4. *Iwan W. D.* A distributed-element model for hysteresis and its steady state dynamic response.— «Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.», 1966, vol. 33, N 4, p. 893. Русский перевод: Айвен. «Распределенная» модель гистерезисных явлений и ее поведение при установившихся вынужденных колебаниях. М., «Мир», 1966.
5. *Блаквер О.* Анализ нелинейных систем. М., «Мир», 1969.
6. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
8. *Ван Трис Г.* Синтез оптимальных нелинейных систем управления. М., «Мир», 1964.
9. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. 10-е изд. М., «Наука», 1971.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
11. *Блитштейн Ю. М., Мешков С. И., Чебан В. Г.* К определению параметров релаксационного спектра при вынужденных колебаниях наследственно-упругого осциллятора. Прикладная математика и программирование. Кишинев, изд. АН МССР, 1970, вып. 3, с. 3.
12. *Мешков С. И., Шермергор Т. Д., Постников В. С.* Вынужденные колебания стандартного линейного тела.— В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Киев, «Наукова думка», 1966.
13. *Забрейко П. П. и др.* Интегральные уравнения. Сер. Справочная и математическая библиотека. М., «Наука», 1968.

УДК 539.374

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

В. М. Мирсалимов

(Липецк)

Для предотвращения концентрации напряжений представляет интерес отыскание контура тела, который не имеет каких-либо предпочтительных для хрупкого разрушения или пластической деформации участков. Такой контур называется «равнопрочным».

Рассматривается плоская задача об отыскании «равнопрочной» формы отверстия в анизотропной среде. Критерием, определяющим «равнопрочную» форму отверстия, служит условие отсутствия концентрации напряжений на контуре отверстия.

Обратная задача теории упругости для изотропной среды была решена в работе [1].

Рассмотрим задачу об определении «равнопрочного» контура отверстия в анизотропной среде, находящейся в однородном поле напряжений

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Пусть на неизвестном контуре отверстия L приложены постоянная нормальная нагрузка и равная нулю касательная

$$\sigma_n = -p, \quad \tau_{tn} = 0 \tag{1}$$

(t и n — направления касательной и нормали к L).

Требуется, чтобы во всех точках неизвестного контура L выполнялось соотношение

$$\sigma_t=\sigma_*=\text{const}. \tag{2}$$

Постоянная σ_* подлежит определению в процессе решения задачи.

Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} в плоской задаче теории упругости анизотропного тела определяются через две аналитические функции $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\,\mathrm{Re}\left[s_1^2\varphi'(z_1)+s_2^2\psi'(z_2)\right];\\ \sigma_y &= 2\,\mathrm{Re}\left[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)\right];\\ \tau_{xy} &= -2\,\mathrm{Re}\left[s_1\varphi'(z_1)+s_2\psi'(z_2)\right],\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\varphi'(z_1)=\frac{d\varphi(z_1)}{dz_1};\quad \psi'(z_2)=\frac{d\psi(z_2)}{dz_2};\quad z_1=x+s_1y;$$

$$z_2=x+s_2x,\quad \text{а}\quad s_1=\alpha_1+i\beta_1\quad \text{и}\quad s_2=\alpha_2+i\beta_2$$

являются корнями уравнения $a_{11}s^4-2a_{16}s^3+(2a_{12}+a_{66})s^2-2a_{26}s+a_{22}=0$ (a_{jk} — упругие постоянные).

Наряду с заданной плоскостью $z=x+iy$ будем рассматривать плоскости z_1 и z_2, получаемые из плоскости z с помощью аффинного преобразования

$$z_1=x+s_1y=x_1+iy_1;\quad z_2=x+s_2y=x_2+iy_2.$$

При этом преобразовании неизвестный контур переходит в контуры L_1 и L_2 на плоскости z_1 и z_2. Граничные условия для аналитических функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ при заданных внешних усилиях (1), (2) можно представить в виде [2,3]:

$$(1+is_1)\varphi(z_1)+(1+i\bar{s}_1)\overline{\varphi(z_1)}+(1+is_2)\psi(z_2)+(1+i\bar{s}_2)\overline{\psi(z_2)}=-pz+\text{const}; \tag{4}$$

$$\left(1+s_1^2\right)\varphi'(z_1)+\left(1+\bar{s}_1^2\right)\overline{\varphi'(z_1)}+\left(1+s_2^2\right)\psi'(z_2)+\left(1+\bar{s}_2^2\right)\overline{\psi'(z_2)}=\frac{1}{2}(\sigma_*-p). \tag{5}$$

