных уравнений (2)–(5), имеют вид

$$\tilde{n}^4 \approx 2\sqrt{3} \frac{R}{h} \left[ \sqrt{\lambda} \left( \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} + 2\sqrt{\mu_1 \mu_2} \right) - \frac{\nu_2}{2} \right] \left( \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{2\sqrt{\mu_1 \mu_2}} + 2\sqrt{\mu_1 \mu_2} \right)^{-2}, \quad (14)$$

$$\tilde{n}^4 \approx 6(1 - \nu_1 \nu_2) (R/h)^2 \sqrt{R/h} [3 + (\nu_1/\mu_2)(1 - \nu_1 \nu_2) - 4\nu_1(\nu_2 + \mu_1)]^{-1}, \quad \tilde{n} = kn.$$

Найденное по первой из формул (14) значение номера гармоники  $n$ , округленное до ближайшего целого числа, дает  $n$ , а по второй из этих формул —  $n^*$ .

Для решения поставленных краевых задач воспользуемся вторым МАС, который приводит к решению уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта (2), (3) при  $n \leq \bar{n}$ , уравнений теории пологих оболочек (4) при  $\bar{n} + 1 \leq n \leq n^*$  и уравнений тангенциального состояния (5) при  $n \geq n^* + 1$ . Тогда в соответствии с этим МАС разрешающая функция может быть представлена приближенно:

$$\Phi_n(\alpha) \approx \Phi_n^o(\alpha) + \Phi_n^k(\alpha) \quad (n \leq \bar{n}), \quad \Phi_n(\alpha) \approx \Phi_n^h(\alpha) \quad (\bar{n} + 1 \leq n \leq n^*),$$

$$\Phi_n(\alpha) \approx \Phi_n^t(\alpha) \quad (n \geq n^* + 1). \quad (15)$$

Здесь функции  $\Phi_n^o(\alpha)$ ,  $\Phi_n^k(\alpha)$ ,  $\Phi_n^h(\alpha)$ ,  $\Phi_n^t(\alpha)$  описывают основное состояние, краевой эффект, напряженное состояние на основе теории пологих оболочек, тангенциальное состояние (индексы о, к, н, т соответственно).

Для функции  $\Phi_n^o(\alpha)$  вместо (8) на основе (2) получим уравнение

$$\left( \frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\mu_n^4 \right) \Phi_n^o(\alpha) = (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) \lambda^{-1} (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} R t_0 \theta_n \theta(\alpha)$$

$$(4\mu_n^4 = c^2 \lambda (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} \tilde{n}^4 (\tilde{n}^2 - 1)^2, \quad \tilde{n} = kn), \quad (16)$$

решение которого складывается из решения однородного уравнения ( $t_0 = 0$ ) и частного решения, найденного путем применения к (16) преобразования Фурье:

$$\Phi_n^o(\alpha) = c_1^o \chi_n(\alpha) + c_2^o \zeta_n(\alpha) +$$

$$+ (2\pi\lambda)^{-1} (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} (\alpha_{2t} + \nu_1 \alpha_{1t}) R t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\alpha}}{\omega^4 + 4\mu_n^4} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha. \quad (17)$$

Здесь функции  $\chi_n(\alpha)$ ,  $\zeta_n(\alpha)$  заданы формулами  $\chi_n(\alpha) = \exp(-\mu_n \alpha) \cos \mu_n \alpha$ ,  $\zeta_n(\alpha) = \exp(-\mu_n \alpha) \sin \mu_n \alpha$ , а произвольные постоянные  $c_1^o$ ,  $c_2^o$  определяются из краевых условий (10) при свободном крае оболочки или из условий (12) при защемленном крае оболочки.

Для разрешающей функции краевого эффекта, за которую принято радиальное перемещение, имеем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^4}{d\alpha^4} + 4\eta^2\right)w_n^{\bar{}}(\alpha) = -(\lambda - \nu_2\nu)(\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t})c^{-2}Rt_0\theta_n\theta(\alpha), \quad (18)$$

где  $\nu = (\alpha_{1t} + \nu_2\alpha_{2t})/(\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t})$ ;  $4\eta^2 = \lambda(1 - \nu_1\nu_2)c^{-2}$ .

