УДК 532.536

ВОЛНООБРАЗОВАНИЕ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕФТЯНЫХ ПЛЕНОК

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск
* Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск

Исследовано возникновение волновых движений на поверхности тонкого слоя нефти, рассматриваемой как несжимаемая псевдопластическая жидкость, при наличии поверхностного натяжения. Аналитически и численно показано, что в зависимости от величины числа Оствальда такие течения могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Найдены профили свободной поверхности при различных числах Оствальда и Вебера.

Согласно современным представлениям нефть является аномально вязкой неньютоновской жидкостью, для описания гидромеханических свойств которой можно использовать степенную реологическую модель Оствальда с показателем $n = 0{,}8$. Известно, что на свободной поверхности любых жидкостей могут развиваться волновые движения различных типов, например гидравлические скачки, кинематические волны, дисперсионные волны и др. [1–7]. Кроме того, свободные поверхности при определенных параметрах жидкости и внешних воздействий оказываются неустойчивыми по отношению к малым и конечным возмущениям. В результате эти свободные поверхности принимают вид хаотически распределенных возвышений и впадин, что в свою очередь может исказить или даже прервать течение жидкости. Исследование этих явлений имеет важное значение для технических приложений.

Течения тонких слоев вязких несжимаемых ньютоновских жидкостей по наклонным плоскостям, в частности неустойчивости этих течений и образование волн, изучались во многих работах (см., например, [1] и библиографию к ней). Несомненно, детальный анализ таких явлений требует численного решения уравнений Навье — Стокса в области со свободной поверхностью, положение которой меняется со временем. Однако этот путь, несмотря на непрерывно увеличивающуюся мощность вычислительной техники, в настоящее время еще слишком трудоемок, в связи с чем развиваются приближенные модели. Для относительно небольших чисел Рейнольдса в [2, 3] методом разложения по малому параметру ε (отношению толщины слоя жидкости к некоторой характерной длине волны вдоль слоя) выведено уравнение для толщины слоя жидкости и изучены вопросы линейной устойчивости и стационарные волны конечной амплитуды. В случае малых отклонений толщины слоя от невозмущенного значения и больших поверхностных натяжений в [4] выведено уравнение Курамото — Сивашинского, решения которого приведены в [5, 6]. Для больших чисел Рейнольдса в предположении автомодельного параболического профиля построены модельные уравнения для формы свободной поверхности и расхода жидкости, осредненные по толщине слоя (см., например, [1]). В большинстве работ поверхностное натяжение предполагается большим; при этом в уравнениях остаются слагаемые с высокими производными, а давление считается гидростатическим. В [7] выведены осредненные по толщине слоя уравнения с точностью до слагаемых порядка ε^2, такая модель справедлива для малых и умеренных значений числа Вебера, характеризующего отношение сил поверхностного натяжения к силам инерции или тяжести.

В настоящей работе рассмотрены вопросы линейной и нелинейной теории устойчивости пленок нефти (рассматриваемой как неньютоновская жидкость), стекающих по наклонной плоскости под действием сил тяжести, вязкости и поверхностного натяжения, которое считается большим. Исходными уравнениями являются законы изменения массы и импульса, дополненные степенным уравнением состояния Оствальда для жидкостей. Результаты исследования линейной устойчивости таких жидкостей без учета поверхностного натяжения представлены в [8, 9], краткий анализ линейной устойчивости при наличии сил поверхностного натяжения дан в [10].

1. Модель. Рассмотрим двумерное движение слоя несжимаемой неньютоновской жидкости по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонталью, и запишем исходные уравнения в следующем виде:

$$\begin{gathered}\rho(u_t+uu_x+vu_y)=-p_x+\rho g\sin\alpha+(\sigma_{xx})_x+(\tau_{xy})_y,\\ \rho(v_t+uv_x+vv_y)=-p_y-\rho g\cos\alpha+(\tau_{yx})_x+(\sigma_{yy})_y,\quad u_x+v_y=0.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Координата x направлена вдоль наклонной плоскости, y — перпендикулярно к ней; u, v есть x-, y-компоненты скорости; σ и τ — нормальные и касательные компоненты тензора напряжений. Для неньютоновских жидкостей они равны

$$\sigma_{xx}=2\rho\nu_nA_nu_x,\quad \sigma_{yy}=2\rho\nu_nA_nv_y,\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\rho\nu_nA_n(u_y+v_x),$$
$$A_n=[2u_x^2+2v_y^2+(u_y+v_x)^2]^{(n-1)/2},$$

где ρ — плотность жидкости; ν_n [м$^2\cdot$ с$^{n-2}$] — коэффициент кинематической вязкости жидкости с показателем n.

