УДК 517.91

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВИДА $y'' = f(x, y)$

Л. В. Овсянников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Решена задача о классификации обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y'' = f(x, y)$ по допускаемым локальным группам Ли преобразований. На основе понятия эквивалентности составлен список "эталонных" уравнений. Описаны классы уравнений, допускающих однопараметрическую группу, получаемых из "эталонных" путем инвариантного расширения.

Ключевые слова: эквивалентность, допускаемые операторы, инвариантное расширение.

Введение. Проблема групповой классификации дифференциальных уравнений впервые была поставлена основателем теории непрерывных групп норвежским математиком Софусом Ли [1]. Им было начато решение задачи о групповой классификации обыкновенного уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ и доказано, что это уравнение допускает не более чем 8-параметрическую группу преобразований пространства $\mathbb{R}^2(x, y)$, причем максимум достигается, если и только если это уравнение эквивалентно линейному уравнению $y'' = \varphi(x)y' + \psi(x)y + \omega(x)$. В данной работе проблема групповой классификации таких уравнений решается в более простом случае, когда правая часть не зависит от первой производной. Это условие оказывается очень жестким и приводит к сравнительно небольшому перечню возможных видов уравнений.

Решение проблемы групповой классификации связано с понятием эквивалентности уравнений такого вида относительно преобразований. Рассматриваются гладкие, локально взаимно-однозначные отображения (преобразования) e: $(x, y, f) \to (x_1, y_1, f_1)$ пространства $\mathbb{R}^3(x, y, f)$, действующие по формулам

$$x_1 = F(x, y), \qquad y_1 = G(x, y), \qquad f_1 = H(x, y, f) \tag{1}$$

и удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial(x_1, y_1, f_1)}{\partial(x, y, f)} \equiv (F_x G_y - F_y G_x) H_f \neq 0. \tag{2}$$

Определение. Отображение e (1), (2) называется *преобразованием эквивалентности* (ПЭ) равенства $y'' = f$, если в результате его применения уравнение

$$y'' = f(x, y) \tag{3}$$

переходит в уравнение того же вида (здесь $y_1'' = d^2 y_1/dx_1^2$)

$$y_1'' = f_1(x_1, y_1). \tag{4}$$

При этом уравнения (3) и (4), а также функции $f(x, y)$ и $f_1(x_1, y_1)$ называются *эквивалентными*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00550).

Влияние понятия ПЭ на групповую классификацию определяется тем фактом, что *эквивалентные уравнения допускают подобные группы* [2], причем ПЭ является преобразованием подобия. А именно: если (3) допускает группу G, то (4) допускает ей подобную группу $G_1 = e(G)$. Ясно, что указанное соответствие является теоретико-множественным признаком эквивалентности, по которому множество уравнений вида (3) разбивается на классы эквивалентных уравнений. Поэтому задача групповой классификации сводится к двум следующим: (a) описать классы эквивалентных уравнений и (b) найти допускаемую группу для какого-нибудь (простейшего) представителя каждого класса.

Очевидно, что все возможные ПЭ образуют группу $E = \{e\}$ преобразований пространства $\mathbb{R}^3(x, y, f)$, которая называется *группой эквивалентностей* уравнений вида (3). Для решения задачи (a) необходимо прежде всего описать эту группу.

1. Группа эквивалентностей. Вычисление выражения для производной $y_1'' = d^2y_1/dx_1^2$ в переменных (x, y), получаемого подстановкой (1), дает соотношение

$$(F_x + y'F_y)^3 y_1'' = (F_x + y'F_y)(G_{xx} + 2y'G_{xy} + {y'}^2 G_{yy} + y''G_y) - \\ - (G_x + y'G_y)(F_{xx} + 2y'F_{xy} + {y'}^2 F_{yy} + y''F_y).$$

Преобразование уравнения (3) в (4) подстановкой (1) возможно, если и только если в этом соотношении не будет слагаемых с первой производной y'. Поэтому оно расщепляется по степеням y' и приводит к равенствам

$$F_x^3 f_1 = Jf + F_x G_{xx} - G_x F_{xx}; \qquad (1.1)$$

$$3F_x^2 F_y f_1 = F_y G_{xx} - G_y F_{xx} + 2F_x G_{xy} - 2G_x F_{xy}; \qquad (1.2)$$

$$3F_x F_y^2 f_1 = F_x G_{yy} - G_x F_{yy} + 2F_y G_{xy} - 2G_y F_{xy}; \qquad (1.3)$$

$$F_y^3 f_1 = F_y G_{yy} - G_y F_{yy}, \qquad (1.4)$$

где $J = F_x G_y - F_y G_x \neq 0$.

