ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ВХОДНОМ УЧАСТКЕ ПЛОСКОГО КАНАЛА

Н. И. Булеев, Г. И. Тимухин (Обнинск)

Приводятся результаты расчета полей скорости и давления потока вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале при ударном профиле скорости на входе.

§ 1. **Постановка задачи.** Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском зазоре на входном участке.

Направим ось x вдоль потока, а ось y — перпендикулярно плоскостям, ограничивающим поток. Начало координат поместим на одной из пластин во входном сечении (фиг. 1). Для продольной и поперечной составляющих скорости и для давления введем обозначения: u, v и p соответственно. Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{b}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad v' = \frac{v}{u_0}, \quad \pi = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad R = \frac{u_0 b}{\nu} \tag{1.1}$$

Здесь b — полуширина канала, u_0 — некоторый масштаб скорости, ρ — плотность жидкости. Тогда исходные уравнения для течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском зазоре примут вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$u\ \partial u/\partial x + v\ \partial u/\partial y = -\partial\pi/\partial x + R^{-1}\Delta u \tag{1.2}$$

$$u\ \partial v/\partial x + v\ \partial v/\partial y = -\partial\pi/\partial y + R^{-1}\Delta v \tag{1.3}$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0 \tag{1.4}$$

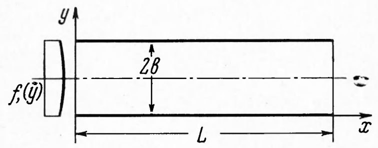
Ради простоты будем рассматривать течение, симметричное относительно средней плоскости канала, т. е. верхней границей потока будем считать плоскость $y = 1$.

На входе в канал зададим произвольный профиль составляющей скорости u и достаточно свободное условие для составляющей скорости v, а именно

$$u = f_1(y), \qquad \partial v/\partial x = 0 \tag{1.5}$$

На расстоянии L от входного сечения зададим условия

$$u = f_2(y), \qquad \partial v/\partial x = 0 \tag{1.6}$$



Фиг. 1

На стенке канала ($y = 0$), естественно, выполняются условия

$$u = v = 0 \tag{1.7}$$

а на верхней границе ($y = 1$)

$$\partial u/\partial y = 0, \qquad v = 0 \tag{1.8}$$

Уравнения (1.2) — (1.4) с краевыми условиями (1.5) — (1.8) представляют собой замкнутую систему для отыскания трех переменных u, v и π, причем давление π находится с точностью до произвольной постоянной.

§ 2. **Метод решения задачи.** Преобразуем нашу систему уравнений следующим образом. Исключим из нее давление π. Для этого продифференцируем уравнение (1.2) по y, а уравнение (1.3) — по x и из второго результата вычтем первый. Получим

$$u\ \partial\Omega/\partial x + v\ \partial\Omega/\partial y - R^{-1}\Delta\Omega = 0, \qquad \Omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y \tag{2.1}$$

Далее введем функцию тока $\psi(x, y)$, являющуюся интегралом уравнения (1.4)

$$u = -\partial\psi/\partial y, \qquad v = \partial\psi / \partial x \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем уравнение четвертого порядка для искомой функции ψ, эквивалентное исходной системе (1.2) — (1.4)

$$-\frac{1}{R}\Delta(\Delta\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

Граничные условия для функции ψ в рассматриваемой области получим из граничных условий для u и v (1.5) — (1.8) с учетом соотношений (2.2)

$$\psi = H_1(y), \qquad \partial^2\psi / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = 0 \tag{2.4}$$

$$\psi = H_2(y), \qquad \partial^2\psi / \partial x^2 = 0 \quad \text{при } x = L \tag{2.5}$$

$$\psi = 0, \qquad \partial\psi / \partial y = 0 \quad \text{при } y = 0 \tag{2.6}$$

$$\psi = c, \qquad \partial^2\psi / \partial y^2 = 0 \quad \text{при } y = 1 \tag{2.7}$$

$$H_1(y) = -\int_0^y f_1(y)\,dy, \qquad H_2(y) = -\int_0^y f_2(y)\,dy, \qquad c = H_1(1) = H_2(1) \tag{2.8}$$

Уравнение (2.3) с граничными условиями (2.4) — (2.7) будем решать конечно-разностным методом. Для этого в области $0 < x < L$, $0 < y < 1$ введем сетку, составленную из прямых

$$x_i = i\ \Delta x \quad (i = 0, 1, \ldots, m+1), \qquad y_k = k\ \Delta y \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$$

причем ради простоты будем пока считать $\Delta x = \Delta y = h$.

