

О ФОРМИРОВАНИИ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЕРЕХОДНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

УДК 532.526

М. Б. Зельман, Б. В. Смородский

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Введение. В потоках типа пограничного слоя нелинейная эволюция возмущений является определяющим фактором ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП). Для исследования эволюции малых пульсаций построена слабонелинейная теория [1, 2]. В ее основе лежит предположение о локальной близости гидродинамического поля к распределению, сформированному линейными возмущениями. При этом в процессе доминируют вязкие эффекты. Нелинейность вносит поправки более высокого (по амплитуде колебаний) порядка, которые, однако, могут заметно видоизменять спектр и скорости усиления таких колебаний. В рамках слабонелинейной теории удастся успешно интерпретировать явления субгармонического S -перехода. Последний реализуется при малых уровнях начальных возмущений и характеризуется опережающим ростом низкочастотных трехмерных волн Толлмина — Шлихтинга, в частности субгармонических относительно выделившейся на начальном этапе. Основным механизмом являются нелинейные резонансные взаимодействия в волновых триадах [2–5].

Область применимости слабонелинейной теории ограничена. При увеличении интенсивности возмущений нелинейность может играть доминирующую роль в структурировании поля. Впервые это осуществляется в критическом слое (КС) волны, где ее фазовая скорость совпадает с локальной скоростью потока. Область КС наряду с пристенным слоем (ПС) имеет важное значение для механизма энергетического обмена возмущений со средним течением [6–10].

В зависимости от преобладания эффекта нестационарности, вязкости или нелинейности выделяют три типа КС, толщины которых соответственно равны [10]:

$$l_t = \gamma/\alpha, \quad l_\nu = (\alpha \text{Re})^{-1/3}, \quad l_N = A^{1/2}$$

(α , A , γ — типичное волновое число, амплитуда и инкремент волны, Re — число Рейнольдса). Область применимости слабонелинейной теории соответствует условию $l_N \ll (l_t, l_\nu)$ [10]. Изменение типа КС трансформирует структуру поля пульсаций и средней составляющей потока. Меняется картина процесса турбулизации.

Исследование эволюции квазипериодических возмущений с различными типами КС успешно проводилось в свободных сдвиговых течениях [11–13], где поведение в КС практически полностью определяет энергетику волны. Более проблематичным является изучение пристенных потоков, для которых существенно влияние стенки. Решения, отвечающие нейтральным волновым возмущениям, построены в [6, 7, 14]. Некоторые аспекты изменения распределения в окрестности КС рассматривались в [9]. Более полная процедура получения эволюционных уравнений была предложена в [8, 10]. Анализ указанных работ основывался, однако, на ряде эвристических предположений о связи скоростей изменения амплитуды с формой волны и ограничивался случаем однопериодического возмущения, КС которого асимптотически далек от твердой границы.

Характерными особенностями возмущений с нелинейными КС, выявленными в [6–14], являются интенсивная генерация высокочастотных гармоник, резкая перестройка поля пульсаций завихренности и деформация среднего профиля в окрестности КС. Наличие таких особенностей, по-видимому, сказывается на эффективности взаимодействия колеба-

ний различных частей спектра, а именно на параметрическом возбуждении низкочастотных фоновых пульсаций, играющих доминирующую роль при S -переходе. В результате возможна качественная смена сценария ЛТП при формировании нелинейного режима КС.

В данной работе предложен метод анализа эволюции волновых возмущений в плоскопараллельных потоках типа пограничного слоя, универсально пригодный в области линейного, слабонелинейного и существенно нелинейного развития (свободный от ограничений на тип и положение критических слоев волн). Для построения решений используются процедуры асимптотического осреднения и сращиваемых разложений. Исследована относительная эффективность параметрического возбуждения фоновых субгармонических пульсаций первичной волной с линейным и нелинейным КС. Обнаружено падение скорости параметрического роста субгармоник в поле интенсивной волны. Проведены оценки пороговых амплитуд формирования различных типов перехода в пограничном слое. Делается вывод о связи S - и K -переходов с режимами слабонелинейной эволюции и нелинейного КС первичной волны.

Метод решения задачи эволюции. Рассмотрим плоскопараллельное течение типа пограничного слоя. Поле течения описывается безразмерной функцией тока $\tilde{\psi}$, для которой справедливо уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{\psi} + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \tilde{\psi} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \tilde{\psi} - \frac{\Delta^2}{\text{Re}} \tilde{\psi} = 0, \quad (1)$$

где $\tilde{u} = \partial \tilde{\psi} / \partial y$; $\tilde{v} = -\partial \tilde{\psi} / \partial x$; $\tilde{\psi} = \Psi(y) + \varepsilon \psi(x, y, t)$; $\varepsilon \ll 1$; Ψ и ψ соответствуют невозмущенному течению и возмущению.

Исследуем эволюцию квазигармонических возмущений

$$\psi = \sum_s \psi_s(y, t) \exp(i\theta_s), \quad \theta_s = \alpha_s x - \omega_s t, \quad \left| \frac{1}{\omega_s \psi_s} \frac{\partial}{\partial t} \psi_s \right| \sim \mu \ll 1. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), после усреднения по быстрым фазам [2, 5] получим

$$L\psi_s \equiv \left\{ \Delta \psi_s - \frac{U''}{U - c_s} \psi_s \right\} = \frac{i}{\alpha(U - c_s)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi_s - \frac{\Delta^2}{\text{Re}} \psi_s - \varepsilon J_{ik} h_{i+k}^s \right\} \equiv Q_s, \quad (3)$$

$$\psi_s = \frac{\partial}{\partial y} \psi_s = 0 \quad (y = 0), \quad \bar{1} \psi_s \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \psi_s + \alpha_s \psi_s \right\} = 0 \quad (y = y_\infty), \quad \psi_{s0} = \psi_s \quad (t = 0)$$

($U = d\Psi/dy$, штрих обозначает производную по y). При этом

$$c_s = \omega_s / \alpha_s, \quad \Delta \psi_s = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha_s^2 \right) \psi_s, \\ J_{ik} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \psi_i \frac{\partial \Delta}{\partial y} \psi_k - \frac{\partial}{\partial y} \psi_k \frac{\partial \Delta}{\partial x} \psi_i + \frac{\partial}{\partial x} \psi_k \frac{\partial \Delta}{\partial y} \psi_i - \frac{\partial}{\partial y} \psi_i \frac{\partial \Delta}{\partial x} \psi_k \right\}, \\ h_{i+k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp i(\hat{\theta}_s - \theta_i - \theta_k) d\theta.$$

