О СТАЦИОНАРНОМ ГОРЕНИИ

Э. А. Чернова

(Москва)

Рассматривается полубесконечная камера сгорания, в которую с торца с постоянной массовой скоростью m подается горючая смесь с температурой T_0. Предполагается, что в камере в смеси происходит экзотермическая реакция первого порядка. При отсутствии теплоотвода через стенки определение стационарных режимов горения в такой камере сводится к краевой задаче

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)-mc\frac{dT}{dx}+ha\,\Phi=0, \qquad \frac{d}{dx}\left(\rho D\frac{da}{dx}\right)-m\frac{da}{dx}-a\Phi=0 \tag{1}$$

$$x=0,\ T=T_0,\ ma-\rho D\frac{da}{dx}=ma_0, \qquad x=\infty,\ T=T_+,\ a=0 \tag{2}$$

Здесь T — температура, a — концентрация горючей компоненты, $k=k(T)$ — коэффициент теплопроводности, $D=D(T)$ — коэффициент диффузии, $\rho=\rho(T)$ — плотность смеси, c — const — теплоемкость, h — тепловой эффект реакции, $\Phi=\varphi(T)$ — константа скорости химической реакции, T_+ — температура газа, достигаемая после полного выгорания горючей компоненты (величина здесь неизвестная).

Аналогичная задача была поставлена в [1], где описывается качественная картина горения в полубесконечной камере сгорания и исследуются соответствующие уравнения для случая, когда имеется подобие между полем концентраций и температур ($\lambda=\rho Dc/k=1$), ρD, c, k—const и $\varphi(T)$ представляет собой аррениусовскую зависимость.

В работах [2–6] рассматривается одномерное горение в безграничном газе, сводящееся в наиболее общем случае [4] к системе (1), для которой вместо граничных условий на торце задаются условия на бесконечности, а величина $T_+=T_+{}^*$ известна. В предположении, что $\Phi(T)\equiv 0$, $T_0\leqslant T\leqslant \varepsilon$ $(\varepsilon>T_0)$ и $\Phi(T)>0$, $\varepsilon<T\leqslant T_+{}^*$ было доказано, что при $\lambda\equiv 1$, $\lambda\equiv 0$ и $0<\lambda(T)<1$ стационарный режим горения там возможен и единственен лишь при одном значении $m=m^*$ массовой скорости движения данного газа. В [7] показывается, что можно построить такие $\lambda(T)$ и $h\,\Phi(T)$, при которых решение соответствующей краевой задачи существует, по крайней мере, при двух значениях m.

Ниже методами, схожими с использованными в [2–6], устанавливается, что в полубесконечной камере сгорания при произвольных гладких функциях $k(T)$, $D(T)$, $\rho(T)$ и $\Phi(T)$, удовлетворяющих условиям

$$0\leqslant\lambda\leqslant 1\left(\lambda=\frac{\rho Dc}{k}\right),\quad \frac{d\lambda}{dT}\leqslant 0,\quad k, D, \rho, \frac{dk}{dT},\ \frac{d(\rho D)}{dT}\geqslant 0,\quad T_0<T\leqslant T_+$$

$$\Phi, \frac{d\Phi}{dT}>0,\quad \varepsilon<T\leqslant T_+\quad (\varepsilon\geqslant 0); \qquad \Phi\equiv 0,\quad T\leqslant\varepsilon \tag{3}$$

стационарный режим горения существует и единственен в случае $T_0>\varepsilon$ при любых скоростях m подачи горючей смеси, в случае же $T_0<\varepsilon$ — только при скоростях $m\leqslant m^*$.

Вводятся следующие безразмерные переменные и комбинации:

$$u=\frac{T-T_0}{\gamma T_0},\quad v=\frac{ah}{\gamma cT_0},\quad \xi=\frac{x}{L},\quad \gamma=\frac{T_+-T_0}{T_0},\quad \gamma^*=\frac{a_0h}{cT_0}$$

$$\alpha(u\gamma)=\frac{k}{mcL},\quad \beta(u\gamma)=\frac{\rho D}{mL},\quad \lambda(u\gamma)=\frac{\beta}{\alpha},\quad f(u\gamma)=\frac{\Phi\tau}{\rho_0} \tag{4}$$

Здесь $L=m\tau/\rho_0$ (τ — характерное время реакции), γ^* — максимально возможное значение γ, соответствующее горению в безграничном газе (теплоотвод через торец отсутствует).