Однако, прежде чем в уравнении (2.3) переходить к конечным разностям, заменим это уравнение четвертого порядка системой двух уравнений второго порядка

$$-\frac{1}{R}\Delta\Omega + u\frac{\partial\Omega}{\partial x} + v\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0, \qquad \Delta\psi = \Omega \tag{2.9}$$

причем u и v определяются по (2.2). Граничные условия для функции Ω получаются из уравнения (2.9.2) при помощи условий (2.4) — (2.7).

Перейдем в уравнениях (2.9) к конечным разностям. Используем аппроксимации

$$(\Delta\varphi)_{i,k} = (\varphi_{i-1,k} + \varphi_{i+1,k} + \varphi_{i,k-1} + \varphi_{i,k+1} - 4\varphi_{i,k})\,h^{-2} \tag{2.10}$$

$$\left(u\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_{i,k} = \begin{cases}(\Omega_{i,k} - \Omega_{i-1,k})\,|u_{i,k}|/h, & \text{если } u_{i,k} \geqslant 0\\ (\Omega_{i,k} - \Omega_{i+1,k})\,|u_{i,k}|/h, & \text{если } u_{i,k} < 0\end{cases}$$

$$\left(v\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_{i,k} = \begin{cases}(\Omega_{i,k} - \Omega_{i,k-1})\,|v_{i,k}|/h, & \text{если } v_{i,k} \geqslant 0\\ (\Omega_{i,k} - \Omega_{i,k+1})\,|v_{i,k}|/h, & \text{если } v_{i,k} < 0\end{cases} \tag{2.11}$$

$$u_{i,k} = -(\psi_{i,k+1} - \psi_{i,k-1})/2h, \qquad v_{i,k} = (\psi_{i+1,k} - \psi_{i-1,k})/2h$$

Аппроксимируя производные $\partial\Omega/\partial x$ и $\partial\Omega/\partial y$ односторонними разностями (а не центральными), имеем в виду прежде всего получение счетно-устойчивой численной схемы (в ущерб ее точности).

При использовании выражений (2.10) и (2.11) разностные уравнения для $\Omega_{i,k}$ и $\psi_{i,k}$, аппроксимирующие уравнения (2.9), во внутренних узлах счетной сетки запишутся в виде[1]

$$\begin{gathered}-\left(\frac{1}{Rh} + \frac{|u_{i,k}| + u_{i,k}}{2}\right)\Omega_{i-1,k} - \left(\frac{1}{Rh} + \frac{|u_{i,k}| - u_{i,k}}{2}\right)\Omega_{i+1,k} -\\ -\left(\frac{1}{Rh} + \frac{|v_{i,k}| + v_{i,k}}{2}\right)\Omega_{i,k-1} - \left(\frac{1}{Rh} + \frac{|v_{i,k}| - v_{i,k}}{2}\right)\Omega_{i,k+1} +\\ + \left(\frac{4}{Rh} + |u_{i,k}| + |v_{i,k}|\right)\Omega_{i,k} = 0\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$-\psi_{i-1,k} - \psi_{i+1,k} - \psi_{i,k-1} - \psi_{i,k+1} + 4\psi_{i,k} = -h^2\Omega_{i,k} \tag{2.13}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

Запишем теперь граничные условия для системы функций $\Omega_{i,k}$ и $\psi_{i,k}$. Условия (2.4) и (2.5) приводят к следующим условиям на входе и выходе канала:

$$\begin{gathered}\Omega_{0,k} = G_1(y_k), \quad \psi_{0,k} = H_1(y_k), \quad \Omega_{m+1,k} = G_2(y_k), \quad \psi_{m+1,k} = H_2(y_k)\\ G_1(y) = \partial^2 H_1(y)/\partial y^2, \qquad G_2(y) = \partial^2 H_2(y)/\partial y^2\end{gathered} \tag{2.14}$$

