УДК 533.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ

В. М. Ковеня, П. В. Бабинцев

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: kovenya@ict.nsc.ru, mascot.g@gmail.com

Для численного моделирования задач аэродинамики с использованием уравнений Эйлера и Навье — Стокса, записанных в интегральной форме, построена неявная конечно-объемная схема типа предиктор-корректор. На этапе предиктора введено расщепление уравнений по физическим процессам и пространственным направлениям, что позволило свести решение исходной системы к решению отдельных уравнений на дробных шагах методом скалярной прогонки и обеспечить устойчивость алгоритма в целом. Исследованы сверхзвуковые течения газа в сужающемся канале при регулярном и нерегулярном отражении скачка уплотнения от плоскости симметрии, численно подтверждено существование пульсационного режима течения при сверхзвуковом обтекании цилиндра с иглой.

Ключевые слова: уравнения Эйлера и Навье — Стокса, конечно-объемные схемы, сверхзвуковые течения, отрывы, скачки уплотнения.

DOI: 10.15372/PMTF20170505

Введение. Уравнения Навье — Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа используются при решении различных классов задач в аэро- и гидродинамике. Решения этих задач часто характеризуются наличием подобластей с большими градиентами параметров и других особенностей типа пограничных слоев, висячих скачков, отрывных зон и т. д., что накладывает жесткие требования на применяемые алгоритмы. Численные алгоритмы должны обладать необходимой точностью, иметь достаточный запас устойчивости, удовлетворять условию консервативности и другим требованиям. Основные численные алгоритмы приведены, например, в работах [1–9]. Для построения эффективных численных алгоритмов используются методы расщепления и приближенной факторизации, позволяющие свести решение исходных уравнений к решению их одномерных аналогов (см. [2–4, 9]). В последние десятилетия получил развитие метод конечных объемов [6–8], применяемый при решении многомерных задач в сложных многосвязных областях.

В данной работе предложена конечно-объемная схема типа предиктор-корректор для численного решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса, записанных в интегральной форме. На этапе предиктора вводятся различные формы расщепления, что позволяет упростить решение исходных уравнений. Среди рассмотренных форм расщепления выбраны формы, обеспечивающие максимальную устойчивость схем при минимальном влиянии расщепления на их свойства (см., например, [9]). Получаемые схемы консервативны, что позволяет использовать их при решении стационарных и нестационарных задач. Для повышения эффективности алгоритмов порядок аппроксимации на этапах предиктора и корректора может выбираться различным: на этапе предиктора используются схемы первого или второго порядка аппроксимации, более простые в реализации и имеющие большой запас устойчивости, а на этапе корректора с целью увеличения точности расчетов — аппроксимации более высокого порядка. В отличие от классических неявных схем расщепления по направлениям этот подход является более экономичным по числу операций, приходящихся на одну ячейку, и реализуется с помощью метода скалярной прогонки или неявной схемы бегущего счета.

В настоящей работе представлены также результаты решения с использованием предложенного алгоритма задачи о регулярном и нерегулярном отражении скачков в угловых конфигурациях и задачи о сверхзвуковом обтекании цилиндра с иглой. Эти задачи имеют особенности: при стационарных краевых условиях возможен как стационарный, так и нестационарный режим течения в зависимости от параметров набегающего потока и формы обтекаемых тел.

1. Исходные уравнения. Численный алгоритм. В качестве исходных уравнений используются уравнения Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{U}\,d\Omega+\oint\limits_{S}\boldsymbol{W}\,d\boldsymbol{S}=0, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{U}$ — вектор искомых функций, $\boldsymbol{W}$ — вектор-матрица, состоящая из трех вектор-столбцов:

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho v_1\\ \rho v_2\\ \rho v_3\\ E\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}\rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3\\ \rho v_1^2+p-\sigma_1^1 & \rho v_1v_2-\sigma_2^1 & \rho v_1v_3-\sigma_3^1\\ \rho v_2v_1-\sigma_1^2 & \rho v_2^2+p-\sigma_2^2 & \rho v_2v_3-\sigma_3^2\\ \rho v_3v_1-\sigma_1^3 & \rho v_3v_2-\sigma_2^3 & \rho v_3^2+p-\sigma_3^3\\ (E+p)v_1-Q_1 & (E+p)v_2-Q_2 & (E+p)v_3-Q_3\end{pmatrix},$$

$$E=\rho\Big(e+\frac{v^2}{2}\Big),\qquad v^2=\sum_{i=1}^{3}v_i^2,\qquad \sigma_j^i=\delta_j^i\Big(\mu'-\frac{2}{3}\,\mu\Big)\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\mu\Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big),$$

$$Q_j=\sum_{l=1}^{3}v_l\sigma_j^l+\varkappa_0\,\frac{\partial T}{\partial x_j},\qquad \varkappa=\frac{\varkappa_0}{c_p},$$

x_m $(m=1,2,3)$ — декартовы координаты; Ω — замкнутая область произвольного объема; $\boldsymbol{S}=S\boldsymbol{n}$; S — площадь поверхности грани Ω; $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности Ω; $\varkappa_0$, μ, μ' — теплопроводность, первая и вторая вязкости. Для замыкания уравнений (1) заданы уравнения состояния $p=p(\rho,e)$, $e=e(T)$ и зависимости вязкости и теплопроводности от температуры. При отсутствии членов с вязкостью и теплопроводностью уравнения (1) переходят в уравнения Эйлера. Система уравнений (1) справедлива как для всей расчетной области, так и для отдельной ее ячейки $\omega=\Omega_{i,j,k}$ (рис. 1).

Представим вектор-матрицу $\boldsymbol{W}\cdot S\boldsymbol{n}$ (см. (1)) для ячейки ω в виде

$$\boldsymbol{W}\cdot S\boldsymbol{n}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\rho V\\ \rho v_1V-\sigma^1+pS_1\\ \rho v_1V-\sigma^2+pS_2\\ \rho v_1V-\sigma^3+pS_3\\ (E+p)V-Q\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

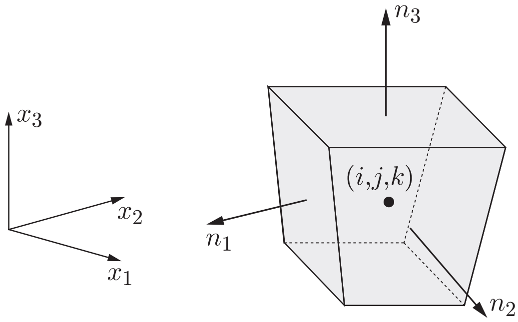

Рис. 1. Расчетная ячейка

где

$$V = \sum_{m=1}^{3} v_m S_m, \qquad \sigma^i = \sum_{m=1}^{3} \sigma^i_m S_m, \qquad Q = \sum_{m=1}^{3} Q_m S_m,$$

$S_m = \boldsymbol{S} n_m$ — проекция площади поверхности ячейки $\boldsymbol{S}$ в направлении нормали n_m. Поскольку грани ячейки могут не совпадать с осями координат, введем локальную невырожденную систему координат $q_l = q_l(x_m)$ ($l = 1,2,3,\ m = 1,2,3$), отображающую ячейку в единичный квадрат. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{m=1}^{3} z^m_l \frac{\partial}{\partial q_m}, \qquad z^m_l = \frac{\partial q_l}{\partial x_m}$$

и уравнения (1) сохраняют прежний вид, при этом σ^i_j, Q_j заменяются на соответствующие значения в новых координатах. Члены σ_m, Q в операторе $\boldsymbol{SW}$ содержат производные по всем направлениям, что не позволяет использовать технологию расщепления по пространственным направлениям для построения экономичных алгоритмов [4]. Так же как в случае применения технологии расщепления для уравнений в дифференциальной форме, представим уравнения (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{U}\, d\Omega + \oint\limits_{S} \bar{\boldsymbol{W}}\, d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}, \tag{3}$$