Тогда задача (1), (2) принимает вид

$$\frac{d}{d\xi}\left(\alpha\frac{du}{d\xi}\right)-\frac{du}{d\xi}+vf=0, \qquad \frac{d}{d\xi}\left(\beta\frac{dv}{d\xi}\right)-\frac{dv}{d\xi}-vf=0 \tag{5}$$

$$\xi=\infty,\ u=1,\ v=0; \qquad \xi=0,\ u=0,\ v-\alpha\frac{dv}{d\xi}=\frac{\gamma^*}{\gamma} \tag{6}$$

Из уравнений (5) и граничных условий на бесконечности следует

$$\alpha\frac{du}{d\xi}+\beta\frac{dv}{d\xi}-v-u+1=0 \tag{7}$$

Если взять u за независимую переменную, v и $p = \alpha du/d\xi$ — за неизвестные функции, а второе уравнение в (5) заменить интегралом (7), то вместо (5), (6) будет

$$\frac{dp}{du} = 1 - \frac{v\varphi(u\gamma)}{p} \qquad (\varphi = f\alpha) \tag{8}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{v + u - 1 - p}{\lambda(u\gamma)\, p}, \quad \lambda \neq 0; \qquad v = p - u + 1, \quad \lambda = 0 \tag{9}$$

$$u = 1, \ p = 0, \ v = 0 \tag{10}$$

$$u = 0, \ p = \gamma^* / \gamma - 1 \tag{11}$$

Условие (11) получено из второго условия в (6) с использованием (7).

Здесь точка $u = 1$, $p = 0$; $v = 0$ особая. Из нее выходят три пары интегральных кривых, из которых две дают $p < 0$, что противоречит условию (11). Остаются кривые с наклонами

$$\left(\frac{dp}{du}\right)_{u=1} = k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \varphi(\gamma)\lambda(\gamma)}}{2\lambda(\gamma)}, \qquad \left(\frac{dv}{du}\right)_{u=1} = k_2 = \frac{k_1(1 - k_1)}{\varphi(\gamma)}, \quad \lambda(\gamma) \neq 0$$

$$k_1 = -\varphi(\gamma), \ k_2 = k_1 - 1, \ \lambda(\gamma) = 0 \tag{12}$$

Эти кривые определят единственное решение $p(u, \gamma)$, $v(u, \gamma)$ задачи (8) — (10) для любых $0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma^*$. Остается установить существование таких значений $\gamma = \gamma^\circ$, при которых удовлетворяется условие (11).

Пусть $T_0 > \varepsilon$. Тогда на основании (3) и (4)

$$\varphi > 0, \ \lambda_\gamma \leqslant 0, \ 0 \leqslant u \leqslant 1; \qquad \varphi_\gamma > 0, \ (\varphi\lambda)_\gamma = (f\beta)_\gamma > 0, \ 0 < u \leqslant 1 \tag{13}$$

(индекс γ означает частную производную по γ).
Покажем, что в этом случае

$$0 < p < \infty, \ 0 < v < \infty, \ 0 \leqslant u < 1 \tag{14}$$

Если бы p и v, будучи, согласно (12), положительными в левой окрестности $u = 1$, пересекли бы ось u при $0 \leqslant u < 1$, то на этом интервале нашлась бы точка u°, в которой либо $p = 0$, $v \geqslant 0$, $dp/du \geqslant 0$, либо $v = 0$, $p > 0$, $dv/du \geqslant 0$. Из (8), (9) следует невозможность существования такой точки, а вместе с этим — и конечность p и v.

Установим следующие предварительные неравенства

$$z_1 = v + u - 1 \geqslant 0, \qquad z_2 = v + u - 1 - p \leqslant 0 \tag{15}$$

Дифференцируя почленно выражения для z_i $(i = 1, 2)$ и используя (8) — (10), получим

$$\frac{dz_i}{du} = \frac{z_i}{\lambda p} + A_i, \qquad \lambda \neq 0 \quad \left(A_1 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \ A_2 = \frac{v\varphi}{p}\right) \tag{16}$$

$$z_i = (2 - i)\, p, \ \lambda = 0; \ z_i = 0, \ u = 1 \tag{17}$$

Если рассматривать (16) как уравнение для определения $z_i(u, \gamma)$ при известных p и v, а (17) — как граничные условия для него на случай обращения и необращения λ в ноль на интервале $(u, 1)$, то решением задачи (16), (17) будет

$$z_i(u, \gamma) = (2 - i)\, p(u_0, \gamma) \exp\left(-\int_u^{u_0} \frac{du}{\lambda p}\right) - \int_u^{u_0} A_i \exp\left(-\int_u^{u_1} \frac{du_2}{\lambda p}\right) du_1 \tag{18}$$

$$u_0 = 1, \ \text{если} \ \lambda(u_1\gamma) \neq 0, \ u \leqslant u_1 \leqslant 1$$

$$u_0 = u_1^0, \ \text{если} \ \lambda(u_1\gamma) \neq 0, \ u \leqslant u_1 < u_1^0, \ \lambda(u_1^0\gamma) = 0$$

Из (18) на основании (3) и (14) следует справедливость (15).