С точностью до $O(\mu, \varepsilon, \text{Re}^{-1})$ приходим к задаче Рэлея

$$L\psi_s \equiv 0, \quad \psi_s = 0 \quad (y = 0), \quad \Gamma \psi_s = 0, \quad \psi_{s0} = \psi_s(y, 0), \quad (4)$$

решение которой имеет вид

$$\psi_s = A_j \varphi_{1j}(y) \delta_{sj}, \quad \omega_j = \omega(\alpha_j), \quad \delta_{sj} = \begin{cases} 1, & s = j, \\ 0, & s \neq j \end{cases}$$

($\varphi_{1j} = \varphi_1(y, \alpha_j)$, $\omega(\alpha_j)$) — собственные решения и числа задачи, отвечающие волновому числу α_j). При этом предполагается, что начальное возмущение ψ_{s0} представлено суперпозицией рэлеевских решений, к которым в дальнейшем будем относить индексы i, j, k . Индексы s, r, p соответствуют волнам, фазы которых представляют биения ($\theta_s = \pm\theta_i \pm \theta_k \pm \dots$), так что ω_s, α_s не обязательно связаны дисперсионным соотношением линейной задачи.

Введя нормировку $\varepsilon_1 = \varepsilon/\mu$, $\nu = 1/\text{Re } \mu$, без ограничения общности будем искать решение (3) в виде

$$\psi_s = \sum_{m=0} \mu^m \psi_s^{(m)}, \quad \frac{d}{dz} A_j = \sum_{m=1} \mu^m P_j^{(m)}, \quad (5)$$

где $\psi_s^{(m)}$, $P_j^{(m)}$ — функции и операторы, учитывающие искажение первичных волн Рэлея (4). Такие искажения обусловлены влиянием отброшенных в (4) эффектов нестационарности, нелинейности и вязкости. При этом удобно выделить вклад $\tilde{f}_s$, вносимый сингулярными областями в распределение функции тока. К таким областям относятся КС, в которых $(U(y) - c_s) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow y_s$, и ПС, который обуславливает $\partial\psi_s/\partial y = 0$ ($y = 0$). Внутри этих областей разложение (5) теряет регулярность.

Вне указанных слоев

$$\psi_s^{(m)} = f_s^{(m)} + \tilde{f}_s^{(m)}, \quad \tilde{f}_s^{(m)} = \Phi_s^{(m)} + w_s^{(m)}, \quad f_s^{(0)} = \psi_s^{(0)} = A_j \varphi_{1j} \delta_{sj}, \quad \tilde{f}_s^{(0)} = 0. \quad (6)$$

Здесь $f_s^{(m)}$ — сингулярная часть решения, слагаемые которой ($\Phi_s^{(m)}$ и $w_s^{(m)}$) обусловлены соответственно КС и ПС; $\tilde{f}_s^{(m)}$ — регулярная часть решения, для которой справедлива система

$$L f_s^{(m)} = \frac{i}{\alpha_s(U - c_s)} \left\{ P_j^{(m)} \Delta \varphi_{1j} \delta_{js} + \frac{\partial \Delta}{\mu \partial t} \psi_s^{(m-1)} - \Delta^2 \psi_s^{(m-1)} - \varepsilon_1 J_s^{(m-1)} \right\} \equiv Q_s^{(m)}, \quad (7)$$

$$f_s^{(m)} + \tilde{f}_s^{(m)} = 0 \quad (y = 0), \quad \Gamma(f_s^{(m)} + \tilde{f}_s^{(m)}) = 0, \quad J_s^{(m)} = \sum_{n=0} J(\psi_i^{(m-n)}, \psi_k^{(n)}) h_{i+k}^s,$$

или, что эквивалентно, $L \psi_s^{(m)} = Q_s^{(m)} + L \tilde{f}_s^{(m)}$, $\psi_s^{(m)}(t, 0) = 0$, $\Gamma \psi_s^{(m)} = 0$.

Условия прилипания принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial y} (f_s^{(m)} + \Phi_s^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial y} \mu w^{(m+1)} = 0. \quad (8)$$

Заметим, что граничные условия при $y = 0$ в форме (7), (8) верны при условии, что КС не лежит на стенке ($y_s \gg y = 0$). Следовательно, выполняется представление (6). В противном случае условия $\psi_s = \partial\psi_s/\partial y = 0$ ($y = 0$) должны использоваться непосредственно.

Обратимся к решению задачи (5)–(8). Для длинноволновых возмущений ($\alpha_s \ll 1$) система фундаментальных решений уравнения Рэлея может быть представлена функциями Гейзенберга $\varphi_{1s}(y)$, $\varphi_{2s}(y)$:

$$\varphi_{1s} = \varphi_1(y, \alpha_s) = (U - c_s) \int_0^y \frac{dy}{(U - c_s)^2} + O(\alpha_s^2) \simeq -\frac{U - c_s}{U_s'^2} \left\{ \frac{1}{z_s} + \frac{1}{y_s} + \frac{U_s''}{U_s'} \ln \left| \frac{z_s}{y_s} \right| - g_s \right\}, \quad (9)$$

$$\varphi_{2s} = \varphi_2(y, \alpha_s) = (U - c_s) + O(\alpha_s^2).$$

Здесь

$$g_s = \int_{-y_s}^{z_s} \left\{ \frac{U_s'^2}{(U - c_s)^2} - \frac{1}{z_s^2} + \frac{U_s''}{U_s'} \frac{1}{z_s} \right\} dz_s; \quad U_s = U(y_s) = c_s; \quad z_s = y - y_s.$$

Из (7) получим (вне областей КС)

$$\psi_s^{(m)} = \left\{ \varphi_{1s}(y) \int_0^y \varphi_{2s}(Q_s^{(m)} + L\tilde{f}_s^{(m)}) dy - \varphi_{2s}(y) \int_0^y \varphi_{1s}(Q_s^{(m)} + L\tilde{f}_s^{(m)}) dy \right\} V_s^{-1}, \quad (10)$$

где $V_s = \varphi_{1s} d\varphi_{2s}/dy - \varphi_{2s} d\varphi_{1s}/dy$ — вронскиан системы.