Уравнения (1.1) нужно дополнить граничными условиями. Прилипание на наклонной плоскости $y=0$ означает $u=v=0$. На свободной поверхности $y=H(x,t)$ касательное напряжение равно нулю, нормальное напряжение компенсируется поверхностным натяжением и, кроме того, имеет место стандартное кинематическое условие, поэтому

$$p_\tau=0,\quad p_n=-\sigma(1+H_x^2)^{-3/2}H_{xx},\quad H_t+uH_x=v,$$

где $p_\tau=\tau_{xy}\cos 2\theta+(1/2)(\sigma_{yy}-\sigma_{xx})\sin 2\theta$; $\operatorname{tg}\theta=H_x$; $p_n=-p+\sigma_{xx}\sin^2\theta+\sigma_{yy}\cos^2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta$; σ — постоянный коэффициент поверхностного натяжения. Подставив выражения для компонент тензора напряжений, запишем граничные условия в виде

$$(1-H_x^2)(u_y+v_x)+4H_xv_y=0;\tag{1.2}$$

$$-p+\frac{2\rho\nu_nA_n}{1+H_x^2}\,[(1-H_x^2)v_y-H_x(u_y+v_x)]=\frac{\sigma H_{xx}}{(1+H_x^2)^{3/2}}.\tag{1.3}$$

Для стационарного однородного потока профиль скорости имеет вид

$$u(y)=u_s\Big[1-\Big(1-\frac{y}{H_0}\Big)^{(n+1)/n}\Big],\quad u_s=\Big(\frac{g\sin\alpha}{\nu_n}\Big)^{1/n}\frac{n}{n+1}\,H^{(n+1)/n},\tag{1.4}$$

где u_s — скорость жидкости на свободной поверхности.

Введем масштабы: L_0, H_0 — длины вдоль и перпендикулярно наклонной плоскости соответственно, $p_0=\rho u_0^2$ — давление,

$$u_0=\Big(\frac{g\sin\alpha}{\nu_n}\Big)^{1/n}\frac{n}{2n+1}\,H_0^{(n+1)/n}\ —$$

продольная скорость, $t_0=L_0/u_0$ — время. В качестве L_0 выбирается некоторая характерная длина волны возмущений, H_0 — невозмущенная толщина слоя жидкости. Рассмотрим длинноволновое приближение ($\varepsilon\equiv H_0/L_0\ll 1$), используя введенные масштабы.

В результате исходные уравнения (1.1) и граничные условия (1.2), (1.3) в безразмерных переменных с точностью до слагаемых нулевого и первого порядков по малому параметру ε можно записать следующим образом:

$$\varepsilon(u_t + uu_x + vu_y) = -\varepsilon p_x + \frac{1}{\mathrm{O}_n}\Big[\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^n + (A_n(u_y + \varepsilon^2 v_x))_y + 2\varepsilon^2 (A_n u_x)_x\Big],$$
$$\varepsilon^2(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y - \frac{1}{\mathrm{O}_n}\Big\{\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^n \operatorname{ctg}\alpha - \varepsilon[(A_n(u_y + \varepsilon^2 v_x))_x - 2(A_n u_x)_y]\Big\},$$
$$u_x + v_y = 0,$$

где $A_n = [(u_y + \varepsilon^2 v_x)^2 + 4\varepsilon^2 v_y^2]^{(n-1)/2}$. Граничные условия на дне ($y = 0$) и свободной поверхности ($y = H(x,t)$) имеют вид

$$u = v = 0, \quad H_t + uH_x = v, \quad (1 - \varepsilon^2 H_x^2)(u_y + \varepsilon^2 v_x) + 4\varepsilon^2 H_x v_y = 0,$$
$$-p + \frac{2\varepsilon A_n}{(1 + \varepsilon^2 H_x^2)\mathrm{O}_n}\,[(1 - \varepsilon^2 H_x^2)v_y - H_x(u_y + \varepsilon^2 v_x)] = \frac{\varepsilon^2 \mathrm{We}_n H_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 H_x^2)^{3/2}}.$$

Здесь $\mathrm{O}_n = H_0^n u_0^{2-n}/\nu_n$ — число Оствальда; $\mathrm{We}_n = \sigma H_0/(\rho Q_0^2)$ — число Вебера; $Q_0 = u_0 H_0$. Отметим, что малый параметр ε не является свободным, а определяется решением поставленной задачи; его явное введение в вывод модельных уравнений позволяет отделить слагаемые нужного порядка.