Покажем теперь, что

$$p_\gamma > 0, \ v_\gamma \geqslant 0, \ 0 < u < 1; \quad p_\gamma, \ v_\gamma \geqslant 0, \ u = 0 \tag{19}$$

В окрестности точки $u = 1$ эти неравенства выполняются, так как $p_\gamma = v_\gamma = 0$, $dp_\gamma / du = dk_1 / d\gamma < 0$, $dv_\gamma / du \leqslant 0$, $u = 1$ согласно (10), (12), (13) и (3). Если бы в дальнейшем неравенства (19) не выполнялись, то нашлась бы точка $0 < u^\circ < 1$, где либо $p_\gamma = 0$, $v_\gamma \geqslant 0$, $dp_\gamma / du \geqslant 0$, либо $v_\gamma < 0$, $p_\gamma \geqslant 0$, $dv_\gamma / du \geqslant 0$.

С другой стороны, из (8), (9) имеем

$$\frac{dp_\gamma}{du} = -\frac{\varphi}{p} v_\gamma + \frac{v\varphi}{p^2} p_\gamma - \frac{v\varphi_\gamma}{p}$$

$$\frac{dv_\gamma}{du} = \frac{v_\gamma}{\lambda p} - \frac{z_1}{\lambda p^2} p_\gamma - \frac{z_2}{\lambda^2 p} \lambda_\gamma, \quad \lambda \neq 0; \qquad v_\gamma = p_\gamma, \quad \lambda = 0 \tag{20}$$

Отсюда на основании (3), (13)—(15) легко видеть, что указанной точки u° быть не может.

Из неравенств (19) и (14) следует, что значение p (0, γ) с изменением γ от нуля до γ^* не уменьшается, оставаясь всегда конечным и положительным. Требуемое же значение p из условия (11) при этом монотонно уменьшается от бесконечности до нуля. Поэтому найдется одно и только одно значение γ°, при котором эти величины совпадают. Таким образом, в рассматриваемом случае задача (8) — (11) имеет единственное решение p (u, γ°), v (u, γ°) при любых m. Легко видеть, что функции u (ξ), v (ξ), являющиеся решением исходной задачи (5), (6), определяются отсюда также единственным образом.

Пусть теперь $T_0 < \varepsilon$, т. е.

$$f(u\gamma) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant u \leqslant \delta(\gamma) \qquad \left(\delta = \frac{\varepsilon - T_0}{\gamma T_0}\right)$$

Тогда неравенства (13), (14) и (19) выполняются на интервале $\delta < u < 1$, причем $(p_\gamma)_{u=\delta} \geqslant 0$. Кроме того, аналогично можно показать, что $\partial p / \partial m = p_m < 0$, $v_m \leqslant 0$, $\delta \leqslant u < 1$. Согласно (8), $dp_\gamma / du = dp_m / du = 0$, $0 \leqslant u \leqslant \delta$, поэтому

$$p_\gamma \geqslant 0, \quad p_m < 0, \quad u = 0 \tag{21}$$

Из теории горения в безграничном газе [2-6] следует, что значение $\gamma^\circ = \gamma^*$ обеспечит решение задачи (8) — (11) при $m = m^*$. Согласно (21) и (11), это значение γ° будет единственным для $m = m^*$. При $m < m^*$ величина p (0, γ^*) на основании (21) становится положительной, а при $m > m^*$— отрицательной. Поэтому с уменьшением γ, согласно (21) и (11), для $m < m^*$ найдется единственное значение $\gamma^\circ < \gamma^*$, при котором (11) снова удовлетворится, для $m > m^*$ таких значений γ° не существует. Заметим, что при $m = m^*$ теплоотвод на торце отсутствует, так как p (0, γ^*) = 0 и, следовательно, пламя будет находиться в бесконечности. С уменьшением m значение p (0, γ°) увеличивается, т. е. пламя все сильнее прижимается к торцу.

Следует отметить, что для различных смесей как в случае одномерного горения в безграничном газе, так и в данном случае удобнее вместо m рассматривать числа Пекле $P_T = 1 / \alpha$. Результаты получаются аналогичные. Так, в рассматриваемой камере сгорания при сделанных предположениях стационарный режим горения существует и единственен при любых числах P_T в случае $T_0 > \varepsilon$ и только при $P_T \leqslant P_T^*$— в случае $T_0 < \varepsilon$ (P^*_T — число Пекле, при котором возможен единственный стационарный режим горения в безграничном газе).

В заключение автор благодарит Ю. С. Рязанцева за полезные замечания.

Поступила 14 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. О возможных режимах стационарного горения. ПМТФ, 1962, № 4.
2. Зельдович Я. Б. К теории распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, № 1.
3. Каннель Я. И. О стационарном решении для системы уравнений теории горения. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.
4. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. О существовании и единственности решения системы уравнений тепловой теории горения. ПМТФ, 1965, № 4.
5. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории горения конденсированных систем. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 6.
6. Гельфанд И. М. Некоторые задачи квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, № 2.
7. Бачелис Р. Д., Меламед В. Г. О неединственности стационарного решения системы уравнений теории горения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.