На границе $y = 0$, согласно двум условиям (2.6), можем записать

$$\Omega_{i,0} = (\partial^2\psi/\partial y^2)_{i,0} = (8\psi_{i,1} - \psi_{i,2})/2h^2, \qquad \psi_{i,0} = 0$$

Далее, $\psi_{i,1}$ выразим через $\Omega_{i,1}$ при помощи уравнения (2.13). В результате условия для функций Ω и ψ на границе $y = 0$ запишем в виде

$$\Omega_{i,0} = -\Omega_{i,1} + (\psi_{i-1,1} + \psi_{i+1,1} + 0.5\psi_{i,2})\,h^{-2}, \qquad \psi_{i,0} = 0 \tag{2.15}$$

На границе $y = 1$, согласно условиям (2.7),

$$\Omega_{i,n+1} = 0, \qquad \psi_{i,n+1} = c \tag{2.16}$$

[1] Переход в уравнении (2.9.1) к конечным разностям может быть произведен и по более совершенным схемам. Авторами использовалась также схема Аллена, изложенная в работе [1].

После использования в уравнениях (2.12), (2.13) граничных условий (2.14) — (2.16) получим систему алгебраических уравнений для неизвестных $\Omega_{i,k}$ и $\psi_{i,k}$ вида

$$-a_{i,k}\Omega_{i-1,k}-c_{i,k}\Omega_{i+1,k}-b_{i,k}\Omega_{i,k-1}-d_{i,k}\Omega_{i,k+1}+p_{i,k}\Omega_{i,k}=F_{i,k}+g_{i,k}(\psi) \quad (2.17)$$

$$-a_{i,k}'\psi_{i-1,k}-c_{i,k}'\psi_{i+1,k}-b_{i,k}'\psi_{i,k-1}-d_{i,k}'\psi_{i,k+1}+p_{i,k}'\psi_{i,k}=F_{i,k}'-h^2\Omega_{i,k} \quad (2.18)$$

$$(i=1,2,\ldots,m;\quad k=1,2,\ldots,n)$$

причем

$$a_{1,k}=c_{m,k}=b_{i,1}=d_{i,n}=0,\qquad a_{1,k}'=c_{m,k}'=b_{i,1}'=d_{i,n}'=0$$

Слагаемое $g_{i,k}(\psi)$ в правой части уравнения (2.17), связанное своим происхождением с условием (2.15), отлично от нуля лишь на строке $k=1$, а именно,

$$g_{i,k}(\psi)=\begin{cases} b_{i,1}^{*}(\psi_{i-1,1}+\psi_{i+1,1}+0.5\psi_{i,2})\,h^{-2} & \text{при } k=1\\ 0 & \text{при } k\neq 1\end{cases}$$

$$b_{i,1}^{*}=1\,/\,Rh+{}^1\!/_2\,(|\,v_{i,k}\,|+v_{i,k})$$

если уравнение (2.12) ни на что предварительно не помножалось.

Систему уравнений (2.17)—(2.18) перепишем следующим образом:

$$-a_{i,k}\Omega_{i-1,k}-c_{i,k}\Omega_{i+1,k}-b_{i,k}\Omega_{i,k-1}-d_{i,k}\Omega_{i,k+1}+p_{i,k}(1+\lambda)\,\Omega_{i,k}=$$
$$=F_{i,k}+g_{i,k}(\psi)+\lambda p_{i,k}(\Delta\psi)_{i,k} \quad (2.19)$$

$$-a_{i,k}'\psi_{i-1,k}-c_{i,k}'\psi_{i+1,k}-b_{i,k}'\psi_{i,k-1}-d_{i,k}'\psi_{i,k+1}+p_{i,k}'\psi_{i,k}=F_{i,k}'-h^2\Omega_{i,k} \quad (2.20)$$

Параметр λ, входящий в уравнение (2.19), качественно играет ту же роль, что и параметр $1\,/\,\tau$ (τ — шаг по времени) в решении задачи (2.9) методом установления.