Для $m = 0$ уравнения (7) сводятся к (4), и, в то время как условие $\varphi_{1s} = 0$ ($y = 0$) выполняется автоматически, граничное условие на y_∞ при $s = j$

$$\Gamma\varphi_{1j} = \frac{1}{U_0 - c_j} - \alpha_j \frac{U_0 - c_j}{U_j'^2} \left(\frac{1}{z_j} + \frac{1}{y_j} + \frac{U_j''}{U_j'} \ln \left| \frac{z_j}{y_j} \right| - g_j \right) = 0 \quad (11)$$

($U_0 = U(y_\infty)$) устанавливает дисперсионную связь $\omega_j = \omega(\alpha_j)$.

При $s = j$ из (10) с учетом $\varphi_{1j}(0) = \Gamma\varphi_{1j} = 0$ имеем условия разрешимости системы (7):

$$\begin{aligned} \int_0^{y_\infty} \varphi_{1j}(Q_j^{(m)} + L\tilde{f}_j^{(m)}) dy &= \int_0^{y_\infty} \varphi_{1j}Q_j^{(m)} dy + \tilde{f}_j^{(m)}(t, y_\infty) = 0, \\ \int_0^{y_\infty} \varphi_{1j}(Q_j^{(m)} + L\tilde{f}_j^{(m)}) dy &= \int_0^{y_\infty} \varphi_{1j}Q_j^{(m)} dy + \tilde{f}_j^{(m)}(t, 0), \end{aligned} \quad (12)$$

которые устанавливают связь операторов $P_j^{(m)}$ со значением функционалов от функций $\psi_s^{(m-n)}$, определяемых в предыдущих порядках. Тогда (5) приводит к эволюционному уравнению относительно $A_j(t)$. (Напомним, что второе из соотношений (12) верно только при $y_s \gg 0$.)

Как уже отмечалось выше, $\tilde{f}_s^{(m)}$ — сингулярная часть решения — обусловлена КС и ПС.

Изолированные КС в окрестности $y \sim y_s$ возникают вследствие сингулярных членов в правой части (7) вида

$$Q_s \sim a_{rs}(U - c_r)^{-n} + a_{ps}(U - c_p)^{-m} + \dots$$

($a_{rs}(y, t)$ — регулярные функции) и приводят к поправкам

$$\Phi_s^{(m)} = \sum_r (B_{rs}^{(m)}(t)\varphi_{1s} + D_{rs}^{(m)}(t)\varphi_{2s}). \quad (13)$$

Здесь $B_{rs}^{(m)}, D_{rs}^{(m)}$ могут принимать разные значения выше и ниже зоны КС ($y \simeq y_r$):

$$\Delta B_{rs}^{(m)} = B_{rs}^{(m)}|_{y_r+0} - B_{rs}^{(m)}|_{y_r-0} \neq 0, \quad \Delta D_{rs}^{(m)} = D_{rs}^{(m)}|_{y_r+0} - D_{rs}^{(m)}|_{y_r-0} \neq 0.$$

Функция влияния ПС $w_s^{(m)}$ соответствует убывающему вместе с производными решению $w_s^{(m)} \rightarrow 0$ ($y \rightarrow y_\infty$). С учетом этого (12) принимает вид

$$\int_0^{y_\infty} \varphi_{1j}Q_j^{(m)} dy + \sum_r D_{rj}^{(m)} \Big|_{y_\infty} = 0, \quad \int_0^{y_\infty} \varphi_{1j}Q_j^{(m)} dy + \left(\sum_r D_{rj}^{(m)} + w_j^{(m)} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad (14)$$

или, что то же самое,

$$\int_0^{y_\infty} \varphi_{1j}Q_j^{(m)} dy = w_j^{(m)}(t, 0) - \sum_r \Delta D_{rj}^{(m)},$$

где интеграл берется в смысле главного значения (с исключением областей, содержащих особенности).

Из (5), (14) очевидно, что dA_j/dt наряду с членами $O(\varepsilon, \text{Re}^{-1}, w_j^{(m)}(0, t))$ определяется величиной скачка $\Delta D_{\tau j}^{(m)} \sim D \Delta y_\tau$, имеющего порядок толщины КС Δy_τ . Тогда параметр μ может быть введен как характеристика толщин КС: $\mu \approx \max_\tau \Delta y_\tau$.

Обратимся к определению w_s . Введем формально внутренние переменные $\eta = \eta_j = z_j/\mu$. Уравнение (1) для функции тока $\tilde{\psi}(x, \eta, \tau)$ следующее:

$$\left\{ \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + \mu^{-2} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \Omega = \\ = \mu^2 \left\{ \mu^{-2} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) \tilde{\psi} + 2\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega + \mu^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Omega \right\}. \quad (15)$$

Здесь $\lambda = (\text{Re} \mu^3)^{-1}$; $\tau = \gamma t$; $\Omega = \partial^2 \tilde{\psi} / \partial \eta^2$; $\gamma = |\partial \ln \Omega / \partial t|$ — параметр нестационарности.

В области, внешней к КС, согласно (6),

$$\tilde{\psi} = \Psi + \varepsilon \sum_k A_k \varphi_{1k} \exp(i\theta_k) + \varepsilon \mu (f^{(1)} + \Phi^{(1)} + w^{(1)}) + O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \varepsilon \nu) \quad (16)$$

и $w^{(1)}$ определяется из уравнения

$$\left\{ \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{U - c_j}{\mu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 \frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_k (\text{Im } A_k \varphi_{1k} e^{i\Delta\theta_k}) \frac{\partial}{\partial \eta} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \Omega_w^{(1)} = 0, \quad (17)$$

где $x_1 = x - c_j t$; $\Delta\theta_k = \Delta\alpha_k x - \Delta c_k t$; $\Delta(\alpha_k, c_k) = (\alpha_k, c_k) - (\alpha_j, c_j)$;

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} w^{(1)} = \Omega_w^{(1)}, \quad \left(\Omega_w^{(1)}, \frac{\partial}{\partial \eta} \Omega_w^{(1)} \right) \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \frac{|y_\infty - y_j|}{\mu}.$$

При $y_k \gg \mu$ условие на стенке имеет вид

$$w^{(1)} = -(f^{(1)} + \Phi^{(1)}), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} w^{(1)} = -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \eta} \mu^{-1}.$$

Следующие порядки $\sim \mu^n$ определяются из неоднородных уравнений, где главный оператор совпадает с (17).