Разлагая функции u, v, p по степеням ε, находим с точностью до слагаемых первого порядка уравнения и граничные условия:

$$\varepsilon(u_t + uu_x + vu_y) = -\varepsilon p_x + \frac{1}{\mathrm{O}_n}\Big[\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^n + (|u_y|^{n-1}u_y)_y\Big],$$
$$p_y = \frac{1}{\mathrm{O}_n}\Big\{-\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^n \operatorname{ctg}\alpha + \varepsilon\Big[(|u_y|^{n-1}u_y)_x - 2(|u_y|^{n-1}u_x)_y\Big]\Big\}, \quad u_x + v_y = 0; \tag{1.5}$$

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$H_t + uH_x = v, \quad u_y = 0, \quad p = -\varepsilon^2 \mathrm{We}_n H_{xx} \quad \text{при} \quad y = H(x,t). \tag{1.6}$$

Для того чтобы получить граничное условие для давления, предполагается, что поверхностное натяжение велико: $\varepsilon^2 \mathrm{We}_n \sim 1$. В уравнениях (1.5), (1.6) давление не является гидростатическим, так как имеет поправку порядка ε.

Для дальнейшего упрощения уравнений (1.5) проинтегрируем по y от 0 до y уравнение для давления, используя профиль скорости (1.4) с величинами u_s и H, зависящими от x, t, как это принято в интегральном методе Кармана. В результате получим

$$p = \frac{1}{\mathrm{O}_n}\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^n \{(H - y)\operatorname{ctg}\alpha + \varepsilon H_x (H - y)[2H^{1/n}(H - y)^{-1/n} - 1]\} - \varepsilon^2 \mathrm{We}_n\, H_{xxx}. \tag{1.7}$$

Дифференцирование (1.7) по x дает

$$p_x = \frac{1}{\mathrm{O}_n}\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^n \Big\{H_x \operatorname{ctg}\,\alpha - \varepsilon\Big[H_x^2\Big(2H^{1/n}(H - y)^{-1/n}\Big(1 - \frac{y}{nH}\Big) - 1\Big) +$$
$$+ (H - y)H_{xx}(2H^{1/n}(H - y)^{-1/n} - 1)\Big]\Big\} - \varepsilon^2 \mathrm{We}_n H_{xxx}. \tag{1.8}$$

Затем проинтегрируем (1.5) по толщине слоя, используя граничные условия (1.6) и приближенный профиль скорости (1.4), чтобы связать средние величины $\langle u\rangle$, $\langle u^2\rangle$, а именно $\langle u^2\rangle = (4n+2)\langle u\rangle^2/(3n+2)$, а также выражение (1.8) для продольного градиента давления. В результате получим

$$H_t + Q_x = 0, \tag{1.9}$$

$$Q_t + \frac{4n+2}{3n+2}\Big(\frac{Q^2}{H}\Big)_x = \frac{1}{\varepsilon \mathrm{O}_n}\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^n\Big[(1-\varepsilon H_x \operatorname{ctg}\,\alpha)H - \frac{Q^n}{H^{2n}}\Big] + \varepsilon^2 \mathrm{We}_n H H_{xxx}.$$

Указанная выше поправка к гидростатическому значению давления пропорциональна ε (см. (1.7)). Так как рассматриваются уравнения, справедливые с точностью до слагаемых первого порядка по малому параметру, поправка в уравнениях (1.5) отсутствует, поскольку градиент давления в направлении x входит в уравнения с множителем ε. Это означает, что в полученных уравнениях для формы свободной поверхности и расхода жидкости давление является гидростатическим. Перейдем к исследованию свойств уравнений (1.9), в которых положим $\varepsilon = 1$. Это не нарушает общности, так как переход к размерным переменным сводится только к изменению масштабов. Сравнение по результатам численного решения отброшенных и оставленных слагаемых в уравнениях (1.9) показывает, что первые составляют не более 0,1 вторых.

2. Линейный анализ. Аналогично [7–9] линеаризуем систему уравнений (1.9) по отношению к малым возмущениям движущегося однородного слоя постоянной толщины, полагая $H = 1 + h$, $Q = 1 + q$ $(h, q \ll 1)$. Представив решение полученной таким образом системы двух линейных уравнений в виде периодических волн $h, q \sim \exp(i(kx - \omega t))$, получим

$$\gamma = b(v_0 - v)/(2(v - a)); \tag{2.1}$$

$$\mathrm{We}_n k^4 - (v^2 - 2av + c)k^2 - \frac{b^2(v - v_0)(v + v_0 - 2a)}{4(v-a)^2} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь ω — комплексная частота; k — вещественное волновое число малых возмущений; γ — инкремент; v — фазовая скорость малых возмущений; $a = (4n+2)/(3n+2) = 1{,}18$; $b = ((2n+1)/n)^n(n/\mathrm{O}_n) = 2{,}05/\mathrm{O}_n$; $c = a - (b/n)\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}18 - (2{,}05\operatorname{ctg}\alpha)/\mathrm{O}_n$; $v_0 = (2n+1)/n = 3{,}25$.

Уравнения (2.1), (2.2) с точностью до обозначений совпадают с соответствующими уравнениями в случае $\mathrm{We}_n = 0$ [8, 9] и $\mathrm{We}_n \neq 0$ [10]. Заметим также, что в частном случае ньютоновской жидкости ($n = 1$) уравнения (2.1), (2.2) переходят в приведенные в [11, 12].