Решение уравнения (18) с учетом краевых условий на бесконечности запишем в виде  $w_n^{\bar{}}(\alpha) = c_1^{\bar{}}\chi(\alpha) + c_2^{\bar{}}\zeta(\alpha) -$

$$-(2\pi c^2)^{-1}(\lambda - \nu_2\nu)(\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t})Rt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\alpha}}{\omega^4 + 4\eta^2} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha)e^{i\omega\alpha} d\alpha. \quad (19)$$

Функции  $\chi(\alpha)$ ,  $\zeta(\alpha)$  заданы формулами  $\chi(\alpha) = \exp(-\eta\alpha)\cos\eta\alpha$ ,  $\zeta(\alpha) = \exp(-\eta\alpha)\sin\eta\alpha$ , а произвольные постоянные  $c_1^{\bar{}}$ ,  $c_2^{\bar{}}$  находятся из граничных условий (11) или (13) соответственно для свободного и жестко заземленного края.

Невязка в краевых условиях, появляющаяся за счет раздельного наложения тангенциальных и нетангенциальных краевых условий, устраняется с помощью корректирующего краевого эффекта при  $\alpha = -\xi$  ( $\alpha^+ = \alpha + \xi = 0$ ) на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned} Ehw_n^{\bar{}}(\alpha^+, \beta) &= 2\eta[c_1\chi(\alpha^+) - c_2\zeta(\alpha^+)], & RT_{2n}^{\bar{}}(\alpha^+, \beta) &= -2\eta[c_1\chi(\alpha^+) - c_2\zeta(\alpha^+)], \\ \eta G_{1n}^{\bar{}}(\alpha^+, \beta) &= -[c_1\zeta(\alpha^+) + c_2\chi(\alpha^+)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Произвольные постоянные  $c_1$ ,  $c_2$  находятся из нетангенциальных условий на крае  $\alpha = -\xi$  оболочки. Так, в случае свободного края получим

$$G_{1n}(-\xi) = G_{1n}^{\bar{}}(-\xi, c_1, c_2) + G_{1n}^{\circ}(-\xi) = 0, \quad Q_{1n}(-\xi) = Q_{1n}^{\bar{}}(-\xi, c_1, c_2) + Q_{1n}^{\circ}(-\xi) = 0. \quad (21)$$

Для края с жестким заземлением процедура строится аналогично. Отметим, что в (21) величины  $G_{1n}^{\circ}(-\xi)$ ,  $Q_{1n}^{\circ}(-\xi)$  — амплитудные значения продольного изгибающего момента и перерезывающей силы основного состояния.

Для напряженного состояния при  $\bar{n} + 1 \leq n \leq n^*$  разрешающей функцией является  $\Phi_n^{\bar{}}(\alpha)$ , которая есть решение уравнения (8), где  $\bar{\mathcal{L}}$  принимает вид

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{d^8}{d\alpha^8} - a_{6,2}\bar{n}^2 \frac{d^6}{d\alpha^6} + a_{4,4}\bar{n}^4 \frac{d^4}{d\alpha^4} - a_{2,6}\bar{n}^6 \frac{d^2}{d\alpha^2} + \lambda^2\bar{n}^8 + (1 - \nu_1\nu_2)c^{-2}\lambda \frac{d^4}{d\alpha^4}. \quad (22)$$

Функция  $\Phi_n^{\bar{}}(\alpha)$  должна удовлетворять условиям на бесконечности и на крае  $\alpha = -\xi$  оболочки:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{\bar{}}(\alpha) &= c_1 \exp(-r_{1n}\alpha) \sin s_{1n}\alpha + c_2 \exp(-r_{1n}\alpha) \cos s_{1n}\alpha + \\ &+ c_3 \exp(-r_{2n}\alpha) \sin s_{2n}\alpha + c_4 \exp(-r_{2n}\alpha) \cos s_{2n}\alpha + \hat{\Phi}_n(\alpha). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $r_{1n}$ ,  $s_{1n}$ ,  $r_{2n}$ ,  $s_{2n}$  — действительные и мнимые части восьми комплексных корней  $\alpha_{1-4} = \pm r_{1n} \pm is_{1n}$ ,  $\alpha_{5-8} = \pm r_{2n} \pm is_{2n}$  следующего характеристического уравнения для дифференциального уравнения (8) с оператором (22) вместо оператора (9):

$$\alpha^8 - a_{6,2}\bar{n}^2\alpha^6 + [a_{4,4}\bar{n}^4 + (1 - \nu_1\nu_2)\lambda/c^2]\alpha^4 - a_{2,6}\bar{n}^6\alpha^2 + \lambda^2\bar{n}^8 = 0.$$