Расщепим теперь каждое из уравнений (2.19) и (2.20) на два разностных уравнения первого порядка (см. [2]).

Для этой цели в правую и левую части уравнения (2.19) прибавляем двучлен

$$B_{i,k}=r_{i,k}\Omega_{i-1,\,k+1}+s_{i,k}\Omega_{i+1,\,k-1}$$

где коэффициенты $r_{i,k}$ и $s_{i,k}$ пока что произвольны.

Система уравнений

$$Z_{i,k}=\gamma_{i,k}(a_{i,k}Z_{i-1,k}+b_{i,k}Z_{i,k-1}+F_{i,k}+g_{i,k}(\psi)+\lambda p_{i,k}(\Delta\psi)_{i,k})+$$
$$+\gamma_{i,k}(r_{i,k}\Omega_{i-1,k+1}+s_{i,k}\Omega_{i+1,k-1}) \quad (2.21)$$

$$\Omega_{i,k}=\gamma_{i,k}(c_{i,k}\Omega_{i+1,k}+d_{i,k}\Omega_{i,k+1})+Z_{i,k} \quad (2.22)$$

$$\gamma_{i,k}=[(1+\lambda)\,p_{i,k}-a_{i,k}c_{i-1,k}\gamma_{i-1,k}-b_{i,k}d_{i,k-1}\gamma_{i,k-1}]^{-1}$$

будет эквивалентна уравнению (2.19), если коэффициенты $r_{i,k}$ и $s_{i,k}$, входящие в выражение для $B_{i,k}$, принять равными

$$r_{i,k}=a_{i,k}d_{i-1,k}\gamma_{i-1,k},\qquad s_{i,k}=b_{i,k}c_{i,k-1}\gamma_{i,k-1}$$

Аналогично, уравнение (2.20) заменим эквивалентной системой

$$W_{i,k}=\gamma_{i,k}'(a_{i,k}'W_{i-1,k}+b_{i,k}'W_{i,k-1}+F_{i,k}'-h^2\Omega_{i,k})+\gamma_{i,k}'(r_{i,k}'\psi_{i-1,\,k+1}+s_{i,k}'\psi_{i+1,\,k-1}) \quad (2.23)$$

$$\psi_{i,k}=\gamma_{i,k}'(c_{i,k}'\psi_{i+1,k}+d_{i,k}'\psi_{i,k+1})+W_{i,k} \quad (2.24)$$

$$\gamma_{i,k}'=(p_{i,k}'-a_{i,k}'c_{i-1,k}'\gamma_{i-1,k}'-b_{i,k}'d_{i,k-1}'\gamma_{i,k-1}')^{-1}$$

$$r_{i,k}'=a_{i,k}'d_{i-1,k}'\gamma_{i-1,k}',\qquad s_{i,k}'=b_{i,k}'c_{i,k-1}'\gamma_{i,k-1}'$$

Поскольку системы уравнений (2.21), (2.22) и (2.23), (2.24) неразделяющиеся, а именно, коэффициенты уравнений (2.21) и (2.22) и слагаемые $F_{i,k}+g_{i,k}(\psi)+\lambda p_{i,k}(\Delta\psi)_{i,k}$ зависят от поля функции ψ, обе системы уравнений будем решать совместно методом последовательных приближений.

Задав в нулевом приближении поле функции $\psi_{i,k}$, вычисляем коэффициенты $a_{i,k}$, $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $d_{i,k}$, $\gamma_{i,k}$ и величины $F_{i,k}$, $g_{i,k}(\psi)$, $\lambda p_{i,k}(\Delta\psi)_{i,k}$, входящие в уравнения (2.21), (2.22), и решаем итерациями систему уравнений (2.21), (2.22), а затем (также итерациями) — систему уравнений (2.23), (2.24). Далее, уточняем коэффициенты $a_{i,k}$, $b_{i,k}$,

$c_{i,k}$, $d_{i,k}$, $\gamma_{i,k}$ уравнений (2.21), (2.22), правую часть $F_{i,k} + g_{i,k}(\psi) + \lambda p_{i,k}(\Delta\psi)_{i,k}$ уравнения (2.21) и снова решаем систему (2.21)—(2.22), а затем систему (2.23)—(2.24). И так далее.