Из (2.1) следует, что инкремент γ положителен при $v < v_0$ и отрицателен при $v > v_0$. Таким образом, рассматриваемое движение однородного слоя нефти неустойчиво по отношению к периодическим малым возмущениям с фазовой скоростью $v < 3{,}25$ и устойчиво к малым возмущениям с фазовой скоростью $v > 3{,}25$. Для сравнения отметим, что в случае ньютоновской жидкости $v_0 = 3$.

Из уравнения (2.2) имеем

$$k^2 = \frac{(v - v_1)(v - v_2)}{2\mathrm{We}_n}\Big\{1 \pm \Big[1 - \frac{\mathrm{We}_n b^2 (v_0 - v)(v_0 + v - 2a)}{(v-a)^2(v-v_1)^2(v-v_2)^2}\Big]^{1/2}\Big\},$$

где $v_1 = a + (a^2 - c)^{1/2}$; $v_2 = a - (a^2 - c)^{1/2}$. Инкремент γ обращается в нуль, когда $v = v_0$, т. е. при двух значениях волнового числа

$$k^2 = 0, \qquad k^2 \equiv k_*^2 = (v_0 - v_1)(v_0 - v_2)/\mathrm{We}_n.$$

Подставляя значения v_0, v_1, v_2, найдем квадрат граничного волнового числа:

$$k_*^2 = \frac{2n+1}{\mathrm{We}_n n^2}\Big[1 - (2n+1)^{n-1} n^{2-n}\,\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\mathrm{O}_n}\Big]. \tag{2.3}$$

Из этой формулы следует, что рассматриваемое течение устойчиво ($\gamma \leqslant 0$), когда $\mathrm{O}_n \leqslant \mathrm{O}_n^*$, где $\mathrm{O}_n^* = (2n+1)^{n-1} n^{2-n} \operatorname{ctg}\,\alpha = 0{,}63 \operatorname{ctg}\,\alpha$ — критическое число Оствальда. Для случая движения жидкости по вертикальной стенке ($\alpha = 90°$) критическое число Оствальда равно нулю, поэтому при любых числах Оствальда возмущения неустойчивы. Если

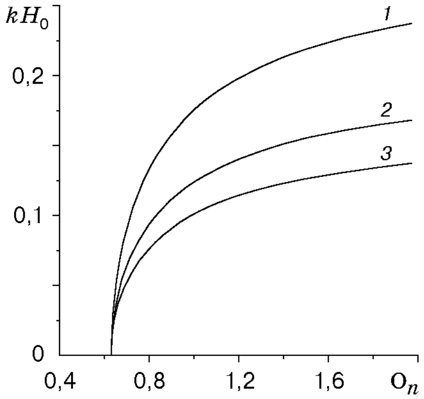

Рис. 1

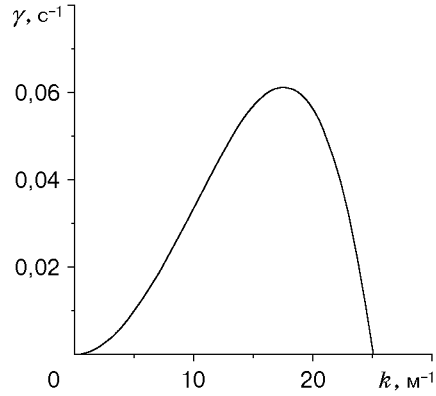

Рис. 2

Рис. 1. Нейтральные кривые устойчивости для нефти ($n = 0{,}8$; $\mathrm{O}_n^* = 0{,}63$):
1 — $\mathrm{We}_n = 50$; *2* — $\mathrm{We}_n = 100$; *3* — $\mathrm{We}_n = 150$

Рис. 2. Зависимость инкремента от волнового числа для течения с $\mathrm{O}_n = 1$, $\mathrm{We}_n = 108$, $n = 0{,}8$

число Оствальда больше критического, то существует конечная область волновых чисел $\Delta k = 0 \div k_*$, в которой малые возмущения неустойчивы (инкремент положителен). В случае, когда поверхностным натяжением пренебрегается, область неустойчивых волновых чисел является неограниченной ($k \to \infty$) [9]. Поверхностное натяжение стабилизирует мелкомасштабные возмущения, делая область неустойчивости по волновым числам конечной. Из формулы (2.3) получим уравнение нейтральной кривой $\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n(k)$, разделяющей области устойчивости и неустойчивости:

$$\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n^*/(1 - \mathrm{We}_n n^2 k^2/(2n+1)).$$