Определение коэффициентов $(B, \tilde{D})_{\tau s}^{(m)}$ и $\Phi_s^{(m)}$ требует решения задачи во внутренних областях КС. Для его нахождения используется стандартная процедура метода сращиваемых разложений [7, 12]. Уравнения для $\psi_{iN} = \tilde{\psi}(\tau, \eta, x)$ внутри КС ($|y - y_k| < \Delta y_k$) совпадают по виду с (15); граничным условием служит разложение $\tilde{\psi}$ (16) при $|y - y_k| \rightarrow 0$, представленное в переменных $\eta_k = z_k/\mu$ ($\tilde{\psi} \rightarrow \psi_{iN}(|\eta_k| \rightarrow \infty)$).

Для $y_s \sim \mu$ (КС лежит на стенке) условия при $y = 0$ ($\eta_s = -y_s/\mu$) не допускают разделения на «отклики» (6) и вместо сращивания с $\tilde{\psi}$ при $\eta \rightarrow -\infty$ должны записываться в общем виде: $\psi_{iN} = \partial \psi_{iN} / \partial \eta = 0$ ($y = 0$).

Рассмотренная выше итерационная процедура носит самосогласованный характер и позволяет в результате решения системы (7), (12), (15), (17) описать эволюцию плоских волновых возмущений с любой заданной точностью. Тип КС и его положение относительно стенки не накладывают ограничения на метод. Процедура легко обобщается на случай пространственно-временной эволюции трехмерных волн.

Эволюция однопериодического возмущения. Для иллюстрации метода, изложенного выше, и сопоставления с предшествующими результатами изучим более детально эволюцию изолированной волны.

Тогда $j = 1$ и из (2), (5) с учетом единственности КС получим

$$\psi = \sum_{s=0} \sum_{m=0} \mu^m \psi_s^{(m)} \exp(i\theta_s), \quad \frac{dA}{dt} = \sum_{m=1} \mu^m P^{(m)}, \quad (18)$$

$$\psi_s^{(m)} = f_s^{(m)} + \tilde{f}_s^{(m)}, \quad \alpha_s = s\alpha, \quad c_s = c, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим случай $\mu \ll y_1$ (КС асимптотически далек от стенки). Из (9) следует рекуррентная система:
при $m = 0$

$$Lf_1^{(0)} = 0, \quad \Gamma f_1^{(0)} = 0, \quad f_1^{(0)}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_1^{(0)}(t, 0) \neq 0; \quad (19)$$

при $m = 1$

$$Lf_1^{(1)} = Q_1^{(1)} \equiv \frac{iU''\varphi_{11}P^{(1)}}{\alpha(U-c)^2}, \quad \Gamma\psi_1^{(1)} = 0, \quad \psi_1^{(1)}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_1^{(0)} + \frac{\partial}{\partial y} \mu w_1^{(1)} = 0 \quad (y = 0); \quad (20)$$

$$Lf_2^{(1)} = Q_2^{(1)} = i\varepsilon_1 \frac{J_2^{(1)}}{2\alpha(U-c)}, \quad \Gamma f_2^{(1)} = 0, \quad f_2^{(1)}(t, 0) = 0. \quad (21)$$

Возникающая в этом порядке разложения поправка к среднему течению $f_0^{(1)}$ находит определение только в следующем приближении (так как $J_0^{(1)} = \alpha_0 \equiv 0$).

При $m = 2$

$$Lf_1^{(2)} = \frac{i}{\alpha(U-c)} \left\{ P^{(2)} \frac{U''\varphi_{11}}{U-c} + \frac{\partial \Delta}{\mu \partial t} \psi_1^{(1)} - \varepsilon_1 J_1^{(2)} - \Delta \frac{\nu A \varphi_{11} U''}{U-c} \right\},$$

$$\Gamma \psi_1^{(2)} = 0, \quad \psi_1^{(2)} = \frac{\partial}{\partial y} (f_1^{(1)} + \Phi_1^{(1)} + \mu w_1^{(2)}) = 0 \quad (y = 0), \quad (22)$$

$$J_1^{(2)} = J_{10}(f_0^{(1)}, f_1^{(0)}) + J_{2-1}(f_2^{(1)}, f_{-1}^{(0)}), \quad f_s = f_{-s};$$

$$Lf_2^{(2)} = \frac{i}{2\alpha(U-c)} \left\{ \frac{\partial \Delta}{\mu \partial t} f_2^{(1)} - \nu \Delta^2 f_2^{(1)} - \varepsilon_1 J_2^{(2)} \right\}, \quad (23)$$

$$\Gamma f_2^{(2)} = 0, \quad \psi_2^{(2)} = \frac{\partial}{\partial y} (f_2^{(1)} + \Phi_2^{(1)} + \mu w_2^{(2)}) = 0 \quad (y = 0);$$

$$Lf_3^{(2)} = \frac{i\varepsilon_1}{3\alpha(U-c)} J_3^{(2)}, \quad \Gamma f_3^{(2)} = 0, \quad f_3^{(2)}(t, 0) = 0. \quad (24)$$

Уравнение для $f_0^{(1)}$ вытекает из требования $Q_0^{(2)} < \infty$ и может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\mu \partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_0^{(1)} = \varepsilon_1 J_0^{(2)} \simeq \varepsilon_1 \frac{d|A|^2}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U''|\varphi_{11}|^2}{(U-c)^2} \right), \quad (25)$$

где учтено $Lf_1^{(1)} = Lw_1^{(1)} \ll Q_1^{(1)} \quad (y \gg 0)$. Из (25) при $y \gg (t/\text{Re})^{1/2}$ получим выражение

$$\frac{\partial}{\partial y} f_0^{(1)} = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} |A|^2 \frac{U''|\varphi_{11}|^2}{(U-c)^2} + \text{const},$$

представляющее асимптотику $f_0^{(1)}$ при $y \rightarrow \infty$.