где вектор $\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}} = (\rho V, W_1, W_2, W_3, HV - \sigma - q)^{\mathrm{т}}$ содержит часть диссипативных членов, входящих в уравнения движения и энергии (производные по нормали к площади грани $\boldsymbol{S}$), все остальные члены перенесены в правую часть и включены в вектор $\boldsymbol{F}$,

$$W_j = \rho v_j V - \sigma_j + p S_j \quad (j = 1,2,3), \qquad q = \sum_{l=1}^{3} \tilde{q}_l, \qquad \sigma = \sum_{l=1}^{3} v_l \tilde{\sigma}_l,$$

$$\tilde{\sigma}_l = \sum_{m=1}^{3} \xi^m_l z^m_l S_m \frac{\partial v_m}{\partial q_m}, \qquad \xi^m_l = 4\delta^m_l z^m_l \Big(\frac{\mu}{3} + \mu'\Big), \qquad \tilde{q}_l = \varkappa_0 z^l_l S_l \frac{\partial T}{\partial q_m}.$$

Для построения алгоритма введем расщепление уравнений по физическим процессам:

$$\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}_1 + \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}_2, \quad \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ pS_1 \\ pS_2 \\ pS_3 \\ (p+\rho e)V - q \end{pmatrix}, \quad S\bar{\boldsymbol{W}}_2 = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho v_1 V - \tilde{\sigma}_1 \\ \rho v_2 V - \tilde{\sigma}_2 \\ \rho v_3 V - \tilde{\sigma}_3 \\ \rho v^2 V/2 - \sigma \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Вектор $\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}_1$ включает члены, содержащие давление и входящие в уравнения движения, члены, содержащие теплопроводность q, и часть газодинамических членов, входящих в уравнение энергии, а вектор $\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}_2$ — остальные члены (конвективные и вязкие члены, содержащиеся в уравнениях движения, диссипативный член σ, входящий в уравнение энергии). Введенное выше расщепление, подобное расщеплению по физическим процессам [9, 10], позволяет упростить построение и реализацию алгоритмов.

Численное решение уравнений (1), (3) будем искать в области $\Omega \times [0, T]$. В пространственной области Ω введем регулярную сетку, состоящую из ячеек-параллелепипедов $\omega = \Omega_{i,j,k}$ (см. рис. 1), а во временном интервале $[0, T]$ — сетку с шагом τ. Осредняя функции в ячейке ω по формуле

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{\omega} \int\limits_V \boldsymbol{U}\, dV,$$

аппроксимируем интегральные операторы в (1), (4) сеточными операторами с порядком $O(h^k)$:

$$\oint\limits_\omega \boldsymbol{W}\, d\boldsymbol{S} \approx \sum_{m=1}^{3} \Delta_m^k\,(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}), \qquad \oint\limits_\omega \bar{\boldsymbol{W}}\, d\boldsymbol{S} \approx \sum_{m=1}^{3} \Delta_m^k\,(\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}).$$

Здесь при $k = 2$

$$\Delta_m^2\,(Sf) = [S_{m+1/2}(f_{m+1} + f_m) - S_{m-1/2}(f_m + f_{m-1})]/2,$$

при $k = 1$

$$\Delta_m^1\,(Sf) = \begin{cases} S_{m+1/2} f_m - S_{m-1/2} f_{m-1}, & v_m \geqslant 0, \\ S_{m+1/2} f_{m+1} - S_{m-1/2} f_m, & v_m < 0, \end{cases}$$

$$\bar{\Delta}_m^1\,(Sf) = \begin{cases} S_{m+1/2} f_{m+1} - S_{m-1/2} f_m, & v_m \geqslant 0, \\ S_{m+1/2} f_m - S_{m-1/2} f_{m-1}, & v_m < 0, \end{cases}$$

f — компонента вектора $\boldsymbol{W}$; Δ_m^2 — симметричная аппроксимация через грани ячейки S_m со вторым порядком или Δ_m^1; $\bar{\Delta}_m^1$ — несимметричные аппроксимации с первым порядком (см. [9]). Для нахождения численного решения уравнений Навье — Стокса рассмотрим конечно-объемную схему предиктор-корректор