Частное решение  $\hat{\Phi}_n^{\bar{}}(\alpha)$  может быть определено посредством применения к дифференциальному уравнению (8) с оператором (22) преобразования Фурье:

$$\hat{\Phi}_n^{\bar{}}(\alpha) = \frac{1}{2\pi c^2} (\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}) Rt_0\theta_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\alpha}}{\mathcal{L}(\omega, n)} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha)e^{-i\omega\alpha} d\alpha,$$

$$\mathcal{L}(\omega, n) = \omega^8 + a_{6,2}\tilde{n}^2\omega^6 + a_{4,4}\tilde{n}^4\omega^4 + a_{2,6}\tilde{n}^6\omega^2 + \lambda^2\tilde{n}^8 + (1 - \nu_1\nu_2)c^{-2}\lambda\omega^4.$$

Произвольные постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4$  в (23) находятся из краевых условий (10)–(13) на свободном или жестко защемленном крае.

Для разрешающей функции  $\Phi_n^T(\alpha) = \varphi_n(\alpha)$ , согласно (5), (7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left[ \frac{d^4}{d\alpha^4} - \left( \frac{\lambda - \nu_2^2}{\mu_1} - 2\nu_2 \right) \tilde{n}^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} + \lambda \tilde{n}^4 \right] \Phi_n^T(\alpha) = (\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}) Rt_0\theta_n\theta(\alpha),$$

которое после преобразования коэффициентов с учетом зависимости для модуля сдвига  $G = (1/2)(E_1E_2)^{1/2}[1 + (\nu_1\nu_2)^{1/2}]^{-1}$  принимает вид

$$\left( \frac{d^2}{d\alpha^2} - \lambda^{1/2}\tilde{n}^2 \right)^2 \Phi_n^T(\alpha) = (\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}) Rt_0\theta_n\theta(\alpha). \quad (24)$$

Решение уравнения (24) с учетом условий на бесконечности есть

$$\begin{aligned} \Phi_n^T(\alpha) = & (c_1^T + c_2^T\lambda^{1/4}\tilde{n}\alpha) \exp(-\lambda^{1/4}\tilde{n}\alpha) + \\ & + \frac{\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}}{2\pi} \theta_n Rt_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega\alpha}}{(\omega^2 + \lambda^{1/2}\tilde{n}^2)^2} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\alpha)e^{i\omega\alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (25)$$

Произвольные постоянные в (25) находятся из условия удовлетворения тангенциальным краевым условиям (10) или (12) в зависимости от того, рассматривается свободный или заземленный край оболочки.

Теперь, когда построены разрешающие функции для каждого элементарного состояния на основе приближенных уравнений (17), (19), (23), (25), нетрудно получить выражения для искомых перемещений, усилий, изгибающих моментов. Для этого необходимо воспользоваться соотношениями, связывающими эти факторы с разрешающими функциями в полубезмоментной теории, в теории краевого эффекта, в случае тангенциального состояния и напряженного состояния с высокой изменчивостью. Полные выражения для искомых факторов получим путем сложения перечисленных решений:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) & \approx u^o(\alpha, \beta) + u^k(\alpha, \beta) + u^T(\alpha, \beta), \quad v(\alpha, \beta) \approx v^o(\alpha, \beta) + v^k(\alpha, \beta) + v^T(\alpha, \beta), \\ w(\alpha, \beta) & \approx w^o(\alpha, \beta) + w^k(\alpha, \beta) + w^h(\alpha, \beta), \\ T_1(\alpha, \beta) & \approx T_1^o(\alpha, \beta) + T_1^k(\alpha, \beta) + T_1^T(\alpha, \beta) - T_{1t}(\alpha, \beta), \\ T_2(\alpha, \beta) & \approx T_2^k(\alpha, \beta) + T_2^h(\alpha, \beta) + T_2^T(\alpha, \beta) - T_{2t}(\alpha, \beta), \\ G_1(\alpha, \beta) & \approx \nu_2 G_2^o(\alpha, \beta) + G_1^k(\alpha, \beta) + G_1^h(\alpha, \beta), \\ G_2(\alpha, \beta) & \approx G_2^o(\alpha, \beta) + \nu_2 G_1^k(\alpha, \beta) + G_2^h(\alpha, \beta), \\ T_{1t}(\alpha, \beta) & = E_1 h (1 - \nu_1\nu_2)^{-1} (\alpha_{1t} + \nu_2\alpha_{2t}) t(\alpha, \beta), \\ T_{2t}(\alpha, \beta) & = E_2 h (1 - \nu_1\nu_2)^{-1} (\alpha_{2t} + \nu_1\alpha_{1t}) t(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (26)$$