Поправка $f_0^{(2)}$ определяется из аналогичных соображений в уравнениях $\sim \mu^3$. Проблема нахождения ψ_0 в случае изолированного КС рассматривалась в [11, 12].

Таким образом, решение вне КС с точностью до $O(\mu^3)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & \Psi + \varepsilon A \varphi_{11} e^{i\theta_1} + \varepsilon \mu \{ (f_1^{(1)} + w_1^{(1)} + B_1^{(1)} \varphi_{11} + D_1^{(1)} \varphi_{21}) e^{i\theta_1} + f_2^{(1)} e^{2i\theta_1} + f_0^{(1)} \} + \\ & + \varepsilon \mu^2 \{ (f_1^{(2)} + w_1^{(2)} + B_1^{(2)} \varphi_{11} + D_1^{(2)} \varphi_{21}) e^{i\theta_1} + (f_2^{(2)} + w_2^{(2)} + B_2^{(2)} \varphi_{12} + \\ & + D_2^{(2)} \varphi_{22}) e^{2i\theta_1} + (f_0^{(2)} + w_0^{(2)} + \Phi_0^{(2)}) + f_3^{(2)} e^{3i\theta_1} \} + O(\varepsilon \mu^3), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$f_s^{(m)} = V_s^{-1} \left(\varphi_{1s} \int_0^y \varphi_{2s} Q_s^{(m)} dy - \varphi_{2s} \int_0^y \varphi_{1s} Q_s^{(m)} dy \right)$$

(см. (10)); $w_s^{(m)}$, $B_s^{(m)}$, $D_s^{(m)}$, $\Phi_0^{(m)}$ определяются в результате решения внутренних уравнений (15), (17). При этом из (14) следует амплитудное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A = & \mu \left\{ \int_0^{y_\infty} \frac{U'' |\varphi_{11}|^2 dy}{i\alpha(U-c)} \right\}^{-1} \left\{ \Delta D_1^{(1)} - w_1^{(1)}(t, 0) + \mu \left(\Delta D_1^{(2)} - w_1^{(2)}(t, 0) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^{y_\infty} \frac{i\varphi_{11}}{\alpha(U-c)} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial t} \psi_1^{(1)} - \nu \Delta \frac{U'' \varphi_{11} A}{U-c} - \varepsilon_1 J_1^{(2)} \right) dy \right) + O(\mu^2) \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Члены под знаком интеграла обуславливают вклад эффектов, внешних для КС областей. Для определения внутренних решений ψ_{iN} в КС используем стандартную процедуру метода сращиваемых разложений. С этой целью раскладываем $\tilde{\psi}$ (26) в ряд при $|z| = |y - y_1| \ll 1$, переходим к внутренним переменным $\eta = z/\mu$ и собираем члены одного порядка по параметру μ .

Получим выражение, служащее граничным условием для (15):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & \mu C \eta + \mu^2 \frac{U_c'}{2} \eta^2 + \mu^3 \frac{U_c'' \eta^3}{6} + \dots - \frac{\varepsilon A}{U_c'} e^{i\theta_1} \left\{ 1 + \left(\frac{U_c''}{U_c'} \eta - \sigma \right) \mu \ln \Lambda + \right. \\ & + \mu \left(\frac{U_c''}{U_c'} \eta \ln |\eta| + \eta \left(\frac{1}{y_1} - g_1 \right) + \frac{U_c'}{A} B_1^{(1)} - \sigma \ln |\eta| - \sigma - \frac{U_c' w_1^{(1)}}{A} \right) + \\ & + \mu^2 \ln \Lambda \left(\frac{U_c'' B_1^{(1)}}{A} - \sigma \left(\frac{3}{2} \frac{U_c''}{U_c'} + g_1 - \frac{1}{y_1} \right) \right) \eta + \mu^2 \left(g_1' \eta^2 - \frac{U_c'}{A} D_1^{(1)} \eta - \frac{\sigma}{2} \eta - \right. \\ & \left. - B_1^{(1)} \frac{U_c''}{A} \eta \ln |\eta| + \frac{U_c'}{A} B_1^{(1)} \left(\frac{1}{y_1} - g_1 \right) - \sigma \eta \ln |\eta| \left(\frac{3}{2} \frac{U_c''}{U_c'} + g_1 - \frac{1}{y_1} \right) \right) \} + O(\varepsilon^2 \mu, \nu \mu). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $\Lambda = \mu/y_1$; $\sigma = (iU_c''/\alpha U_c'^3)(dA/Adt)$; $U_c = U(y_1)$; $B_1^{(1)}$, $D_1^{(1)}$ могут принимать разные значения выше и ниже КС. Тогда решение ψ_{iN} для внутреннего уравнения (15) представим в виде

$$\psi_{iN} = \mu^2 (\chi_1 + \mu \ln \mu \chi_2 + \mu \chi_3 + \mu^2 \ln \mu \chi_4 + \dots), \quad (29)$$

где $\chi_1 = U_c' \eta^2 / 2 - \varepsilon A \exp(i\theta_1) / (\mu^2 U_c')$; $\chi_2 = \varepsilon A \exp(i\theta_1) / (\mu^2 U_c') (\sigma - \eta U_c'' / U_c')$; χ_3 определяется из уравнения

$$L\chi_3 \equiv \left\{ \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + U_c' \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + 2 \frac{\varepsilon \alpha}{\mu^2 U_c'} \operatorname{Im} (A \exp(i\alpha \xi)) \frac{\partial}{\partial \eta} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \chi_3 = 0 \quad (30)$$

$$\left(\chi_3 = \frac{U_c'' \eta^3}{6} - \frac{\varepsilon A \exp(i\theta_1)}{U_c' \mu^2} \left\{ \ln |\eta| \left(\frac{U_c''}{U_c'} \eta - \sigma \right) + \eta \left(\frac{1}{y_1} - g_1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{U_c' B_1^{(1)}}{A} - \sigma - \frac{w_1^{(1)} U_c'}{A} \right\} \quad (|\eta| \rightarrow \infty), \quad \xi = x - ct \right).$$

Эффективность вкладов нестационарных, нелинейных и вязких эффектов, определяющая тип КС, обусловлена относительной величиной соответствующих членов $(\gamma/\mu, \varepsilon/\mu^2, \lambda)$.