$$\begin{gathered} \omega\, \frac{\boldsymbol{U}^{n+1/2} - \boldsymbol{U}^n}{\tau\alpha} + \sum_{m=1}^{3} \sum_{l=1}^{2} \Delta_m^l\,(\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}_{lh}^{n+1/2}) = 0, \\ \omega\, \frac{\boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^{3} \Delta_m^2\,(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}_h^{n+1/2}) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Эта схема является консервативной, нелинейной на этапе предиктора при $\alpha \ne 0$ и аппроксимирует уравнения (1) с порядком $O(\tau^2 + \tau h^l + h^2)$ при $\alpha = 0{,}5 + O(\tau)$, где $h = \omega^{1/3}$, $l = 1, 2$. Линеаризуем схему (5) на этапе предиктора по формулам

$$\begin{gathered} \boldsymbol{U}^{n+1/2} = \boldsymbol{U}^n + A^n(\boldsymbol{f}^{n+1/2} - \boldsymbol{f}^n) + O(\tau^2) = A^n \boldsymbol{f}^{n+1/2} + O(\tau^2), \qquad A = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{f}}, \\ \bar{\boldsymbol{W}}_{lh}^{n+1/2} = \bar{\boldsymbol{W}}_{lh}^n + \bar{B}_1^n(\boldsymbol{f}^{n+1/2} - \boldsymbol{f}^n) + O(\tau^2) = \bar{B}_l^n \boldsymbol{f}^{n+1/2} + O(\tau^2), \qquad \bar{B}_l = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{W}}_l}{\partial \boldsymbol{f}}. \end{gathered} \tag{6}$$

Так как значения коэффициентов в матрицах A^n, $\bar{B}_l^n$ в ячейке полагаются постоянными, то $(A^n)^{-1}S\bar{B}_l^n = SB_l^n + O(h^2)$. Тогда, например, для вектора $\boldsymbol{f} = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, p)^{\text{т}}$ имеем

$$\boldsymbol{S}B_{1h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 \\ 0 & bS_1 & bS_2 & bS_3 & V-\eta_4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}B_{2h} = \begin{pmatrix} V & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V-\eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V-\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V-\eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\eta_l = \xi_l^m S_m \Delta_m \rho^{-1}$ $(l = 1, 2, 3)$; $\eta_4 = \Delta_m S_m \varkappa_0 z_m^m \rho^{-1}$. С учетом линеаризации (6) из (5) получаем линейную конечно-объемную схему предиктор-корректор

$$\begin{gathered} \omega\,\frac{\boldsymbol{f}^{n+1/2} - \boldsymbol{f}^n}{\tau\alpha} + \sum_{m=1}^{3}\sum_{l=1}^{2} \Delta_m^l\,(\boldsymbol{S}B_{lh}^n \boldsymbol{f}^{n+1/2}) = 0, \\ \omega\,\frac{\boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^{3} \Delta_m^2 (\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{W}}_h^{n+1/2}) = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

которая, как и схема (6), аппроксимирует уравнения (1) с порядком $O(\tau^2 + \tau h^l + h^2)$ и реализуется на этапе предиктора матричными прогонками. Этот подход неэффективен, поэтому при решении уравнений на этапе предиктора используются различные итерационные алгоритмы, LU-факторизация операторов, расщепление уравнений по пространственным направлениям [2–4] или по физическим процессам и пространственным направлениям (так же, как в [4, 9] при построении конечно-разностных схем). Рассмотрим конечно-объемную схему с расщеплением операторов на этапе предиктора по физическим процессам и пространственным направлениям