Построенное решение дает практически точные результаты при значительно меньших затратах, чем при использовании уравнений общей теории (1). К дальнейшим упрощениям можно прийти, если в (26) опустить члены с индексом  $n$ , относящиеся к решению на основе уравнения (4), а область применения решений для основного состояния и краевого эффекта расширить до  $n = n^*$ , что соответствует концепции третьего МАС.

До сих пор принималось, что в оболочке со свободным или заземленным краем в какой-то момент времени возникает температурное поле в виде равномерно расположен-

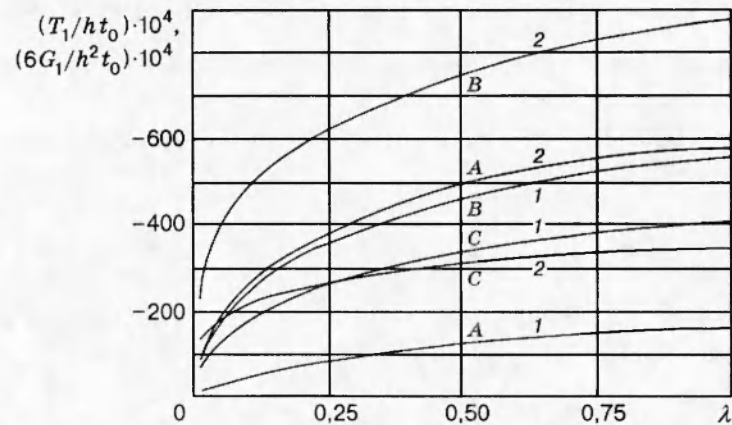


Рис. 1

ных вдоль одного из контуров горячих пятен произвольного очертания, т. е. предполагалось, что температура представляется в форме (6). В дальнейшем ограничимся рассмотрением полубесконечной оболочки со свободным краем, на которую действует кусочно-постоянное температурное поле. Такой случай распределения температуры вызывает наибольшие вычислительные трудности и в то же время позволяет на конкретном примере проследить влияние различных параметров оболочки, нагретой области и характеристик материала на напряженно-деформированное состояние оболочки. Для кусочно-постоянного температурного поля в записанных ранее решениях следует положить  $\theta(\alpha) = 1$  ( $|\alpha| \leq \alpha_0$ ),  $\theta(\alpha) = 0$  ( $\alpha > \alpha_0$ ),  $\theta_n = k\beta_0/\pi$  ( $n = 0$ ),  $\theta_n = (2/\pi n) \sin kn\beta_0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Примем, что нагретая область имеет прямоугольную форму. Решения для круговой области, эллиптической и др. могут быть получены аналогично. Для плоской задачи теории упругости эти вопросы рассматривались, по-видимому, впервые Дж. Н. Гудьером [6]. На основе построенного решения проводился анализ влияния различных параметров физически ортотропного материала оболочки на величину и характер напряженно-деформированного состояния. Объектом исследований была оболочка со свободным краем, с параметром  $h/R = 1/100$  при наличии в ней двух нагретых зон (горячих пятен) квадрат-