Функции $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ на бесконечности ведут себя следующим образом:

$$\varphi(z_1)=B^*z_1+0\left(\frac{1}{z_1}\right);\quad \psi(z_2)=B_1^*z_2+0\left(\frac{1}{z_2}\right),$$

где

$$B^*=\frac{\sigma_x^\infty+\left(\alpha_2^2+\beta_2^2\right)\sigma_y^\infty}{2\left[(\alpha_2-\alpha_1)^2+\left(\beta_2^2-\beta_1^2\right)\right]};\quad B_1^*=B^{1*}+iC^*;$$

$$B^{1*}=\frac{\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)\sigma_y^\infty-2\alpha_1\alpha_2\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty}{2\left[(\alpha_2-\alpha_1)^2+\left(\beta_2^2-\beta_1^2\right)\right]};$$

$$C^*=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\sigma_x^\infty+\left[\alpha_2\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)-\alpha_1\left(\alpha_2^2-\beta_2^2\right)\right]\sigma_y^\infty}{2\left[(\alpha_2-\alpha_1)^2-\left(\beta_2^2-\beta_1^2\right)\right]\beta_2}.$$

Постоянную в правой части соотношения (4) можно положить равной нулю.

Перейдем на параметрическую плоскость ζ при помощи преобразования $z=\omega(\zeta)$:

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^{-k}\right).$$

Аналитическая функция $\omega(\zeta)$ осуществляет конформное преобразование внешности единичного круга плоскости ζ на внешность контура L физической плоскости z.

При этом функции $z_1=\omega_1(\zeta)$ и $z_2=\omega_2(\zeta)$ осуществляют соответственно конформное преобразование внешности единичного круга плоскости ζ на внешность контуров L_1 и L_2, причем точкам M, M_1 и M_2 контуров L, L_1 и L_2, находящимся в аффинном соответствии, соответствует одна точка на контуре единичного круга. Обозначим $\varphi(\zeta)=\varphi[\omega_1(\zeta)]$, $\psi(\zeta)=\psi[\omega_2(\zeta)]$;

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega_1'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega_2'(\zeta)}.$$

На основании граничных условий (4), (5) для определения трех аналитических функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ получаем нелинейную краевую задачу при $|\zeta|=1$:

$$(1+is_1)\,\varphi(\zeta) + (1+i\bar{s}_1)\,\overline{\varphi(\zeta)} + (1+is_2)\,\psi(\zeta) + (1+i\bar{s}_2)\,\overline{\psi(\zeta)} = -p\omega(\zeta); \tag{6}$$

$$\left(1+s_1^2\right)\Phi(\zeta) + \left(1+\bar{s}_1^2\right)\overline{\Phi(\zeta)} + \left(1+s_2^2\right)\Psi(\zeta) + \left(1+\bar{s}_2^2\right)\overline{\Psi(\zeta)} = \frac{1}{2}(\sigma_* - p). \tag{7}$$

Применяя метод функциональных уравнений [4], найдем решение краевой задачи (6), (7):

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \frac{R}{2}(1+c_1-is_1+is_2c_1)B^*\zeta + \frac{R}{2i(s_2-s_1)\zeta}\times \\ &\times\left\{(1-is_2)c_1p - \left[i\left(s_2-\bar{s}_1\right)\left(1+c_1+i\bar{s}_1-i\bar{s}_1c_1\right)B^* + \right.\right.\\ &\left.\left.+\, i\left(s_2-\bar{s}_2\right)\left(1+c_1+i\bar{s}_2-i\bar{s}_2c_1\right)\bar{B}_1^* + p(1+is_2)\right]\right\} = a_1\zeta + \frac{a_{-1}}{\zeta};\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\psi(\zeta) &= \frac{R}{2}(1+c_1-is_2+is_2c_1)B^*\zeta + \frac{R}{2i(s_1-s_2)\zeta}\times \\ &\times\left\{(1-is_1)pc_1 - \left[i\left(s_1-\bar{s}_1\right)\left(1+c_1+i\bar{s}_1-i\bar{s}_1c_1\right)B^* + \right.\right.\\ &\left.\left.+\, i\left(s_1-\bar{s}_2\right)\left(1+c_1+i\bar{s}_2-i\bar{s}_2c_1\right)\bar{B}_1^* + p(1+is_1)\right]\right\} = b_1\zeta + \frac{b_{-1}}{\zeta};\end{aligned} \tag{9}$$