$$\begin{gathered} \omega\,\frac{\boldsymbol{f}^{n+1/12} - \boldsymbol{f}^n}{\tau\alpha} + \Delta_1^1\,(\boldsymbol{S}B_1^n \boldsymbol{f}^{n+1/12}) = 0, \quad \ldots, \\ \omega\,\frac{\boldsymbol{f}^{n+3/12} - \boldsymbol{f}^{n+2/12}}{\tau\alpha} + \Delta_3^1\,(\boldsymbol{S}B_1^n \boldsymbol{f}^{n+3/12}) = 0, \\ \omega\,\frac{\boldsymbol{f}^{n+4/12} - \boldsymbol{f}^{n+3/12}}{\tau\alpha} + \Delta_1^1\,(\boldsymbol{S}B_2^n \boldsymbol{f}^{n+4/12}) = 0, \quad \ldots, \\ \omega\,\frac{\boldsymbol{f}^{n+1/2} - \boldsymbol{f}^{n+5/12}}{\tau\alpha} + \Delta_3^1\,(\boldsymbol{S}B_2^n \boldsymbol{f}^{n+1/2}) = 0, \\ \frac{\boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^n}{\tau} + \sum_{m=1}^{3} \Delta_m^2\,(\boldsymbol{S}\boldsymbol{W}_h^{n+1/2}) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Схема (8) консервативна, аппроксимирует уравнения Навье — Стокса с порядком $O(\tau^2 + \tau h + h^2)$, но является линейной и на этапе предиктора реализуется скалярными прогонками для каждого уравнения, а на этапе корректора — явно. Действительно, из представления для матричных операторов B_{lh} следует, что решение уравнений (8) на первых трех дробных шагах находится методом скалярной прогонки для давления, остальные компоненты вектора $\boldsymbol{f}$ вычисляются в явном виде. Например, для первого дробного шага

$$\rho^{n+1/12} = \rho^n,$$

$$v_l^{n+1/12} = v_l^n - \frac{r}{\rho^n}\,\bar{\Delta}_1^1 S_l p^{n+1/12} \quad (l = 1, 2, 3), \qquad r = \frac{\tau\alpha}{\omega},$$

$$p^{n+1/12} - p^n + r\Big[\sum_{l=1}^{3} \gamma p^n \Delta_1^1 S_l v_l^{n+1/12} + \big(V\Delta_1^1 - \Delta_1\eta_4\,\Delta_1\rho^{-n}\,p^{n+1/12}\big)\Big] = 0.$$

Исключая скорости $v_l^{n+1/12}$ из уравнения для давления, получаем уравнение

$$\Big\{1 + r\Big[V\Delta_1 - \Delta_1 S_l\eta_4\Delta_1^1\Big(\frac{1}{\rho^n}\Big) - r\gamma p^n \sum_{l=1}^{3} \bar{\Delta}_1^1\Big(\frac{S_l}{\rho^n}\Big)\Delta_1^1 S_l\Big]\Big\}p^{n+1/12} = p^n - rb\sum_{l=1}^{3} \Delta_l^1 S_l v_l^n,$$

которое решается методом трехточечной скалярной прогонки, после чего явно вычисляются новые значения компонент скорости. Для двух следующих дробных шагов вычисления аналогичны. Из представления матричного оператора $\boldsymbol{S}B_2^n$ следует, что для 4–6-го дробных шагов схемы (8) система уравнений может быть решена методом скалярной прогонки на каждом дробном шаге независимо для уравнений неразрывности и движения, а давление выбирается таким же, как и на предыдущем шаге. Наконец, значения функций на $(n+1)$-м слое находятся явно из последнего уравнения схемы (8). Рассмотренный алгоритм является экономичным по числу операций на один узел сетки, обладает свойством консервативности для каждой расчетной ячейки и, как показали расчеты, устойчив в широком диапазоне параметров сетки.

2. Результаты численного моделирования. Предложенный конечно-объемный алгоритм (8) был применен для решения некоторых стационарных и нестационарных задач. При нахождении стационарного решения использовался принцип установления. Все уравнения были представлены в безразмерном виде [10]. Так же как в [10], критерий установления задавался в виде $\varepsilon = \max\limits_{i,j} |f^{n+T} - f^n|/(T_0\tau f^n) < 10^{-5} \div 10^{-3}$. Параметр T_0 варьировался в диапазоне $1 \leqslant T_0 \leqslant 30$, что позволяло избежать влияния осцилляций решения при аппроксимации схемы (8) второго порядка. Число шагов до установления зависело от начального распределения параметров течения, временного или итерационного параметра τ и при решении различных двумерных задач составляло $0{,}5 \cdot 10^4 \div 4{,}0 \cdot 10^5$ шагов на сетке, содержащей 300×200 ячеек. Для задачи о распаде произвольного разрыва, имеющей точное решение [11], проведена оценка точности алгоритма. Установлено, что алгоритм корректно определяет скорости фронтов, но "размазывает" ударную волну на 4–5 ячеек, а контактный разрыв — на 6–8 ячеек (см. [10]).