Поскольку нефть в разных залежах имеет различные свойства, для расчетов выбраны средние параметры: $\rho = 850$ кг/м^3, $\nu_n = 0{,}001$ м$^2 \cdot$ с$^{-1{,}2}$, $\sigma = 0{,}026$ Н/м. Во всех расчетах $\alpha = 45°$. На рис. 1 представлены нейтральные кривые для нефти с указанными параметрами при различных числах Вебера. Области выше и левее нейтральной кривой соответствуют устойчивости, ниже и правее — неустойчивости. На рис. 2 приведена зависимость инкремента малых возмущений γ от волнового числа k для нефти с параметрами $\mathrm{O}_n = 1$, $\mathrm{We}_n = 108$, $n = 0{,}8$, что соответствует толщине слоя $H_0 = 0{,}47$ см. Учитывая, что временной масштаб t_0 [с] равен

$$t_0 = \Big(\frac{H_0}{g\sin\alpha}\Big)^{1/2}\Big(\frac{2n+1}{n}\Big)^{n/2}\frac{1}{\mathrm{O}_n^{1/2}},$$

можно записать размерные значения инкремента γ [с$^{-1}$] и фазовой скорости $\bar v$ [м/с]:

$$\bar\gamma = \Big(\frac{g\sin\alpha}{H_0}\Big)^{1/2}\Big(\frac{n}{2n+1}\Big)^{n/2}\mathrm{O}_n^{1/2}\gamma, \qquad \bar v = (gH_0\sin\alpha)^{1/2}\Big(\frac{n}{2n+1}\Big)^{n/2}\mathrm{O}_n^{1/2}v.$$

Размерные $\bar k$ [м$^{-1}$] и безразмерные k волновые числа связаны соотношением $\bar k = k/H_0$. Для нефти с указанными параметрами имеем $u_0 = 11{,}3$ см/с, $v_0 = 36{,}8$ см/с, $v_0/u_0 = 3{,}25$, $\gamma_{\max} = 0{,}06$ с$^{-1}$ при $\bar k_{\max} = 17{,}7$ м$^{-1}$, граничное волновое число $k_* = 25$ м$^{-1}$, возмущения с длинами волн от $\lambda_{\max} = \infty$ до $\lambda_{\min} = 25$ см неустойчивы. Все формулы этого раздела переходят в соответствующие формулы для вязкой ньютоновской жидкости [11], поэтому приведенные здесь численные значения характерных величин адекватны в той же степени, что и характеристики течений в случае ньютоновской жидкости, а они находятся в хорошем соответствии с результатами экспериментов [11].

3. Слабая нелинейность. Рассмотрим случай слабой нелинейности, добавив к однородному потоку малые возмущения $H = 1+h$, $Q = 1+q$ ($h, q \ll 1$), как и ранее, но учтем слагаемые до второго порядка по ε. В этом приближении уравнения (1.9) можно записать в виде

$$h_t + q_x = 0; \tag{3.1}$$

$$q_t + a(2q-h)_x - (b/n)[(2n+1)h - h_x \operatorname{ctg}\alpha - nq] - \mathrm{We}_n h_{xxx} =$$
$$= 2a(q-h)(h-q)_x + (b/n)[2n^2 qh - hh_x \operatorname{ctg}\alpha - 0{,}5n(n-1)q^2 - n(2n+1)h^2] + \mathrm{We}_n hh_{xxx}. \tag{3.2}$$

Дифференцируя (3.2) по x и (3.1) по t и исключая производные от q, получим

$$h_t + v_0 h_x + b^{-1}(h_{tt} + 2ah_{xt} + ch_{xx} + \mathrm{We}_n h_{xxxx}) = (2a/b)[(qq_x)_x + (hh_x)_x - (qh)_{xx}] -$$
$$- 2n(qh)_x + (1/n)(hh_x)_x \operatorname{ctg}\alpha + (n-1)qq_x + 2(2n+1)hh_x - (\mathrm{We}_n/b)(hh_{xxx})_x.$$

В соответствии с [11–13] можно без потери точности в нелинейных слагаемых положить $q = v_0 h$, $\partial/\partial t = -v_0 \partial/\partial x$, исключить функцию q и получить эволюционное уравнение для формы свободной поверхности

$$h_t + v_0 h_x + v_0 \frac{n+1}{n} hh_x + \frac{\mathrm{O}_n}{nv_0^n}\Big(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{\partial}{\partial x}\Big)h +$$
$$+ \frac{\mathrm{We}_n \mathrm{O}_n}{nv_0^n}[(1+h)h_{xxx}]_x = \frac{\mathrm{O}_n}{n}\Big[\frac{4(2n+1)}{(3n+2)v_0^n}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\mathrm{O}_n}\Big](hh_x)_x. \tag{3.3}$$

В левой части (3.3) первые два слагаемых описывают кинематическую волну, распространяющуюся вдоль наклонной плоскости со скоростью $v_0 = 3{,}25$; третье соответствует квадратичной нелинейности; четвертое описывает инерционную волну более высокого порядка по сравнению с кинематической волной; последнее слагаемое появляется из-за поверхностного натяжения. Правая часть уравнения соответствует нелинейной диффузии.