В силу (2) из (1.4) следует $F_y = 0$ и, значит, $F = \alpha(x)$, а равенства (1.2), (1.3) упрощаются:

$$G_y F_{xx} = 2F_x G_{xy}, \qquad G_{yy} = 0. \qquad (1.5)$$

При этом (1.1) принимает вид

$$F_x^3 f_1 = F_x G_y f + F_x G_{xx} - G_x F_{xx}. \qquad (1.6)$$

Общее решение системы (1.5) есть $G = \beta(x)y + \gamma(x)$, причем $\alpha''\beta = 2\alpha'\beta', \alpha'\beta \neq 0$, где последнее неравенство следует из условия $J \neq 0$. Подстановка в (1.6) полученных выражений для F и G дает соотношение

$${\alpha'}^3 f_1 = \alpha'\beta f + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')y + (\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma'),$$

которое после замены $y = (y_1 - \gamma)/\beta$ упрощается до следующего:

$$\frac{{\alpha'}^2}{\beta} f_1 = f - \Big(\frac{1}{\beta}\Big)'' y_1 + \Big(\frac{\gamma}{\beta}\Big)''.$$

Итак, получается общее ПЭ

$$x_1 = \alpha(x), \qquad y_1 = \beta(x)y + \gamma(x), \qquad \alpha''\beta = 2\alpha'\beta' \qquad (\alpha'\beta \neq 0), \\ ({\alpha'}^2/\beta) f_1 = f - (1/\beta)'' y_1 + (\gamma/\beta)'', \qquad (1.7)$$

зависящее от двух произвольных функций $\beta(x), \gamma(x)$ и двух произвольных констант, возникающих при вычислении функции $\alpha(x)$.

Для дальнейшего полезно отметить некоторые частные виды ПЭ.

Лемма 1. *Пусть $f_0(x,y)$ есть некоторая фиксированная функция. Тогда*

(i) *функция $f(x,y) = Af_0(Bx+C, My+N)$ с постоянными A, B, C, M, N при $B \neq 0$ эквивалентна функции $f_1(x_1,y_1) = (AM/B^2)f_0(x_1,y_1)$, а при $B = 0$, когда $f_0 = f_0(y)$, — функции $f_1(y_1) = AMf_0(y_1)$;*

(ii) *функция $f(x,y) = f_0(x,y) + p(x)y + q(x)$ эквивалентна функции $f_1(x_1,y_1) = A(x_1)f_0(x_1,y_1)$, где $A(x_1) = (\beta/\alpha'^2)(x_1)$, функции α и β находятся из уравнений $\beta(1/\beta)'' = p(x)$, $\beta\alpha'' = 2\beta'\alpha'$, а зависимость x от x_1 получается обращением функции $x_1 = \alpha(x)$;*

(iii) *функция $f_0(x,y)$ эквивалентна функции $f_1(x_1,y_1) = x_1^{-3}f_0(1/x_1, y_1/x_1)$.*

Доказательство. Все утверждения следуют из ПЭ (1.7). В случае (i) при $B \neq 0$ используется ПЭ $x_1 = Bx + C$, $y_1 = My + N$, а при $B = 0$ — ПЭ $x = x_1$, $y_1 = My + N$. В случае (ii) правая часть в выражении (1.7) для f_1 в силу равенства $y_1 = \beta y + \gamma$ приводится к виду

$$f - [(1/\beta)'' - p/\beta]y_1 + [(\gamma/\beta)'' - p\gamma/\beta + q]$$

и выбор β и γ в качестве решений уравнений

$$(1/\beta)'' = p/\beta, \quad (\gamma/\beta)'' = p\gamma/\beta - q$$

приводит соотношение (1.7) к нужной форме $(\alpha'^2/\beta)f_1 = f_0$. Случай (iii) получается из (1.7) с функциями $\alpha = 1/x$, $\beta = 1/x$, $\gamma = 0$.