В задаче о регулярном и нерегулярном отражении при сверхзвуковом обтекании клина исследовано течение при различных значениях числа Маха M и угла раствора клина. В начальный момент на входе задавался равномерный поток, внутри области — постоянные плотность, давление и нулевая скорость. На поверхности клина для невязкого газа ставились условия непротекания, для вязкого — условия прилипания, на оси симметрии — условия симметрии. Известно, что данная задача имеет два стационарных решения (см. [12, 13]), зависящих от числа Маха набегающего потока и угла раствора клина. Первое решение соответствует регулярному отражению ударной волны от плоскости симметрии, второе — нерегулярному (маховскому) режиму.

На рис. 2,*а* приведено распределение температуры для установившегося решения, полученного при $\mathrm{M} = 2{,}8$, $\operatorname{tg}\beta = 0{,}28$ (β — угол наклона стенки канала) на сетке размером

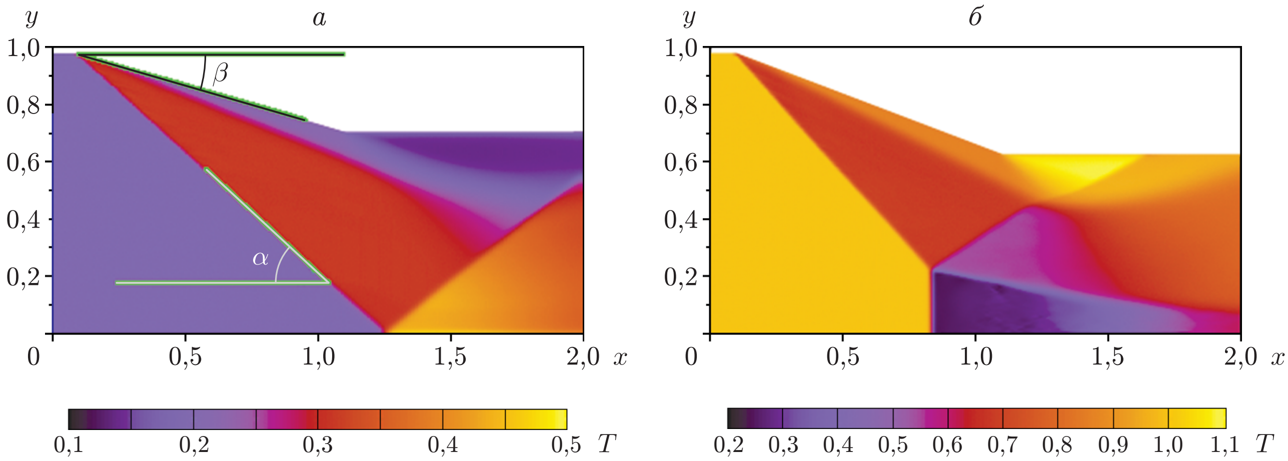

Рис. 2. Распределение температуры:
а — $\mathrm{tg}\,\beta = 0{,}28$, *б* — $\mathrm{tg}\,\beta = 0{,}36$

