

УДК 533.697

## **Влияние температуры торможения на сверхзвуковое осесимметричное течение воздуха в сопле минимальной длины**

**Т. Зеббиче**

*Университет СААД Далеб, Блида, Алжир*

E-mail: z\_toufik270169@yahoo.fr

При увеличении температуры торможения совершенного газа удельные теплоемкости и их отношение не остаются постоянными и начинают меняться с температурой. Газ остается совершенным; его уравнение состояния остается справедливым, за исключением так называемого калорически несовершенного газа. Целью настоящей работы является получение профилей сверхзвукового сопла минимальной длины для того, чтобы иметь равномерный и параллельный поток в выходном сечении, когда учитывается температура торможения, которая ниже, чем порог диссоциации молекул, и иметь форму сопла для каждого числа Маха на выходе и температуры торможения. Метод характеристик используется вместе с алгоритмом конечно-разностного метода второго порядка точности. Форма сопла имеет точку разворота и начальный угол расширения. Проводится сравнение с калорически совершенным газом. Приложения даны для воздуха.

**Ключевые слова:** осесимметричное сопло минимальной длины, функция Прандтля–Майера, высокая температура, численное интегрирование, конечно-разностный метод, алгоритм предиктора-корректора, интерполяция, функция растяжения, прямая звуковая линия, калорически несовершенный газ, сила давления, масса сопла, относительная ошибка.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Сопло — это устройство, используемое для ускорения сверхзвукового течения до желаемого числа Маха и получения тяги в результате этого ускорения.

В настоящем исследовании, выполненном с помощью метода характеристик, излагается методика проектирования контура осесимметричного сопла с центрированной волной разрежения, с учетом влияния переменности удельной теплоемкости  $C_p(T)$  в зависимости от температуры, которая справедлива, когда температура торможения в камере сгорания достаточно высока, но ниже, чем порог диссоциации молекул.

Проектирование контуров сверхзвуковых сопел осуществляется с учетом различных критериев, зависящих от приложений. В случае сопла, проектируемого с целью обеспечения сверхзвукового течения в аэродинамической трубе, основными

критериями являются следующие: поток, холодный в выходном сечении, является равномерным и параллельным в рабочей части. Последнее обеспечивает обтекание модели в условиях реального полета. Минимизация длины сопла в этом случае — дело второстепенной важности. Но для приложения к ракетам и сверхзвуковым самолетам желательно получить сопла, имеющие возможно меньший вес и в то же время дающие максимально возможную тягу.

Сопло состоит из двух частей: области дозвукового и сверхзвукового течения. Сверхзвуковая часть не зависит от условий вверх по потоку от звуковой линии. Дозвуковая часть используется для получения звуковой линии в горле. В этом классе исследуется сопло, дающее равномерное и параллельное течение в выходном сечении и называемое соплом минимальной длины (СМД). Имеются две категории контуров сопел, соответствующих разным звуковым линиям. В случае прямой звуковой линии стенка в районе горла генерирует центрированные расходящиеся волны разрежения. Вторая категория имеет криволинейную звуковую линию и течение внутри сопла не имеет центрированных линий Маха. Этот тип называется СМД с криволинейной звуковой линией. СМД с прямой звуковой линией изучалось в работах [1] и [3]. В работе [6] исследовалось осесимметричное СМД с прямой звуковой линией. В [7] имеется полный анализ двумерного СМД с изогнутой звуковой линией. В работах [6, 7] дан анализ осесимметричного СМД с изогнутой звуковой линией.

Рис. 1 иллюстрирует общее представление осесимметричного СМД с прямой звуковой линией и показывает поле течения в различных областях. Течение между горлом  $OA$  и областью равномерного течения  $BSE$  разбивается на две области. Область  $OAB$  называется областью ядра. Стенка горла наклонена под углом  $\theta^*$ . Для плоских течений решение в области перехода  $ABE$  можно получить в аналитическом виде [2]. Но если течение осесимметричное, то необходимо численное решение [9]. В области  $BSE$  течение однородное с постоянным числом Маха.

Применение СМД с прямой звуковой линией, как правило, ограничено плоскими соплами [10, 12]. Однако для создания гиперзвуковых течений, а также для ракетных двигателей используется осесимметричное сопло. Исследование в настоящей работе посвящено осесимметричным СМД с прямой звуковой линией.