Учитывая структуру граничных условий (30), легко получить $\Delta B_1^{(1)} = 0$. Причем величина

$$B_1^{(1)} = \text{Im } B_1^{(1)} = -\frac{d}{dt} A \frac{1}{\alpha U_c'} \left(\frac{U_c''}{U_c'} + \frac{1}{y_1} - g_1 \right) \quad (31)$$

может быть найдена без решения внутренней задачи в результате интегрирования уравнения (30) по η . В следующем приближении

$$\chi_4 = \frac{\varepsilon}{\mu^2} \frac{U_c'' A \exp(i\theta_1)}{U_c'} \eta \left(\sigma \left(\frac{3}{2} \frac{U_c''}{U_c'} + g_1 - \frac{1}{y_1} \right) - \frac{B_1^{(1)}}{A} \right). \quad (32)$$

Решение χ_5 находим из уравнения

$$L\chi_5 = -iU_c' \eta \varepsilon A \alpha / \mu^2 \quad \left(\chi_5 = -\frac{\varepsilon A}{\mu^2 U_c'} \exp(i\theta_1) \left\{ g_1' \eta^2 - \frac{U_c'}{A} D_1^{(1)} \eta + B_1^{(1)} \frac{U_c''}{A} \eta \ln |\eta| + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{U_c'}{A} B_1^{(1)} \eta \left(\frac{1}{y_1} - g_1 \right) - \frac{\sigma \eta}{2} - \sigma \eta \ln |\eta| \left(\frac{3}{2} \frac{U_c''}{U_c'} + g_1 - \frac{1}{y_1} \right) \right\} + \frac{U_c''' \eta^3}{6} \right). \quad (33)$$

При этом, используя (28), $\Delta D_1^{(1)} \neq 0$ можно выразить через интеграл от завихренности в КС:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\psi}(t, x, \infty) - \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{\psi}(t, x, -\infty) \right\rangle = \varepsilon \mu^2 \wedge D_1^{(1)} = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega d\eta \right\rangle, \quad (34)$$

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\theta, \quad \Omega = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \psi_{iN}.$$

Представление (34) справедливо при условии, что $w^{(1)}$ не вносит вклада в величину скачка $\partial \tilde{\psi} / \partial \eta$ в КС. Последнее явно следует из уравнения (17), которое при $y \rightarrow y_1$ автоматически преобразуется в (30): $L \partial^2 w^{(1)} / \partial \eta^2 = 0$. Заметим, что для $\partial^2 w^{(1)} / \partial \eta^2$ при $y \rightarrow 0$ происходит смена характерного масштаба ПС ($U_c' \eta \rightarrow -U_c' y_1 / \mu$) и инерционные и вязкие члены (17) оказываются сравнимыми: $U_c' y_1 \partial^2 w^{(1)} / \partial y^2 \sim \lambda \mu \partial^4 w^{(1)} / \partial y^4$ при $y \sim \text{Re}^{-1/2}$. При этом нелинейность может быть существенной лишь при $\varepsilon A \sim 1$:

$$\varphi_{11} \sim y, \quad U_c' y_1 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} \sim \varepsilon A y \frac{\partial^3 w^{(1)}}{\partial y^3}.$$

Максимальный вклад этого эффекта в распределение $w^{(1)}$ осуществляется внутри КС и убывает на его периферии $\sim \eta^{-1/2}$. Учет влияния области $y \sim y_1$ на $w_1^{(1)}$ даже при $\mu \ll y_1$ может быть существенным [14]. В случае, когда $y_1 \gg \mu \gg \text{Re}^{-1/2}$, влиянием КС

на формирование $w^{(1)}$ можно пренебречь и уравнение (17) при $\eta > -\Lambda$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 w_1^{(1)}}{\partial \eta^2} \sim \eta^{-1/4} \exp \left((i+1) \int_0^\eta (\eta \operatorname{Re})^{1/2} d\eta \right). \quad (35)$$

При ограничениях (34), (35) выражение для инкремента (27) совпадает с полученным в [8, 10]. Легко также показать связь предлагаемого метода с моделью «податливой стенки» [8, 9, 14]. Обозначив $F = A\varphi_{11} + \mu(f_1^{(1)} + \Phi_1^{(1)})$, с учетом $\Delta w_1^{(1)} \approx \partial^2 w_1^{(1)} / \partial y^2 + O(\alpha^2)$ из граничных условий при $y = 0$

$$F + \mu w_1^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} F + \mu \frac{\partial}{\partial y} w_1^{(1)} = O(\mu) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} w_1^{(1)} \sim \mu^{-1} \right)$$

получим

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y} \simeq \frac{\partial w_1^{(1)}}{w_1^{(1)} \partial y} = \int_0^\infty \Delta w_1^{(1)} dy / \int_0^\infty \int_0^\infty \Delta w_1^{(1)} dy dy. \quad (36)$$

Выражение (36) совпадает с принятым в [9, 14] с точностью до обозначений. Точность такой модели может быть оценена на основе предлагаемого метода.

До сих пор рассматривался случай изолированного КС ($\Lambda \ll 1$). При $\Lambda \sim 1$ область потока в окрестности стенки ($y \leq y_1$) не является внешней. Решения в ней должны строиться в рамках внутренних уравнений (15) с граничными условиями $\psi_{iN} = \partial \psi_{iN} / \partial \eta = 0$ ($\eta = -\Lambda^{-1}$) и (28) ($\eta \rightarrow \infty$). С учетом $\Lambda \sim 1$ разложение (28) приобретает форму степенного ряда (члены $\sim \mu^n \ln \mu$ выпадают):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} = & \mu C \eta + \mu^2 \left\{ \frac{U_c'}{2} \eta^2 - \frac{\varepsilon A \exp(i\theta_1)}{\mu^2 U_c'} (1 + \Lambda \eta) \right\} + \mu^3 \left\{ \frac{U_c'' \eta^3}{6} - \frac{\varepsilon A \exp(i\theta_1)}{\mu^2 U_c'} \left[\left(\frac{U_c''}{U_c'} \eta - \sigma \right) \ln \Lambda + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{U_c''}{U_c'} \eta \ln |\eta| - g_1 \eta + (1 + \Lambda \eta) \frac{U_c'}{A} B_1^{(1)} - \sigma (1 + \Lambda \eta) \ln |\eta| - \sigma - \frac{U_c'}{A} w_1^{(1)} + \sigma \eta \Lambda \ln |\Lambda| \right] \right\} + \\ & + O(\mu^4) = \sum_{n=1} \mu^n \tilde{\psi}_n \end{aligned} \quad (37)$$