Рассмотрим два предельных случая: умеренных $\mathrm{O}_n \approx 1$ и больших чисел Оствальда $\mathrm{O}_n \gg 1$. В предельном случае $\mathrm{O}_n \approx 1$ члены, описывающие кинематическую волну, имеют определяющее значение, поэтому в слагаемых, соответствующих инерционной волне, можно сделать подстановку $\partial/\partial t = -v_0 \partial/\partial x$ и пренебречь правой частью, что приводит к уравнению

$$h_t + v_0 h_x + v_0 \frac{n+1}{n} hh_x + \frac{\mathrm{O}_n}{n^2 v_0^{n-1}}\Big(1 - \frac{\mathrm{O}_n^*}{\mathrm{O}_n}\Big)h_{xx} + \frac{\mathrm{We}_n \mathrm{O}_n}{nv_0^n} h_{xxxx} = 0. \tag{3.4}$$

Знак слагаемого, соответствующего диффузии, зависит от числа Оствальда. Если $\mathrm{O}_n < \mathrm{O}_n^*$, слагаемое отрицательно и описывает обычную диффузию, которая стремится сгладить возмущения свободной поверхности пленки нефти. Если $\mathrm{O}_n > \mathrm{O}_n^*$, то слагаемое положительно и описывает рост амплитуды возмущений, что связано с "отрицательной вязкостью". В этом случае энергия от среднего потока передается кинематической волне через инерционную волну.

В предельном случае $\mathrm{O}_n \gg 1$ введем новый малый параметр $\varepsilon_1 = nv_0^n/\mathrm{O}_n$ и запишем уравнение (3.3) в виде

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{\partial}{\partial x}\Big)h - \Big[\frac{8n+4}{3n+2}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 + \frac{v_0^n \operatorname{ctg}\alpha}{\mathrm{O}_n}\Big](hh_x)_x +$$
$$+ \mathrm{We}_n[(1+h)h_{xxx}]_x + \varepsilon_1\Big[h_t + v_0\Big(1 + \frac{n+1}{n}h\Big)h_x\Big] = 0. \tag{3.5}$$

Из этого уравнения следует, что определяющее значение имеют инерционные волны, распространяющиеся вдоль потока со скоростью v_1 и в противоположном потоку направлении со скоростью v_2. Выделяя волну вдоль потока, сделаем подстановку $\partial/\partial t = -v_1 \partial/\partial x$ в слагаемых, содержащих производные по времени. В результате получим

$$(v_2 - v_1)(h_t + v_1 h_x)_x - \frac{8n+4}{3n+2}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 (hh_x)_x + \\ + \mathrm{We}_n[(1+h)h_{xxx}]_x + \varepsilon_1\Big[(v_0 - v_1)h + v_0\,\frac{n+1}{2n}\,h^2\Big]_x = 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что при выводе этого уравнения слагаемым $v_0^n \operatorname{ctg}\alpha/\mathrm{O}_n$ пренебрегалось, так как $\mathrm{O}_n \gg 1$. Интегрирование по x дает

$$h_t + v_1 h_x + \frac{1}{v_1 - v_2}\Big[\frac{8n+4}{3n+2}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 hh_x - \mathrm{We}_n(1+h)h_{xxx} - \varepsilon_1\Big(v_0 - v_1 + v_0\,\frac{n+1}{n}h\Big)h\Big] = 0, \quad (3.7)$$

где в том же приближении ($\mathrm{O}_n \gg 1$) имеем

$$v_1 = 2(2n+1)\Big(1 + \sqrt{\frac{n}{4n+2}}\Big)\Big/(3n+2) = 1{,}64,$$

$$v_2 = 2(2n+1)\Big(1 - \sqrt{\frac{n}{4n+2}}\Big)\Big/(3n+2) = 0{,}72, \quad v_1 - v_2 = 2\sqrt{2n(2n+1)}/(3n+2) = 0{,}92.$$

Для ньютоновской жидкости ($n = 1$) при $\alpha = 90^\circ$ такое уравнение выведено в [12]. Из (3.6) следует, что при больших O_n кинематическая волна перекачивает энергию в волну инерционную; этот процесс “низкочастотной накачки” описывается линейным слагаемым [11]. Линеаризация уравнения (3.7) при пренебрежении малой накачкой энергии дает дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_r}{k} = v_1\Big(1 + \frac{\mathrm{We}_n k^2}{(v_1 - v_2)v_1}\Big),$$