В предыдущих работах [1–3, 6–7, 10, 12] рассматривалась модель совершенного газа (СГ) с постоянным  $C_p$ , что имеет место для низких температур торможения (приблизительно 1000 К) для выходных чисел Маха, не превосходящих  $M_E = 2,00$ . В действительности удельные теплоемкости  $C_p$  меняются в зависимости от температуры. Работа [10] описывает это изменение для воздуха в диапазоне температур до 3550 К. Делается полиномиальная интерполяция по этим значениям с целью получения аналитической формы [11, 13]. Для приложений используется многочлен девятой степени [14–18, 21–22].

Целью настоящей работы является учет влияния температуры на  $C_p$  при проектировании сверхзвукового сопла [23]. Совершенный газ определяется

в общем как калорически несовершенный и термически совершенный, или газ при высокой температуре (ВТ). Уравнения сохранения при этом не меняются, за исключением уравнения энергии. Новые соотношения при высокой

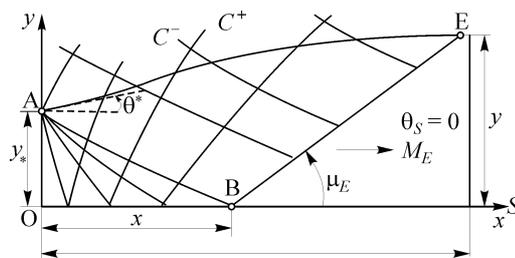


Рис. 1. Поле течения в осесимметричном СМД.

температуре для термодинамических отношений даны в работах [15, 22], а функция Прандтля–Майера описана в работах [14, 19, 21].

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Для осесимметричного сверхзвукового безвихревого адиабатического течения совершенного газа метод характеристик дает следующие уравнения, известные как характеристики и уравнения совместности [1, 18–20, 23]:

Вдоль  $\xi$  (1–3) (рис. 2):

$$d(v + \theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi, \quad dy/dx = \operatorname{tg}(\theta - \mu). \quad (1)$$

Вдоль  $\eta$  (2–3) (см. рис. 2):

$$d(v - \theta) = \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\eta, \quad dy/dx = \operatorname{tg}(\theta + \mu). \quad (2)$$

Нужно подставить в соотношения (1), (2) функцию Прандтля–Майера, чтобы получить новую форму, справедливую для ВТ-модели, что дает обобщение СГ-модели.

В соотношениях (1), (2) функция Прандтля–Майера ВТ-модели дается формулами [14, 16–18, 21, 23]:

$$dv = F_v(T) = - \frac{C_p(T)}{2 H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT, \quad (3)$$

где [15, 22, 23]

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)}, \quad (4)$$

$$a(T) = \sqrt{\gamma(T) R T}, \quad (5)$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - R}, \quad (6)$$

$$R = 287,102 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}.$$

Функции  $C_p(T)$  и  $H(T)$  представлены в работах [15, 22]. Угол Маха дается формулой

$$\mu = \arcsin(1/M). \quad (7)$$

Соотношения между направлениями линий Маха  $\xi$  и  $\eta$  и декартовыми координатами  $x$  и  $y$  даются формулами [2]:

$$d\xi = \frac{dx}{\cos(\theta - \mu)}, \quad d\eta = \frac{dy}{\sin(\theta + \mu)}. \quad (8)$$

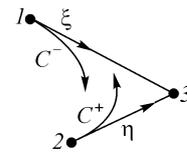


Рис. 2. Характеристики и линии Маха расширения.

Заменяя соотношения (8) и (3) в системе (1), (2), получают следующую математическую ВТ-модель метода характеристик:

вдоль  $\xi$  (1–3):

$$-\frac{C_p(T)}{2H(T)}\sqrt{M^2(T)-1}dT + d\theta = \frac{\sin\theta\sin\mu}{y\cos(\theta-\mu)}dx, \quad (9)$$

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\theta-\mu); \quad (10)$$

вдоль  $\eta$  (2–3):

$$-\frac{C_p(T)}{2H(T)}\sqrt{M^2(T)-1}dT - d\theta = \frac{\sin\theta\sin\mu}{y\sin(\theta+\mu)}dy, \quad (11)$$

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\theta+\mu), \quad (12)$$

где  $M(T)$ ,  $a(T)$  и  $\mu(T)$  даются соотношениями (4), (5) и (7) соответственно. Поскольку функция  $H(T)$  зависит от параметра  $T_0$  [15, 22], ВТ-модель зависит, прежде всего, от температуры торможения  $T_0$ .