($w_1^{(1)}$ — экспоненциально затухающая функция). Решение внутренней задачи (15) ищем в виде

$$\psi_{iN} = \mu^2 (\chi_1 + \mu \chi_2 + \mu^2 \chi_3 + \dots). \quad (38)$$

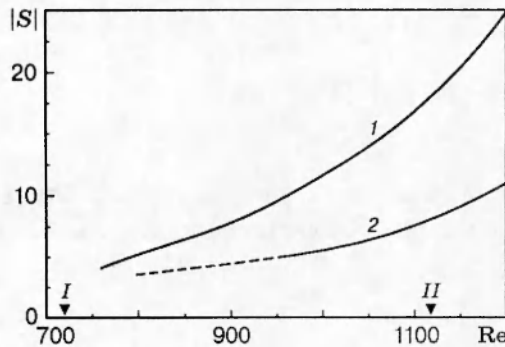
Роль условия разрешимости играет первое из равенств (14), которое устанавливает связь операторов $P^{(m)}$ с функциями на внешней границе пограничного слоя.

Из (37), (38) находим

$$\chi_1 = \frac{U_c'}{2} \eta^2 - \frac{\varepsilon A \exp(i\theta_1)}{\mu^2 U_c'} (1 + \Lambda \eta), \quad F^{(1)} = -\frac{\varepsilon A \exp(i\theta_1)}{\mu^2 U_c'} (1 + \Lambda \eta). \quad (39)$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_1 \chi_2 \equiv & \left\{ \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + U_c' \eta \frac{\partial}{\partial \xi} + 2 \frac{\varepsilon \alpha}{\mu^2 U_c'} \operatorname{Im} (A \exp(i\alpha \xi)) (1 + \Lambda \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right\} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \eta^2} = 0, \\ \chi_2 = & \frac{U_c'' \eta^3}{6} + w^{(2)} + F^{(2)}, \end{aligned} \quad (40)$$



Зависимость коэффициентов параметрической связи $|S|$ от Re в случае первичных линейной 1 и нелинейной 2 волн: $\omega_1/Re = 115 \cdot 10^{-6}$; $\beta/\alpha_L \approx 2$; I, II — положение ветвей кривой нейтральной устойчивости первичной волны

где $F^{(2)} + w^{(2)} = \partial F^{(1)}/\partial \eta + \mu \partial w^{(2)}/\partial \eta = 0$ ($\eta = -\Lambda$); $\chi_2 \rightarrow \tilde{\psi}_3$ ($\eta \rightarrow \infty$); $\tilde{\psi}_3$ — члены (38) при μ^3 .

В следующем порядке по μ

$$L_1 \chi_3 = 0, \quad \chi_3 = F^{(3)} + w^{(3)} + \frac{U''' \eta^4}{24}. \quad (41)$$

Здесь $F^{(3)} + w^{(3)} = \partial F^{(2)}/\partial \eta + \mu \partial w^{(3)}/\partial \eta = 0$ ($\eta = -\Lambda$); $\chi_3 \rightarrow \tilde{\psi}_4$ ($\eta \rightarrow \infty$).

Принцип построения решений при $\Lambda \gg 1$ и $\Lambda \sim 1$ один и тот же и основан на различии скоростей изменения функций $F^{(m)}$ и $w^{(m)}$ в КС. При $y_1 \sim \mu$, как уже отмечалось, разделение $F^{(m)}$ на $\tilde{f}^{(m)}$ и $\tilde{\psi}^{(m)}$ в этой области становится невозможным. Следует подчеркнуть, что в линейном приближении (случай слоя l_ν) решение, получаемое на основе (37)–(41), соответствует найденному в [15] методом прямого разложения. При этом искусственное исключение членов $\sim \mu^n \ln \mu$, необходимое при анализе [15], данной процедурой осуществляется автоматически.

Параметрическое усиление субгармоник. Вид КС определяет эволюцию волновых возмущений и вследствие различий в поперечной структуре вихревого поля влияет на эффективность взаимодействия различных компонент спектра. Определяющим механизмом ЛТП при малых начальных интенсивностях колебаний (S -переход) является параметрическое возбуждение низкочастотных фоновых пульсаций. Резонанс в триаде, включающей первичную двумерную волну и пару пространственно-симметричных субгармонических волн, определяет доминирующий механизм S -перехода [2–5]. Представляет интерес, как влияет формирование нелинейного КС на интенсивность резонанса. Для выяснения этого вопроса рассмотрим задачу о параметрическом взаимодействии субгармонических волн в потоке с $\tilde{\psi}$, определяемой уравнениями (1), (18). Используем метод осреднения [2, 5]. Поле скоростей ищем в виде

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{\psi}, -\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}, 0 \right) + \varepsilon_2 (v_1, v_2, v_3) b(t) \exp(i\theta_L) \cos \beta z, \quad (42)$$

$$\frac{db}{dt} = \gamma_L b + \varepsilon S_L b^*, \quad \theta_L = \alpha_L x - \omega_L t,$$

где с точностью до $O(\varepsilon_2, \varepsilon)$ ($\varepsilon \gg \varepsilon_2$) $\{v_i\}$ удовлетворяют трехмерной системе Орра — Зоммерфельда; $\omega_L + i\gamma_L = \omega(\alpha_L, \pm\beta)$.