из которого следует, что фазовая скорость инерционных волн зависит от волнового числа, возрастая с его увеличением. Следовательно, инерционные волны обладают положительной дисперсией, так как коэффициент перед We_n положителен (см., например, [14]). Эта дисперсия, обусловленная поверхностным натяжением, приводит к появлению “ряби” перед инерционной волной. Квадрат длины дисперсии равен

$$l^2 = \frac{\mathrm{We}_n(3n+2)^2}{4n(2n+1)(1 + 2\sqrt{1 + 1/(2n)})} = 0{,}66\,\mathrm{We}_n.$$

Если накачкой энергии пренебрегается, то уравнение (3.7) в системе координат, движущейся со скоростью v_1, принимает вид квазилинейного уравнения переноса с дисперсией

$$h_t + 2\sqrt{1 + \frac{1}{2n}}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 hh_x - \frac{\mathrm{We}_n(3n+2)}{2\sqrt{2n(2n+1)}}\,h_{xxx} = 0.$$

Используя подстановку

$$h = \bar{h}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2\Big(\frac{n}{4n+2}\Big)^{1/2},$$

получим уравнение Кортевега — де Фриза

$$\bar{h}_t + \bar{h}\,\bar{h}_x + \beta\bar{h}_{xxx} = 0,$$

где $\beta = -\mathrm{We}_n(3n+2)/(2\sqrt{2n(2n+1)}) = 1{,}08\,\mathrm{We}_n$, решения которого известны.

Уравнения (3.1)–(3.7), выведенные в приближении слабой нелинейности, позволяют в предельных случаях малых и больших чисел Оствальда описать рассматриваемые волновые процессы и получить количественные оценки их параметров. Для произвольных чисел Оствальда эти уравнения могут быть решены только численно. Если изучать эволюцию возмущений, не предполагая нелинейность слабой, то необходимо рассматривать уравнения (1.9).

4. Численное решение нелинейных уравнений. Эволюция возмущений конечной амплитуды изучалась численно. Для решения системы уравнений (1.9) без учета сил поверхностного натяжения в [9] использовалась явная конечно-разностная схема, в которой потоки массы и импульса аппроксимировались односторонними разностями в соответствии с направлением течения, а слагаемое HH_x, пропорциональное градиенту давления, — центральной разностью. Эта схема обладает условной устойчивостью; необходимое для устойчивости отношение шагов $\delta t/\delta x$ подбиралось с помощью вспомогательных расчетов. Учет поверхностного натяжения увеличивает порядок высшей производной по координате до третьего. Указанная схема, дополненная симметричной конечной разностью для аппроксимации третьей производной, применена для решения системы (1.9):

$$H1_i = H_i - (\delta t/\delta x)(u_{i+0,5}H_i - u_{i-0,5}H_{i-1}),$$

$$Q1_i = Q_i - a_n(\delta t/\delta x)(u_{i+0,5}u_iH_i - u_{i-0,5}u_{i-1}H_{i-1}) - b_n \operatorname{ctg}\alpha(\delta t/(2\delta x))H_i(H_{i+1} - H_{i-1}) +$$
$$+ b_n\delta t[H_i - Q_i^n/H_i^{2n}] + \mathrm{We}_n(\delta t/(2\delta x^3))H_i(H_{i+2} - 2H_{i+1} + 2H_{i-1} - H_{i-2}).$$

Здесь $H1_i \equiv H_i^{m+1}$, $H_i \equiv H_i^m$; $Q1_i \equiv Q_i^{m+1}$, $Q_i \equiv Q_i^m$; $t^{m+1} = (m+1)\delta t$, $t^m = m\delta t$; $u_{i+0,5} = (u_i + u_{i+1})/2$, $u_{i-0,5} = (u_i + u_{i-1})/2$; $a_n = (4n+2)/(3n+2)$, $b_n = \mathrm{O}_n^{-1}((2n+1)/n)^n$. Схема удобна в реализации, а ее условная устойчивость, требующая выбора $\delta t < \delta x^3$, не является большим ограничением из-за одномерности задачи. Все расчеты проведены для случая $\alpha = 45°$.

Начальное локализованное возмущение выбиралось в виде сглаженной ступеньки, неограниченной вверх по течению, а граничные условия — в виде $H(0,t) = 1 + H_1$, $H(x_{\max}, t) = 1$, где H_1 — амплитуда ступеньки. Использование таких граничных условий подразумевает, что численное решение проводится до тех пор, пока возмущение находится достаточно далеко от границ расчетной области (это условие заложено в алгоритме расчета).