Разработанная модель является системой дифференциальных уравнений для четырех неизвестных ( $x$ ,  $y$ ,  $T$ ,  $\theta$ ). Различие между двумя моделями состоит в том, что ВТ-модель использует переменную  $T$  вместо переменной  $M$ , которые связаны друг с другом неявным уравнением (4), где обратное аналитическое выражение не существует.

Поскольку  $C^+$  и  $C^-$  криволинейны, применение метода характеристик обязывает нас ввести мелкую сетку для аппроксимации каждой характеристики между двумя точками прямолинейными отрезками. Можно получить свойства ( $x$ ,  $y$ ,  $T$ ,  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $P$ ) в точке 3 (см. рис. 2) из тех точек 1 и 2, с которыми она соединяется. Можно интерполировать параметры  $y$ ,  $\theta$ ,  $T$  на отрезках, соединяющих точки 1 и 2 и точки 2 и 3, с помощью следующих выражений:

$$\theta_{i3} = C_\theta \theta_i + (1-C_\theta) \theta_3, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$$T_{i3} = C_T T_i + (1-C_T) T_3, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

$$y_{i3} = C_y y_i + (1-C_y) y_3, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Если принять  $C_y$ ,  $C_\theta$  и  $C_T$  равными 0,5, то можно получить средние значения параметров.

### 1.1. Уравнение и процедура для внутренней точки

Точка, лежащая внутри поля течения, показана на рис. 3, *b*. Поэтому интегрирование уравнений (9), (10), (11) и (12) дает [23]:

вдоль  $\xi$  (1–3):

$$A_{13}(T_3 - T_1) + (\theta_3 - \theta_1) = B_{13}(x_3 - x_1), \quad (16)$$

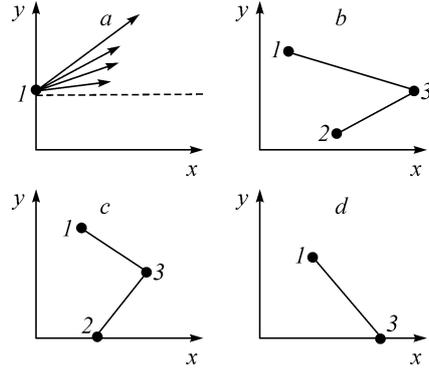
$$y_3 - y_1 = C_{13}(x_3 - x_1); \quad (17)$$

вдоль  $\eta$  (2–3):

$$A_{23}(T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = B_{23}(y_3 - y_2), \quad (18)$$

$$y_3 - y_2 = C_{23}(x_3 - x_2), \quad (19)$$

Рис. 3. Различные расчетные точки: центр (a), внутренняя точка (b), частная внутренняя точка (c), точка на оси симметрии (d).



где

$$A_{i3} = -\frac{C_P(T_{i3})}{2H(T_{i3})} \sqrt{M_{i3}^2 - 1} \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

$$B_{13} = \frac{\sin(\theta_{13}) \sin(\mu_{13})}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})}, \quad B_{23} = \frac{\sin(\theta_{23}) \sin(\mu_{23})}{y_{23} \sin(\theta_{23} + \mu_{23})}, \quad (21)$$

$$C_{13} = \operatorname{tg}(\theta_{13} - \mu_{13}), \quad C_{23} = \operatorname{tg}(\theta_{23} + \mu_{23}), \quad (22)$$

$$\mu_{i3} = \arcsin(1/M_{i3}), \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

$$M_{i3} = \frac{\sqrt{2H(T_{i3})}}{a_{i3}}, \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

$$a_{i3} = \sqrt{\gamma_{i3} R T_{i3}}, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

$$\gamma_{i3} = \frac{C_P(T_{i3})}{C_P(T_{i3}) - R} \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Уравнения (16), (17), (18) и (19) образуют систему нелинейных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных ( $x_3, y_3, T_3, \theta_3$ ). Запишем алгоритм последовательных итераций:

$$x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}}, \quad (27)$$

$$y_3 = E_1 + C_{13} x_3, \quad (28)$$

$$T_3 = \frac{D_1 + D_2 + B_{23} y_3 + B_{13} x_3}{A_{13} + A_{23}}, \quad (29)$$

$$\theta_3 = D_1 + B_{13} x_3 - A_{13} T_3, \quad (30)$$

где

$$E_i = y_i - C_{i3} x_i, \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

$$D_1 = \theta_1 + A_{13} T_1 - B_{13} x_1, \quad D_2 = -\theta_2 - B_{23} y_2 + A_{23} T_2. \quad (32)$$