В частности, если взять $f_0 \equiv 0$, то в случае (ii) функция f будет линейна по y и она эквивалентна функции $f_1 = 0$.

2. Допускаемые операторы. Операторы однопараметрических подгрупп, допускаемых уравнением (3), ищутся в виде

$$X = \xi(x,y)\,\partial_x + \eta(x,y)\,\partial_y. \tag{2.1}$$

Стандартный алгоритм вычисления таких операторов (см. [2]) приводит к следующим определяющим уравнениям (ОУ):

$$\xi_{yy} = 0, \qquad \eta_{yy} = 2\xi_{xy}, \qquad 3f\xi_y = 2\eta_{xy} - \xi_{xx}; \tag{2.2}$$

$$\eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x)f = \xi f_x + \eta f_y, \tag{2.3}$$

где функция $f = f(x,y)$ есть правая часть в (3).

Если функция f линейна по y, т. е. (3) — линейное уравнение, то она эквивалентна функции $f \equiv 0$. В этом случае система (2.2), (2.3) имеет общее решение вида

$$\xi = a(x)y + b(x), \qquad \eta = a'(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

где $a'' = c'' = d'' = 0, b'' = 2c'$. Это и дает известную 8-мерную допускаемую алгебру Ли операторов.

Далее предполагается, что $f_{yy} \neq 0$. Тогда из третьего уравнения (2.2) следуют равенства $\xi_y = 0$ и $2\eta_{xy} = \xi_{xx}$. В этом случае подсистема (2.2) легко интегрируется и ее общее решение есть $\xi = a(x)$, $\eta = b(x)y + c(x)$, причем $2b' = a''$.

Итак, допускаемые операторы (2.1) имеют вид

$$X = a(x)\,\partial_x + [b(x)y + c(x)]\,\partial_y, \qquad a'' = 2b' \tag{2.4}$$

и остается ОУ (2.3), а именно

$$b''y + c'' + (b - 2a')f = af_x + (by + c)f_y, \tag{2.5}$$

которое служит для классификации нелинейных уравнений (3).

Вначале надо заметить, что для допускаемых операторов необходимо должно быть $a \neq 0$. Действительно, если $a = 0$, то $b = \mathrm{const}$. Тогда дифференцирование ОУ (2.5) по y приводит к соотношению $(by + c)f_{yy} = 0$ и при $f_{yy} \neq 0$ будет $b = c = 0$, т. е. оператор X нулевой.

Далее используется основное свойство ПЭ: если под действием ПЭ уравнение (3) переходит в (4), то ПЭ преобразует допускаемую группу для (3) в допускаемую группу для (4).

Пусть (2.4) есть фиксированный допускаемый оператор. Под действием ПЭ (1.7) этот оператор перейдет в оператор того же вида $X_1 = a_1\,\partial_{x_1} + (b_1 y_1 + c_1)\,\partial_{y_1}$ с координатами

$$a_1 = a\alpha', \qquad b_1 = a\beta'/\beta + b, \qquad c_1 = a\gamma' - b_1\gamma + c\beta, \tag{2.6}$$

которые следует рассматривать как функции x_1.

Лемма 2. *Справедливы свойства:*

(i) *константа* $a' - 2b = n$ *является инвариантом любого ПЭ;*

(ii) *если* $n = 0$, *то оператор* (2.4) *эквивалентен оператору* $X_1 = \partial_x$*;*

(iii) *если* $n \neq 0$, *то оператор* (2.4) *эквивалентен оператору* $X_1 = nx\partial_x$.

Доказательство: (i) из соотношений (2.6) следует тождество

$$\frac{da_1}{dx_1} - 2b_1 = \frac{da}{dx} - 2b + a\Big(\frac{\alpha''}{\alpha'} - 2\,\frac{\beta'}{\beta}\Big), \tag{2.7}$$

в котором выражение в скобках равно нулю в силу (1.7);

(ii) в силу (2.7) можно найти такое ПЭ (2.6), с которым будет $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$;

(iii) аналогично, существует ПЭ (2.6), с которым будет $a_1 = nx_1$, $b_1 = c_1 = 0$.