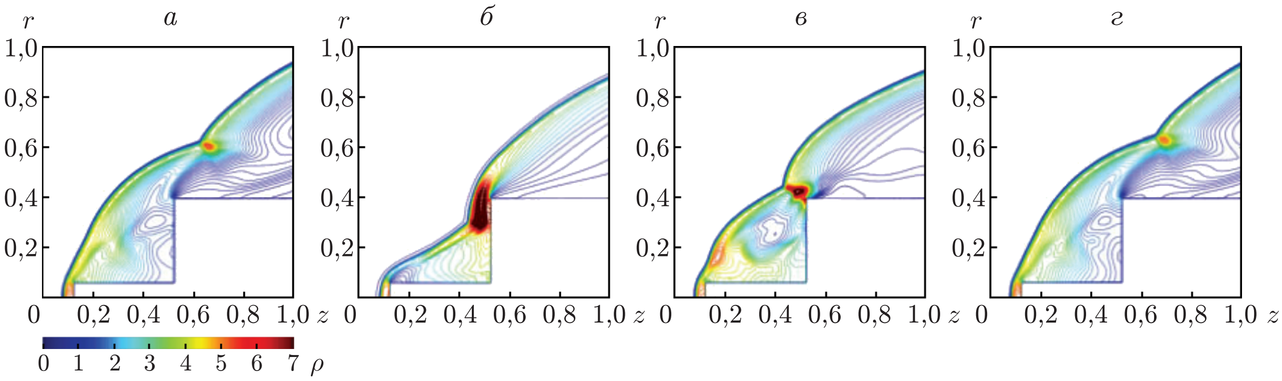

Рис. 3. Поле течения вблизи цилиндра с иглой в различные моменты времени:
а — $t = 0$, *б* — $t = 75$ мкс, *в* — $t = 150$ мкс, *г* — $t = 199$ мкс

300×150 ячеек. Этот режим соответствует регулярному отражению. Угол наклона падающей и отраженной волн равен $\alpha \approx 40^\circ$, что согласуется с точным решением и данными экспериментов [12, 13].

На рис. 2,*б* приведено распределение температуры при $\mathrm{tg}\,\beta = 0{,}36$, что соответствует маховской конфигурации при отражении. Для данного режима течения угол падения ударной волны равен $\alpha \approx 45^\circ$. Сравнение полученных параметров течения с данными работ [12, 13] показывает, что параметры потока и углы наклона падающих и отраженных скачков и волн разрежения практически совпадают. Подобные режимы получены также для вязких течений (для ламинарного режима). Обнаружено, что в диапазоне чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \approx 0{,}5 \cdot (10^4 \div 10^6)$ положение границ области двойного решения слабо зависит от значений Re.

В следующей серии расчетов рассматривалось осесимметричное обтекание торца цилиндра с иглой. В этом случае при стационарных краевых условиях также возможно возникновение стационарного и нестационарного режимов течения с пульсациями параметров потока и положения скачка уплотнения в зависимости от параметров набегающего потока (M и Re) и формы иглы (см. [14]). На рис. 3 приведено поле плотности газа на поверхности цилиндра в сечении $z = 0{,}52$, $r = 0{,}32$ в случае обтекания цилиндра с иглой при $\mathrm{M} = 6$, $\mathrm{Re} = 0{,}5 \cdot 10^5$ в различные моменты времени. Согласно [14, 15] при данных параметрах

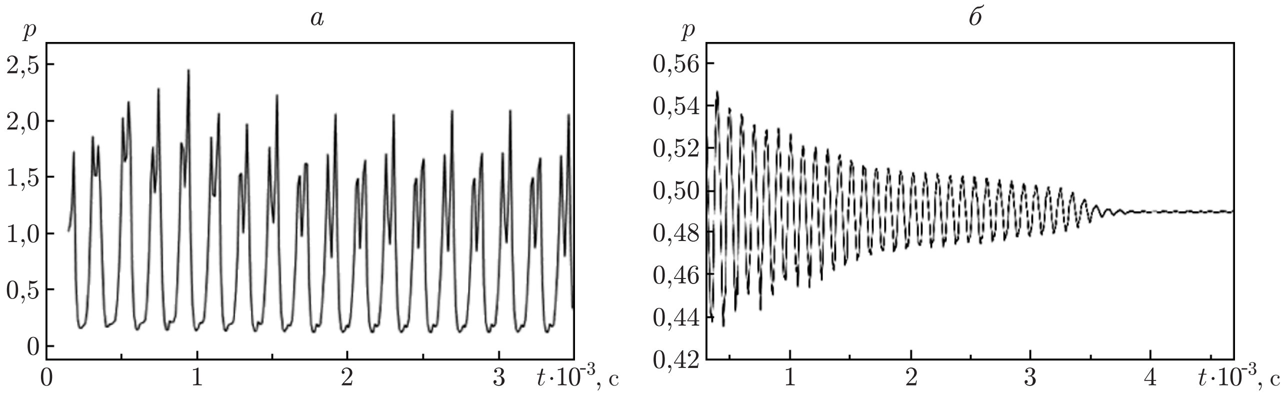

Рис. 4. Режим течения в зависимости от времени:
а — $M_\infty = 6$, *б* — $M_\infty = 9$