Соотношения (27)–(30) образуют систему уравнений для вычисления свойств во внутренней точке сверхзвукового течения при высокой температуре. Решение находят с помощью алгоритма предиктор–корректор [3, 9, 11, 17]. На шаге

предиктора (итерация  $K = 0$ ) начальные значения  $y_{i3}$ ,  $T_{i3}$  и  $\theta_{i3}$  ( $i = 1, 2$ ) задаются по формулам [23]:

$$T_{13} = T_1, \theta_{13} = \theta_1, y_{13} = y_1, \quad (33)$$

$$T_{23} = T_2, \theta_{23} = \theta_2, y_{23} = y_2. \quad (34)$$

Подставим уравнения (33) и (34) в (27)–(30) для того, чтобы получить начальные значения  $(x_3^0, y_3^0, T_3^0, \theta_3^0)$  в точке 3 (см. рис. 3).

Значения для алгоритма корректора, заданные соотношениями (13)–(15), подставляются в уравнения (27)–(30) для того, чтобы получить новые значения параметров в точке 3. Скорректированные значения — это  $(x_3^1, y_3^1, T_3^1, \theta_3^1)$ .

Нужно повторять алгоритм корректора до тех пор, пока не будет получена желаемая точность. Для  $K$  итераций необходимо удовлетворить следующему условию для обеспечения сходимости:

$$\text{Max} \left[ \left| y_3^K - y_3^{K-1} \right|, \left| \theta_3^K - \theta_3^{K-1} \right|, \left| T_3^K - T_3^{K-1} \right| \right] < \varepsilon. \quad (35)$$

Переменная  $x$  сходится автоматически со сходимостью условия (35).

### 1.2. Частная внутренняя точка

Точка 3 на рис. 3,  $c$  — частная внутренняя точка, потому что точка 2 лежит на оси симметрии. Использование алгоритма внутренней точки создает проблему расчета ее свойств. Член  $B_{23}$  в соотношении (21) неопределен для предсказанного значения, поскольку в точке 2 мы имеем  $y_2 = \theta_2 = 0$ . Поскольку отрезок линии Маха мал, точка 3 будет ближе к горизонтальной оси. Поскольку можно аппроксимировать числитель члена  $B_{23}$  по формуле  $\sin(\theta_{23}) \approx \theta_3$  и знаменатель — по формуле  $\sin(\theta_{23} + \theta_{23}) \approx \sin(\theta_{23})$ ,  $B_{23}$  упрощается к виду [23]:

$$B_{23} \approx \theta_3 / y_3. \quad (36)$$

Уравнение (18) больше не выполняется, и оно заменяется на

$$A_{23}(T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3, \quad (37)$$

решение уравнения (37) дает

$$\theta_3 = \frac{A_{23} T_3 - A_{23} T_2 + \theta_2}{2}. \quad (38)$$

После подстановки (38) в соотношение (16) решение полученного уравнения имеет вид

$$T_3 = \frac{2[D_1 + B_{13} x_3] + A_{23} T_2}{2 A_{13} + A_{23}}. \quad (39)$$

Уравнение (29) нужно заменить на (39). Таким образом, для определения свойств  $(x_3, y_3, T_3, \theta_3)$  этой точки используются уравнения (28), (38) и (39), и итерационная процедура такая же, как для регулярной внутренней точки.