На рис. 3,*а* представлен профиль свободной поверхности нефтяной пленки, движущейся по наклонной плоскости, в моменты времени $t = 50t_0$ и $t = 100t_0$ после внезапного освобождения начальной ступеньки, высота которой $H_1 = 0{,}047$ см, при $\mathrm{O}_n = 1$ и $\mathrm{We}_n = 108$, $n = 0{,}8$. Так как число Оствальда превышает критическое значение 0,63, начальное возмущение неустойчиво, и со временем возникает волна с крутым передним

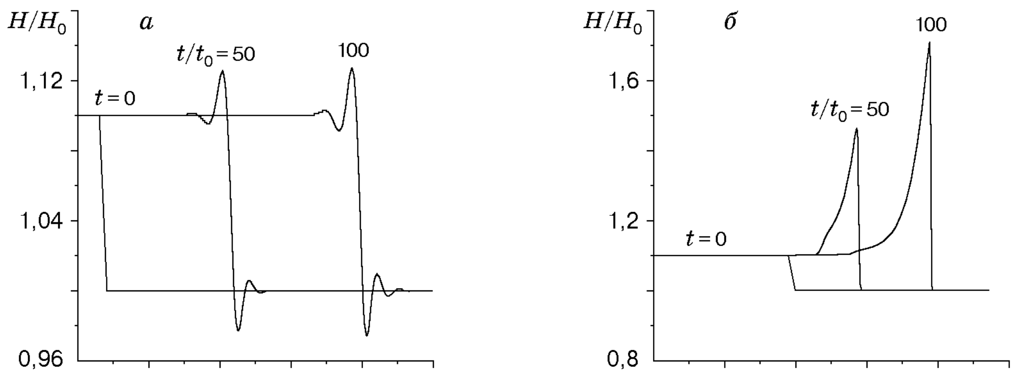

Рис. 3. Профиль свободной поверхности слоя нефти ($n = 0{,}8$):
а — $\mathrm{O}_n = 1$, $\mathrm{We}_n = 108$; *б* — $\mathrm{O}_n = 160$, $\mathrm{We}_n = 0{,}0088$

фронтом и заметными пространственными осцилляциями перед и за фронтом. С течением времени амплитуда осцилляций не увеличивается, что свидетельствует о компенсации нелинейных эффектов, приводящих к увеличению амплитуды возмущений, стабилизирующим воздействием сил поверхностного натяжения. Если увеличить толщину слоя жидкости, это приведет к росту числа Оствальда и уменьшению числа Вебера. На рис. 3,*б* представлены профили свободной поверхности слоя нефти, имеющего невозмущенную толщину $H_0 = 2$ см, в моменты времени $t = 50t_0$ и $t = 100t_0$. В этом случае $\mathrm{O}_n = 160$, $\mathrm{We}_n = 0{,}0088$, $n = 0{,}8$ и влияние поверхностного натяжения несущественно. Со временем начальная ступенька изменяет форму, и возникает структура типа ударной волны, похожая на стационарные решения осредненных по толщине слоя жидкости уравнений, которые проанализированы в [8]. Профиль свободной поверхности имеет гладкую часть, толщина которой монотонно увеличивается по мере продвижения к переднему фронту, принимая максимальное значение 3,4 см ($t = 100t_0$), а затем резко уменьшается, монотонно приближаясь к невозмущенному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chang H.-C.** Wave evolution on a falling film // Annu. Rev. Fluid Mech. 1994. V. 26. P. 103–136.
2. **Benney D. J.** Long waves on liquid films // J. Math. Phys. 1966. V. 45. P. 150–155.
3. **Mei C. C.** Nonlinear gravity waves in a thin sheet of viscous fluid // J. Math. Phys. 1966. V. 45. P. 266–288.
4. **Lin S. P.** Finite amplitude side-band stability of a viscous film // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. P. 417–429.
5. **Trifonov Yu. Ya., Tsvelodub O. Yu.** Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film // J. Fluid Mech. 1991. V. 229. P. 531–554.
6. **Chang H.-C., Demekhin E. A., Kopelevich D. I.** Nonlinear evolution of waves on a falling film // J. Fluid Mech. 1993. V. 250. P. 433–480.
7. **Lee J.-J., Mei C. C.** Stationary waves on an inclined sheet of viscous fluid at high Reynolds and moderate Weber numbers // J. Fluid Mech. 1996. V. 307. P. 191–229.
8. **Ng C., Mei C. C.** Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid // J. Fluid Mech. 1994. V. 263. P. 151–183.
9. **Berezin Yu. A., Hutter K., Spodareva L. A.** Stability analysis of gravity driven shear flows with free surface for power-law fluids // Arch. Appl. Mech. 1998. V. 68. P. 169–178.
10. **Hwang C., Chen J., Wang J., Lin J.** Linear stability of power-law liquid film flows down an inclined plane // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. V. 27. P. 2297–2301.
11. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волновое течение пленок жидкостей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.
12. **Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г.** Волнообразование при течении пленки жидкости на вертикальной стенке // ПМТФ. 1979. № 6. С. 77–87.
13. **Whitham G. B.** Linear and nonlinear waves. N. Y.: J. Wiley, 1974.
14. **Karpman V. I.** Nonlinear waves in dispersive media. N. Y.: Pergamon Press, 1975.

Поступила в редакцию 28/X 1999 г.