Итерационный процесс для всей системы четырех уравнений (2.21)—(2.24) прекращается, когда разница между последовательными приближениями для поля функции $\psi_{i,k}$ станет меньше заданной малой величины ε.

В итоге получаем поля скоростей u и v в канале в виде функций координат.

Поле давления можно получить путем непосредственного интегрирования уравнений (1.2) и (1.3) вдоль координатных линий. При этом фиксируется давление в одной из точек рассматриваемой области.

§ 3. Результаты расчета. Решение задачи (1.2)—(1.8) конкретно проводилось при следующих граничных условиях для составляющих скорости u и v при $x = 0$ и $x = L$:

$$u = 1, \quad \partial v / \partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad (3.1)$$

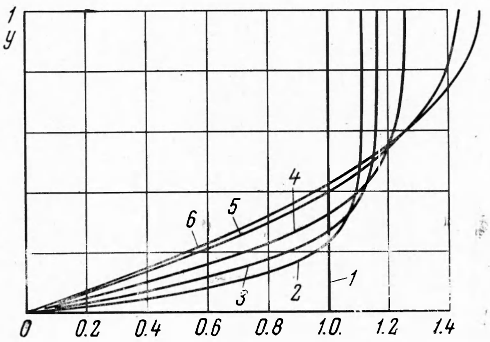
$$u = 3y(1 - {}^1\!/_2\, y), \quad \partial v / \partial x = 0 \quad \text{при} \quad x = L \qquad (3.2)$$

Условие (3.2) взято из решения стационарной задачи (1.2)—(1.4) для течения в бесконечно-протяженном канале.

Решение уравнений (2.21)—(2.24) было запрограммировано на электронно-вычислительную машину.

Опыт решения этой системы прежде всего показал, что при $\lambda = 0$ итерационный процесс (2.21)—(2.24) может расходиться.

Оптимальные значения λ, при которых итерационный процесс (2.21)—(2.24) сходится наиболее быстро, находятся в интервале $0 < \lambda < 0.5$.



Фиг. 2

Из анализа реализованного итерационного процесса (2.21)—(2.24) можно сделать вывод, что итерируемые члены в правой части уравнения (2.21) $r_{ik}\Omega_{i-1,k+1} + s_{i,k}\Omega_{i+1,k-1}$ далеко не составляют основную долю правой части этого уравнения. Поэтому указанные слагаемые можно итерировать в системе (2.21)—(2.22) небольшое число раз. То же самое можно сказать и о членах $r_{i,k}'\psi_{i-1,k+1} + s_{i,k}'\psi_{i+1,k-1}$ в уравнении (2.23).

При количестве счетных узлов сетки $mn \approx 400$ и $\lambda = 0.1$—0.2 хорошо показал себя следующий способ итераций: Z и Ω пересчитывались в процессе (2.21), (2.22) по пять раз, а W и ψ в процессе (2.23), (2.24) — лишь по одному разу. При этом для получения поля ψ с точностью до трех-четырех знаков необходимое количество итераций между уравнениями (2.21), (2.22) и (2.23), (2.24) (т. е. число внешних итераций) не превышает 20—30.

Для получения более детальной картины течения жидкости вблизи входного сечения и около стенки канала использовалась сетка с неравномерным шагом Δx и Δy. Это осуществлялось путем введения в уравнения (2.9) (до перехода к конечным разностям) вместо переменных x и y новых независимых переменных

$$\mu = \ln(1 + x / \delta_1), \qquad \nu = \ln(1 + y / \delta_2) \qquad (3.3)$$

где δ_1 и δ_2 — некоторые «масштабы» явлений вблизи границ $x = 0$ и $y = 0$.