### 1.3. Уравнения для точки на оси симметрии

Как показано на рис. 3,  $d$ , точка 3 лежит на оси симметрии. Поскольку  $y_3 = \theta_3 = 0$ , вычислительная процедура упрощается и используется линия  $\zeta$ , соеди-

няющая точки 1 и 3. Значения свойств  $x_3$  и  $T_3$  можно получить, решив алгебраические уравнения (16) и (17), что дает:

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{C_{13}}, \quad (40)$$

$$T_3 = T_1 + \frac{B_{13}(x_3 - x_1) + \theta_1}{A_{13}}. \quad (41)$$

Эту точку можно рассматривать как внутреннюю точку 3, если рассматривать свойства в точке 2 в следующем виде:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = -y_1, \quad \theta_2 = -\theta_1, \quad T_2 = T_1. \quad (42)$$

#### 1.4. Другие параметры

Можно получить число Маха  $M_3$ , сделав замену  $T = T_3$  в соотношении (4). Отношения плотности и давления можно определить, соответственно, по следующим соотношениям [15, 22]:

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_3 = \exp \left( - \int_{T_3}^{T_0} C_p(T) / a^2(T) dT \right), \quad (43)$$

$$\left( \frac{P}{P_0} \right)_3 = \left( \frac{T}{T_0} \right)_3 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)_3. \quad (44)$$

## 2. ПРОЦЕДУРА РАСЧЕТА СОПЛА

Расчет течения в сопле подразделяется на две области, которые называются, соответственно, областями ядра и перехода.

### 2.1. Область ядра

Расчет течения в области ядра начинается с точки А и определяется способом проектирования. Первая возможность состоит в том, чтобы осуществить проектирование на основе начального угла отклонения потока  $\theta^*$ . Число  $N$  рассчитываемых  $C^-$  должно быть среди входных данных. Число Маха на выходе, соответствующее этому углу, будет дано только после расчета течения в области ядра. В работе [3] использовался этот способ проектирования. Следует отметить, что для осесимметричной геометрии отсутствует аналитическое соотношение, связывающее  $M_E$  и  $\theta^*$ .

Вторая возможность состоит в том, что можно осуществлять проектирование на основе  $M_E$ . Шаг  $\Delta\theta$  должен быть среди входных данных. Угол  $\theta^*$  получается после расчета течения в области ядра. В этом случае возникает проблема в процессе расчета, показанная на рис. 4. Заметим, что наша компьютерная программа может осуществлять проектирование на основе этих двух возможностей.

Имеется бесконечное множество волн Маха, которые выходят из точки А и отражаются на оси симметрии. Если проектирование осуществляется на основе  $\theta^*$ , то расчет обязывает нас осуществлять дискретизацию зоны разгона потока  $0 \leq \theta \leq \theta^*$  в конечном множестве  $N$  точек. В итоге получают  $N + 1$  линий  $C^-$ , включая две крайние. Тогда выбирают между двумя последовательными характеристиками

$$\Delta\theta = \Delta\nu = \theta^* / N. \quad (45)$$



Рис. 4. Разные способы проектирования: на основе  $M_E$  (a), на основе  $\theta^*$  (b).

Если проектирование осуществляется на основе  $M_E$ , то расчет обязывает нас рассмотреть довольно малый шаг  $\Delta\theta = \Delta v$ . Каждому переходу к следующему  $C$  соответствует одно приращение угла отклонения потока в точке  $A$  на шаг  $\Delta\theta$ . Количество рассчитываемых  $C$  неизвестно и зависит, главным образом, от выбранного шага  $\Delta\theta$  и от значений  $M_E$  и  $T_0$ .

Шаг  $\Delta\theta$ , полученный таким способом, дает равномерную сетку для  $C^-$  в конце области ядра и большое пространство и неравномерную сетку для первой линии  $C^-$ . Контур стенки будет плохо представлен как раз после горла. Для решения этой проблемы сетку измельчают, подставляя дополнительные линии  $C^-$  между звуковой линией и первой линией  $C^-$ . Вставка характеристик выполняется путем введения следующего сгущения сетки [3, 17, 23]:

$$v_i = \left( \frac{i}{N_i} \right)^\delta \Delta v, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, N_i. \quad (46)$$