набегающего потока реализуется пульсационный режим течения. Частота пульсаций и параметры потока для этого режима течения близки к результатам численных расчетов [15] и экспериментальным данным [14], полученным для турбулентного режима течения.

При увеличении временного интервала, в котором проводятся расчеты, течение выходит на пульсационный режим, в котором положение головного скачка и как следствие параметры течения колеблются (рис. 4,*а*), период пульсаций (давления) составляет приблизительно 200 мкс, что согласуется с данными экспериментов [14].

При движении головного скачка между иглой и цилиндром возникает зона отрывного вихревого течения, которая смещается вверх вдоль торца цилиндра, затем сносится вниз по потоку, после чего процесс повторяется (см. рис. 3). Численные расчеты показали, что для данной геометрии обтекаемого тела пульсационный режим течения наблюдается при $M_\infty \leqslant 8$, при больших числах Маха реализуется стационарный режим течения, не зависящий от начальных данных. На рис. 4,*б* показан режим затухания колебаний при выходе на стационарный режим при $M_\infty = 9$. Расчеты, проведенные при других значениях числа Рейнольдса, показали, что режим течения слабо зависит от него. Следует отметить, что при выбранной геометрии обтекаемого тела пульсационный и стационарный режимы течения не зависят от начальных данных.

3. Выводы. Для численного решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса предложен экономичный конечно-объемный алгоритм типа предиктор-корректор с расщеплением операторов на этапе предиктора. Возможность выбора на этапе предиктора различных форм расщепления и способов реализации алгоритма позволяет в рамках единого подхода рассматривать различные классы схем для численного решения многомерных задач. Алгоритм реализован для схемы с расщеплением операторов по физическим процессам и пространственным направлениям. Рассмотрены течения газа в сужающемся канале при различных числах Маха, подтверждено существование регулярного и нерегулярного режимов отражения от плоскости симметрии в зависимости от параметров потока. Численно исследовано осесимметричное обтекание цилиндра с иглой при различных числах Маха и Рейнольдса, подтверждено существование пульсационного режима обтекания и определен диапазон его параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К.** Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов. М.: Наука, 1976.

2. **Самарский А. А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. **Марчук Г. И.** Методы вычислительной математики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
4. **Ковеня В. М.** Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.
5. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
6. **Yamomoto S., Daiguji H.** Higher-order accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier — Stokes equations // Computers Fluids. 1993. V. 22. P. 259–270.
7. **Le Veque R. J.** Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
8. **Vos J. B., Rizzi A., Darrac D., Hirschel E. H.** Navier — Stokes solvers in European aircraft design // Progress Aerospace Sci. 2002. V. 38. P. 601–697.
9. **Ковеня В. М.** Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.
10. **Ковеня В. М., Бабинцев П. В.** Алгоритмы расщепления в методе конечных объемов // Вычисл. технологии. 2015. Т. 20, № 6. С. 65–84.
11. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
12. **Ivanov M. S., Vandromme D., Fomin V. M., et al.** Transition between regular and Mach reflection of shock waves: new numerical and experimental results // Shock Waves. 2001. V. 11, N 3. P. 197–207.
13. **Von Neumann J.** Oblique reflection of shock waves // Collected works of J. von Neumann. Oxford: Pergamon Press, 1963. V. 6. P. 238–299.
14. **Запрягаев В. И., Кавун И. Н.** Экспериментальное исследование возвратного течения в передней отрывной области при пульсационном режиме обтекания тела с иглой // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 30–39.
15. **Ковеня В. М., Еремин А. А.** Метод предиктор-корректор для численного решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 22–37.

Поступила в редакцию 31/V 2017 г.