Уравнения (2.9) с учетом (3.3) переписываются в виде

$$-\frac{1}{(\delta_1 + x)(\delta_2 + y)}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} + \frac{1}{(\delta_1 + x)(\delta_2 + y)}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} -$$

$$-\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\delta_1 + x}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\delta_1 + x}\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{\delta_2 + y}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\delta_2 + y}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\right)\right] = 0 \qquad (3.4)$$

$$\frac{1}{\delta_1 + x}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\delta_1 + x}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{\delta_2 + y}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\delta_2 + y}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right) = \Omega$$

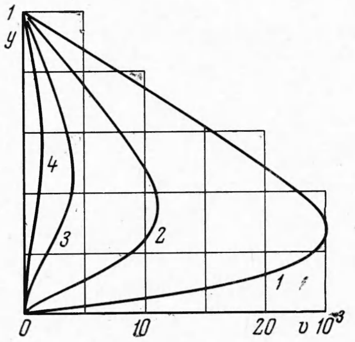
При равномерных шагах координатной сетки в переменных μ и ν интервалы между счетными узлами в линейной шкале описываются формулами

$$(\Delta x)_i \approx (\delta_1 + x_i)\,\Delta\mu, \qquad (\Delta y)_k \approx (\delta_2 + y_k)\,\Delta\nu$$

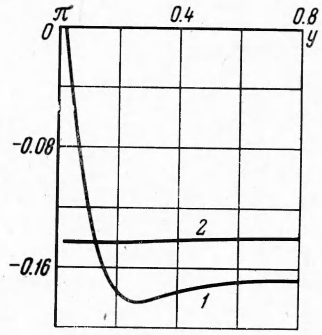
Результаты расчетов полей скорости и давления во входной области плоского зазора при различных значениях чисел R представлены на фиг. 2—6.

На фиг. 2 показаны для примера рассчитанные профили продольной составляющей скорости u в различных сечениях канала при $R = 500$. Кривые *1—6* на этой фигуре относятся соответственно к сечениям $x = 0$, 1.97, 4.05, 10.9, 42.4 и 100.

На фиг. 3 показаны рассчитанные профили поперечной составляющей скорости v в потоке с тем же числом $R = 500$. Кривые *1—4* относятся к сечениям $x = 1.97$, 4.05, 10.9 и 24.8. На расстоянии от входа $x \approx 2$ поперечная составляющая скорости v, согласно фиг. 3, достигает 2.5% от продольной составляющей скорости u на входе в канал.

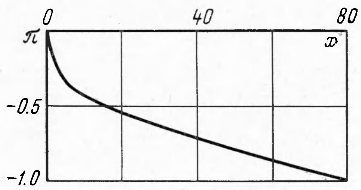


Фиг. 3

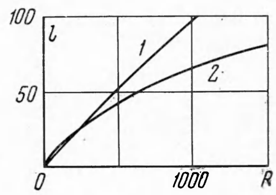


Фиг. 4

Рассчитанное давление π существенно неравномерно по сечению канала лишь на расстояниях от входа в пределах $0 \leqslant x \leqslant 2$. На фиг. 4 кривые *1* и *2* описывают распределение давления в сечениях $x = 0.987$ и $x = 2.02$ (значение π принято равным нулю в точке с координатами $x = 0.987$, $y = 0.022$). Согласно фиг. 4, при числе $R = 500$ в сечении канала с $x \approx 1{,}0$ перепад давления π на стенке и внутри потока достигает 0.2.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 показано рассчитанное изменение давления в потоке жидкости вдоль канала на расстоянии от стенки канала $y = 0.022$ при числе $R = 500$. Как следует из фиг. 5, стабилизация градиента давления в потоке жидкости наступает при таком числе R на расстоянии x от входа порядка 40.

На фиг. 6 представлена рассчитанная зависимость длины участка гидродинамической стабилизации l в ламинарном потоке жидкости в плоском зазоре от числа R. Приводятся оценки величины l по установлению скорости u на оси канала (кривая *1*) и по установлению касательного напряжения τ на стенке канала (кривая *2*). Кривая *1* удовлетворительно согласуется с результатом, полученным Лейбензоном (см. [3]).

Рассчитанное поле скорости качественно согласуется с результатами, полученными в работе [1].

Поступила 4 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang Y. L., Longwell P. A. Laminar flow in the inlet section of parallel plates. Amer. Inst. Chem. Engng. Journ., 1964, vol. 10, No. 3.
2. Булеев Н. И. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии. Матем. сб., 1960, т. 51, № 2.
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.