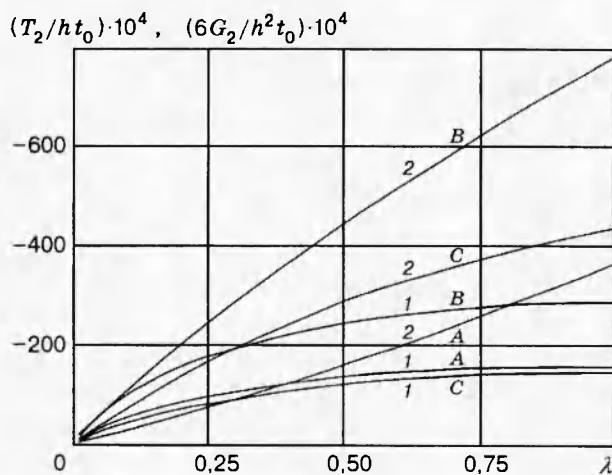


Рис. 2

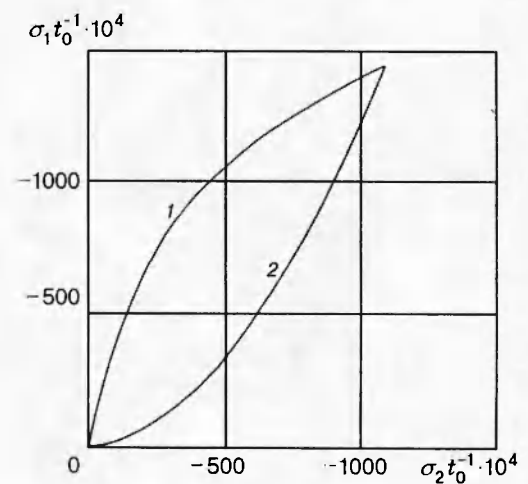


Рис. 3

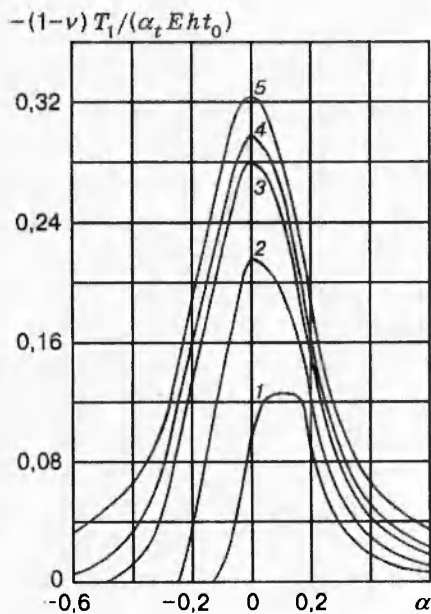


Рис. 4

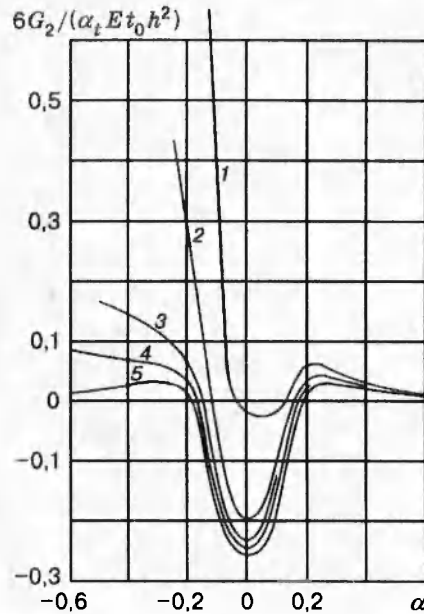


Рис. 5

ной формы  $0,25R \times 0,25R$  ( $\alpha_0 = \beta_0 = 0,125$ ).

Рассмотрим сначала результаты, относящиеся к бесконечно длинной оболочке ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Зависимость продольного усилия  $T_1(0,0)$  (кривые 1), продольного изгибающего момента  $G_1(0,0)$  (кривые 2) от параметра  $\lambda$  для различных сочетаний  $\alpha_{1t}$  и  $\alpha_{2t}$  показана на рис. 1, где кривые A, B, C отвечают следующим значениям  $\alpha_{1t}$  и  $\alpha_{2t}$ :  $0,1 \cdot 10^{-6}$  и  $10 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ,  $10 \cdot 10^{-6}$  и  $10 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ ,  $10 \cdot 10^{-6}$  и  $0,1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ . Модули упругости  $E_1$  и  $E_2$  варьировались таким образом, что параметр ортотропии  $\lambda$  менялся в пределах  $0,01 \div 1,0$ .