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{c_1}{\zeta}\right), \quad \sigma_* = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty + p. \tag{10}$$

Постоянная c_1 определяется из алгебраического уравнения

$$\begin{aligned}&\left(1+s_1^2\right)(1+c_1-is_2+is_2c_1)\left[(1+c_1+is_1-is_1c_1)B^* - 2a_{-1}\right] + \\ &+\left(1+s_2^2\right)(1+c_1-is_1+is_1c_1)\left[(1+c_1+is_2-is_2c_1)\ddot{B}_1 - \right.\\ &\left.-\, 2b_{-1}\right] = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Соотношение (11) значительно упрощается, когда $s_1=i\beta_1$, $s_2=i\beta_2$. В этом частном случае (11) принимает вид:

$$A_1c_1^2+A_2c_1+A_3=0;\quad A_1=(1-\beta_1)(1-\beta_2)\left(\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty\right);$$
$$A_2=A_1+(1+\beta_1)(1+\beta_2)\left(2p+\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty\right);$$
$$A_3=(1+\beta_1)(1+\beta_2)\left(\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty\right). \tag{12}$$

Полагая в (12) $\beta_1=\beta_2=1$, найдем c_1 в случае изотропного тела

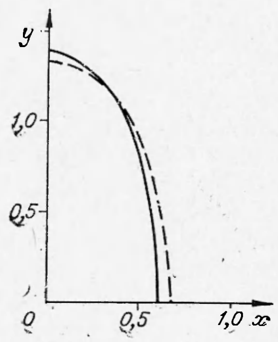
$$c_1=\frac{\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty}{-2p-\sigma_x^\infty-\sigma_y^\infty}.$$

«Равнопрочные» контуры отверстия (10) представляют собой семейство подобных эллипсов

$$\frac{x^2}{(1+c_1)^2}+\frac{y^2}{(1-c_1)^2}=R^2.$$

Напряженное состояние определяется по формулам (3), в которые надо подставить соотношения (8), (9), заменив в них предварительно ζ соответственно на $\zeta_1=\zeta_1(z_1)$ и $\zeta_2=\zeta_2(z_2)$, получаемые обращением формул $z_1=\omega_1(\zeta)$ и $z_2=\omega_2(\zeta)$.

На фигуре изображена четверть искомого контура при $p=0$, $\sigma_x^\infty=0{,}5\,\sigma_y^\infty$, когда пластинка изготовлена из авиационной фанеры с упругими постоянными [2]



$$a_{11}=\frac{1}{E_x}=0{,}83333\,\frac{10^{-9}}{9{,}81};\quad a_{12}=\frac{\nu_x}{E_x}=$$
$$=-0{,}5917\,\frac{10^{-9}}{9{,}81};\quad a_{16}=0;$$
$$a_{22}=\frac{1}{E_y}=1{,}66667\,\frac{10^{-9}}{9{,}81};\quad a_{66}=\frac{1}{G_{xy}}=$$
$$=14{,}2857\,\frac{10^{-9}}{9{,}81};\quad a_{26}=0$$

и комплексными параметрами $s_1=4{,}11i$; $s_2=0{,}343i$.

Там же штриховой линией для сравнения приводится четверть контура для изотропной пластины.

Поступила 10 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей.— В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. Т. 1. М., «Наука», 1965.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев, «Наукова думка», 1968.
4. *Черепанов Г. П.* Краевые задачи с аналитическими коэффициентами.— «Докл. АН СССР», 1965, т. 161, № 2.