Следствие. Если уравнение (3) допускает некоторый оператор (2.4), то оно эквивалентно уравнению того же вида, допускающему либо оператор $X_1 = \partial_x$, либо оператор $X_1 = x\,\partial_x$.

3. Групповая классификация. Классификация выполняется по следующему плану: (э$_1$) устанавливается общий вид функции $f(x, y)$, с которой допускается оператор $X_1 = \partial_x$ или $X_1 = x\,\partial_x$; (э$_2$) полученное выражение для f подставляется в общее ОУ (2.5) и из него находятся, с точностью до ПЭ, все функции f, дающие расширение одномерной подалгебры с оператором X_1 до полной допускаемой алгебры Ли операторов.

Первая возможность: $X_1 = \partial_x$. Этап (э$_1$) дает $f = f(y)$, и на этапе (э$_2$) получается ОУ

$$b''y + c'' + (b - 2a')f(y) = (by + c)f'(y). \tag{3.1}$$

Двукратное дифференцирование по y дает уравнение

$$(b + 2a')f'' + (by + c)f''' = 0. \tag{3.2}$$

Если $f''' = 0$, то f эквивалентна (лемма 1) функции $f = y^2$. Подстановка в (3.1) дает ОУ

$$b''y + c'' + (b - 2a')y^2 = 2y(by + c),$$

расщепление которого по степеням y и с учетом соотношения (2.4) приводит к выражениям (a_1, a_0 — константы)

$$a = a_0 + a_1 x, \qquad b = -2a_1, \qquad c = 0.$$

Значит, уравнение (3) с $f = y^2$ допускает, кроме $X_1 = \partial_x$, еще только один оператор $X_2 = x\,\partial_x - 2y\,\partial_y$.

В случае $f''' \neq 0$ из (3.2) получается равенство $(f''/f''')'' = 0$, откуда следует, что

$$f'''/f'' = 1/(Ay + B) \tag{3.3}$$

с некоторыми константами A, B. Здесь возможны два подслучая: $A \neq 0$ или $A = 0$, $B \neq 0$.

f	X_1	X_2	X_3
$f(y)*$	∂_x	0	0
e^y	∂_x	$x\,\partial_x - 2\,\partial_y$	0
$y^k,\ k \neq -3$	∂_x	$(k-1)x\,\partial_x - 2y\,\partial_y$	0
$\pm y^{-3}$	∂_x	$2x\,\partial_x + y\,\partial_y$	$x^2\,\partial_x + xy\,\partial_y$
$x^{-2}g(y)*$	$x\,\partial_x$	0	0

Если $A \neq 0$, то интегрирование (3.3) и условие $f'' \neq 0$ дают функции f, эквивалентные (лемма 1) одной из следующих:

$$f = Ny^k \quad (k \neq 0, 1, 2), \qquad f = N \ln y, \qquad f = Ny \ln y,$$

где $N = \text{const}$. Подстановка в (3.1) показывает, что две последние функции новых операторов не дают. С функцией $f = Ny^k$ ОУ (3.1) принимает вид

$$b''y + c'' + (b - 2a')Ny^k = (by + c)kNy^{k-1}.$$

Расщепление по степеням y дает соотношения

$$2a' + (k-1)b = 0, \qquad b'' = 0, \qquad c = 0.$$

Первое из них в силу (2.4) приводит к равенству

$$(k+3)b' = 0$$

и влечет альтернативу: $b' = 0$ или $k = -3$. Если $b' = 0$, т. е. $b = 2b_1 = \text{const}$, то будет $a' = -(k-1)b_1$ и $a = a_0 - (k-1)b_1 x$. Константа b_1 дает один дополнительный оператор $X_2 = (k-1)x\,\partial_x - 2y\,\partial_y$, который уже получился выше в случае $k = 2$. Если же $k = -3$, то из предыдущих соотношений следуют выражения $a = a_0 + 2b_0 x + b_1 x^2$, $b = b_0 + b_1 x$ и константы b_0, b_1 дают два дополнительных оператора

$$X_2 = 2x\,\partial_x + y\,\partial_y, \qquad X_3 = x^2\,\partial_x + xy\,\partial_y.$$