Коэффициент $|S| = |S_L/A|$ характеризует интенсивность параметрической связи вблизи резонанса $\omega_1 = 2\omega_L$, $\alpha_1 \approx 2\alpha_L$ и выражается через решения ψ_1 и $\{v_i\}$ [2], рассчитанные с учетом поправки ψ_0 среднего профиля потока (18). Результаты численного определения $|S|$ при различных Re в случае существенно нелинейного ($(\lambda, \gamma/\mu) \ll \varepsilon A/\mu^2$) и квазилинейного ($\lambda \geq \gamma/\mu \gg \varepsilon A/\mu^2$) КС, асимптотически далеких от стенки ($y_1 \gg \mu$), представлены на рисунке. Структура нелинейного КС при этом соответствует рассмотренному в [7] при

анализе установившихся нелинейных волн ($A = \text{const}$). Сравнение с [7] при равновесных значениях A использовалось при расчетах в качестве теста. Приведенная зависимость для нелинейной первичной волны (см. рисунок, кривая 2) справедлива при параметрах α_1, Re в окрестности верхней ветви нейтральной кривой линейной теории устойчивости. Штриховая часть линии 2 представляет формальную аппроксимацию в область, где $\Lambda \sim 1$.

Данные вычислений указывают на заметное уменьшение коэффициентов связи и, следовательно, скорости параметрического возбуждения фоновых субгармоник при выходе на режим нелинейного КС. С учетом эффектов интенсивной генерации высших гармоник и искажения среднего движения, имеющих место в нелинейном режиме, полученный результат свидетельствует в пользу гипотезы [2, 5] о связи сценария ЛТП в пограничном слое с режимом КС. Действительно, согласно оценкам слабонелинейной теории, типичные значения $\alpha \sim 10^{-1}$, $\text{Re} \sim 10^4$, $|S| \sim 10$ дают пороговое значение амплитуды $\tilde{A}_x \sim 10^{-3}$, при которой вклад вязких и нестационарных эффектов оказывается соизмеримым: $l_\nu \simeq (\alpha \text{Re})^{-1/3} \sim l_t \simeq A_x |S| / \alpha$. При этом $l_N \sim 10^{-3/2} < l_t$, и выход в режим нелинейного КС возможен лишь при $\epsilon A > A_x$ на более поздних этапах развития. Задание начальной амплитуды вблизи порога нелинейного КС ($\tilde{A}_N \sim 10^{-2}$) способно качественно видоизменить последующую картину ЛТП в силу уменьшения скоростей резонансного роста низкочастотных пульсаций, ведущего к увеличению времени выхода на взрывной режим. Согласно экспериментам [3], превышение начальной амплитуды $\tilde{A}$ порога $A_N \sim 10^{-2}$ действительно соответствует условиям реализации K -перехода, что согласуется с полученной оценкой.

В заключение сформулируем основные выводы.

- Разработана новая процедура решения задачи об эволюции волновых возмущений в потоках типа пограничного слоя, универсально пригодная в условиях линейной и слабонелинейной эволюции и для интенсивных (недоступных слабонелинейной теории) уровней пульсаций.

- Подход обобщает результаты по теории развития возмущений на случай произвольного типа и положения КС относительно твердой стенки. Учитывается волновое взаимодействие.

- Проведены расчеты коэффициентов связи, которые определяют скорость параметрического усиления субгармонических трехмерных колебаний. Обнаружено уменьшение инкрементов роста этих колебаний при их взаимодействии с нелинейной первичной волной по сравнению с линейной.

- На основе указанного результата и аналитических оценок пороговых параметров трансформации режимов КС впервые делается вывод о непосредственной связи последних со сценариями ЛТП в пограничном слое. В этом контексте S -переход соответствует слабонелинейному режиму, тогда как K -переход обусловливается формированием нелинейного КС доминирующей волны.

- Приведенная процедура построения эволюционных уравнений для двумерных пространственно-периодических возмущений может быть обобщена на случай пространственно-временного развития трехмерных волн. Основное ограничение метода, по-видимому, связано с требованием фиксированности положения КС в процессе эволюции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант N93-2492) и проводилась в рамках исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuart T. Instability of flows and their transition to turbulence // ZFW. 1986. V. 10.

- Р. 379–383.
2. **Зельман М.Б.** Развитие нелинейных возмущений в пограничном слое Блазиуса // Модели механики неоднородных систем. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1989. С. 117–135.
 3. **Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарик В. С.** Образование трехмерных структур при переходе в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 42–46.
 4. **Corke T. C., Mangano R. A.** Resonant growth of three-dimensional modes in transitioning Blasius boundary layer // J. Fluid Mech. 1989. V. 209. P. 93–117.
 5. **Зельман М. В., Масленникова И. И.** О формировании пространственной структуры субгармонического режима перехода в потоке Блазиуса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 35–39.
 6. **Benney D. J., Bergeron R. F.** A new class of nonlinear waves in parallel flows // Stud. Appl. Math. 1969. V. 48, N 3. P. 181–204.
 7. **Haberman R.** Critical layers in parallel flows // Stud. Appl. Math. 1972. V. 51, N 2. P. 139–161.
 8. **Реутов В. П.** Нестационарный критический слой и нелинейная стадия развития неустойчивости в плоском течении Пуазейля // ПМТФ. 1982. № 4. С. 43–54.
 9. **Жигулев В. Н., Тумин А. М.** Возникновение турбулентности. Новосибирск: Наука, 1987.
 10. **Зельман М. Б.** Развитие возмущений конечной интенсивности в плоскопараллельных потоках. Новосибирск, 1981 (Препр. / ИТПМ СО АН СССР; N10–81).
 11. **Huerre P., Scott J.** Effects of critical layer structure on the nonlinear evolution of waves in free shear layers // Proc. Roy. Soc. London. 1980. V. A317, N 1747. P. 509–524.
 12. **Churilov S. M., Shukhman I. G.** Nonlinear stability of a stratified shear flow in the regime with an unsteady critical layer // J. Fluid Mech. 1988. V. 194. P. 187–216.
 13. **Goldstein M. E., Leib S. J.** Nonlinear roll-up of externally excited free shear layers // J. Fluid Mech. 1988. V. 191. P. 481–515.
 14. **Реутов В. П.** Нелинейные волны и стабилизация двумерной неустойчивости в пограничном слое // ПМТФ. 1985. № 4. С. 35–42.
 15. **Graebel W. P.** On determination of the characteristic equations for the stability of parallel flows // J. Fluid Mech. 1966. V. 24, pt 3. P. 497–508.

Поступила в редакцию 18/IV 1996 г.