Аналогичная информация на рис. 2 представлена для усилия  $T_2(0,0)$  и для изгибающего момента  $G_2(0,0)$  (кривые 1 и 2). Остальные обозначения совпадают с принятыми на рис. 1. Наиболее концентрированно информация о напряженном состоянии в нагретой зоне может быть представлена в виде диаграмм продольное напряжение — окружное напряжение, одна из которых приведена на рис. 3 для  $\alpha_{1t} = \alpha_{2t} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$  в центре нагретой области. Левая ветвь диаграммы (кривая 1) соответствует вариантам ортотропии материала, при которых  $E_1 = 2 \cdot 10^4$ , а  $E_2$  возрастает от нижней точки (начало координат) к верхней таким образом, что параметр ортотропии  $\lambda$  изменяется от 0,01 в нижней точке до 1 в верхней точке, где левая и правая ветви смыкаются. Правая ветвь диаграммы (кривая 2) отвечает вариантам ортотропии, при которых  $E_2 = 2 \cdot 10^4$ , а модуль упругости  $E_1$  уменьшается от верхней точки до нижней. При этом значения параметра ортотропии  $\lambda$  меняются от 1,0 в верхней точке до 0,01 в нижней. Таким образом, верхняя точка диаграммы соответствует изотропному материалу. В ней термоупругие напряжения принимают максимальные значения. Левая и правая ветви диаграммы являются огибающими для семейств кривых, соответствующих любым значениям коэффициентов линейного расширения  $\alpha_{1t}$ ,  $\alpha_{2t}$  и модулей упругости материала оболочки  $E_1$ ,  $E_2$ . Это означает, что диаграмма дает максимально возможные напряжения в центре нагретой области. Такие диаграммы, по-видимому, представляют определенный интерес при конструировании материала для высокотемпературных установок различного назначения.

Термоупругое взаимодействие горячих пятен со свободным краем оболочки рассмотрим на примере оболочки с параметром  $h/R = 1/100$ , в которой на расстоянии  $\xi \bar{h}$  от



свободного края возникли две нагретые области  $0,25R \times 0,25R$  ( $\alpha_0 = \beta_0 = 0,125$ ). Результаты расчета по третьему МАС продольного усилия и кольцевого изгибающего момента приведены на рис. 4 и 5 соответственно, где кривые 1–5 отвечают  $\xi = 0,126; 0,25; 0,50; 0,75; \infty$ . Подчеркнем, что кривая 1 описывает поведение продольного усилия и изгибающего момента в случае, когда горячие пятна примыкают к свободному краю («холодная» перемычка, отделяющая край от пятна, равна  $0,001R$ ). По мере приближения горячих пятен к краю происходит перестройка напряженного состояния — изгибные напряжения, которые были максимальными в центре нагретой области, становятся максимальными на крае оболочки и при этом меняют знак. Наибольшее значение изгибного напряжения при нагреве у края более чем в 2 раза превышает наибольшее напряжение для случая, когда пятна значительно удалены от края ( $\xi \rightarrow \infty$ ), что отвечает механико-математической модели бесконечно длинной оболочки. Продольное усилие, наоборот, по мере приближения нагретых областей к свободному краю уменьшается. В случае, когда пятна примыкают к краю, оно становится минимальным. Отметим, что в соответствии с краевым условием (10) продольное усилие на свободном крае должно обращаться в нуль, что легко проверить по кривым 1–3 на рис. 4. Для рис. 4, 5 принято  $\lambda = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $\alpha_{1t} = \alpha_{2t} = \alpha_t$ .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант N2J000).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Нерубайло Б. В.** Краевые задачи для физически ортотропных цилиндрических оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. С. 124–131.
2. **Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991.
3. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962.
4. **Власов В. З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Избр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. **Нерубайло Б. В.** Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1983.
6. **Goodier J. N.** On the integration of the thermoelastic equations // Phil. Mag. S. 7. 1937. V. 23, N 157. P. 1017–1032.

*Поступила в редакцию 2/X 1995 г.,  
в окончательном варианте — 4/I 1996 г.*