В подслучае $A = 0$ интегрирование уравнения (3.3) приводит, с точностью до ПЭ, к функции $f = \mathrm{e}^y$. С такой функцией из (3.1) следуют уравнения $b = 0$, $2a' = -c$, $c'' = 0$, которые вместе с (2.4) имеют общее решение

$$a = a_0 + a_1 x, \qquad b = 0, \qquad c = -2a_1.$$

Константа a_1 дает дополнительный допускаемый оператор $X_2 = x\,\partial_x - 2\,\partial_y$.

Вторая возможность: $X_1 = x\,\partial_x$. Этап (э$_1$) дает $f = x^{-2}g(y)$ с произвольной функцией $g(y)$, и на этапе (э$_2$) получается ОУ

$$x^3(b''y + c'') + [2(a - xa') + xb]g(y) = x(by + c)g'(y). \tag{3.4}$$

Анализ уравнения (3.4) аналогичен проделанному для (3.1). Здесь выделилась только одна функция, эквивалентная $g(y) = y^{-1}$, с которой допускается один дополнительный оператор $X_2 = x^2\,\partial_x + xy\,\partial_y$. Однако уравнение $y'' = x^{-2}y^{-1}$ эквивалентно уравнению $y'' = y^{-1}$ в силу леммы 1 (iii).

Результат выполненной групповой классификации нелинейных уравнений (3) представлен в таблице, где в первом столбце указаны попарно неэквивалентные виды функции f ($*$ означает, что функция произвольная), а в следующих трех приведены базисные операторы допускаемой алгебры Ли.

4. Инвариантные расширения. При использовании приведенной таблицы надо иметь в виду следующее. Так как для всех операторов из этой таблицы верны равенства $b'' = c'' = 0$, то ОУ (2.5) для допускаемых операторов (2.4) можно переписать в виде

$$(b - 2a')f = X(f). \tag{4.1}$$

Отсюда следует, что если уравнение (3) с функцией $f_0(x, y)$ допускает какой-либо оператор X и $I = I(x, y)$ есть любой инвариант этого оператора, то уравнение (3) с функцией $f = f_0 I$ также допускает тот же оператор X. Это вытекает из того, что $X(I) = 0$, значит, $X(f_0 I) = X(f_0) I$, и из уравнения (4.1).

Эту операцию можно назвать *инвариантным расширением* множества уравнений, допускающих хотя бы один из операторов, приведенных в таблице.

Например, уравнение $y'' = y^k$ $(k \neq -3)$ за счет оператора X_2 с инвариантом $I_0 = x^2 y^{k-1}$ расширяется до семейства уравнений $y'' = y^k I_0^m = x^{2m} y^{k+m(k-1)}$, т. е. $y'' = x^p y^q$, допускающих X_2, где

$$p = 2m, \qquad q = k(m+1) - m \tag{4.2}$$

могут быть любыми вещественными числами.

Однако необходимо учитывать, что при таком расширении могут получаться неэквивалентные (в смысле данного во введении определения ПЭ) уравнения. В частности, уравнение $y'' = y^k$ неэквивалентно уравнению $y'' = x^p y^q$ с показателями (4.2) при $m \neq 0$, ибо они допускают не подобные группы.

Тем не менее операция инвариантного расширения полезна в приложениях к конкретным задачам, так как если уравнение (3) допускает хотя бы один оператор, то оно сводится к уравнению первого порядка и квадратуре.

В заключение уместно заметить, что выполненный в данной работе анализ не дает полного решения проблемы эквивалентности, состоящей в установлении *критерия эквивалентности априори заданных уравнений* (3), (4). Такой критерий может быть получен лишь на основе теории дифференциальных инвариантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lie S.** Classification und integration von gewöhnlichen differential-gleichungen zwischen x, y, die gruppe von transformationen gestatten // Arch. Math. Natur. Christiania. 1883. V. 9. P. 371–393.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10/XI 2003 г.