Процесс вычислений в области ядра представлен на рис. 5. Сначала определяют свойства в точке  $I$  рис. 5, a. В этой точке  $x_1/y_* = 0$ ,  $y_1/y_* = 1$  (безразмерные величины). Угол  $\theta_1 = v_1$  с учетом соотношения (46), если выбрать сетку со сгущением и  $\theta_1 = \Delta\theta$ , когда расчет выполняется без процедуры сгущения. Температуру  $T_1$  нужно находить из решения следующего уравнения [17, 23]:

$$\theta_1 = \int_{T_1}^{T_*} F_v(T) dT. \quad (47)$$

Начиная с третьей  $C$ , каждая следующая характеристика может содержать четыре типа точек. Первый тип — это точка  $I$ , совпадающая с точкой  $A$ . Второй — точка  $3$  на оси симметрии, как показано на рис. 5, f. Третий тип — частная внутренняя точка  $3$ , показанная на рис. 5, e, а остальные типы имеют тип регулярной внутренней точки. Каждый тип требует свою расчетную процедуру. Заметим, что линия  $C^-$  с номером  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ )

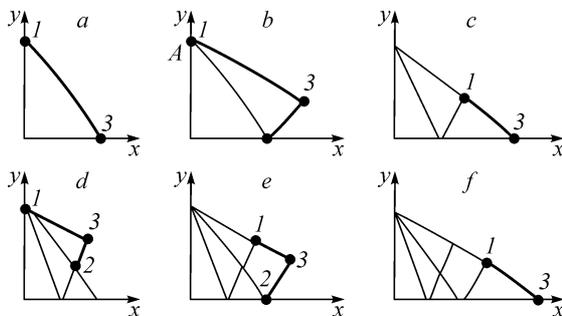


Рис. 5. Процесс вычисления  $C^-$  в области ядра.

содержит  $i + 1$  точек. Если область ядра содержит  $N$  характеристик, то общее число  $N_T$  точек для расчета их свойств в точности равно

$$N_T = 2 + 3 + 4 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2} - 1. \quad (48)$$

Расчет течения в области ядра заканчивается в соответствии с выбранным способом проектирования. В случае, когда проектирование осуществляется на основе  $\theta^*$ , процесс завершается, если счет для всех  $N$  выбранных линий  $C^-$  закончен. Число Маха на выходе задается числом Маха последней рассчитанной точки на оси симметрии. Свойства в этой точке являются свойствами в выходном сечении. В этом случае не возникает никаких проблем, и окончание вычислений делается нормальным способом, как показано на рис. 5, *b*. Но если проектирование делается на основе  $M_E$ , то каждый раз, когда определяют свойства в точках линии  $C^-$ , проверяют, равно ли число Маха  $M_3$  на оси симметрии числу Маха  $M_E$  для того, чтобы закончить расчет. В общем случае это проблема, потому что невозможно найти  $M_3 = M_E$  и необходимо обнаружить характеристику  $C^-$ , содержащую число Маха  $M_E$  на оси симметрии с точностью  $\varepsilon$ . Эта ситуация показана на рис. 5, *a*. Используется алгоритм дихотомии [5, 11] для того, чтобы вставить и исключить линию  $C^-$  между последними двумя регулярными характеристиками  $C^- (A_2B_2$  и  $A_1B_1)$  с применением следующего соотношения:

$$M_{B_1} < M_E < M_{B_2}. \quad (49)$$

Характеристика  $(A_3 B_3)$  будет вставлена между  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ , которая заменяет отвергнутую  $A_2B_2$ . Первоначально вставляют точку  $A_3$  при следующем условии [23]:

$$\theta_{A_3} = \theta_1 = \frac{\theta_{A_1} + \theta_{A_2}}{2}. \quad (50)$$

Температуру  $T_{A_3}$  можно найти как решение уравнения (47), подставляя в него выражение (50), и затем можно рассчитать свойства во всех точках  $C^- (A_3B_3)$  вплоть до точки  $B_3$ , после чего проверяют условие (49). Расчет повторяют до тех пор, когда будет определено значение  $M_E$  с заданной точностью  $\varepsilon$ . Общее число рассмотренных линий  $C^-$  несколько увеличится по сравнению с числом линий, определенных (или заданных) перед применением алгоритма дихотомии в этой частной области.

После определения поля течения в области ядра можно определить его длину по формуле

$$\frac{L_d}{y_*} = \frac{x_B}{y_*}. \quad (51)$$

## 2.2. Область перехода и контур сопла

Контур стенки определяется в переходной области  $ABE$  одновременно с расчетом течения в точках пересечения характеристик (см. рис. 1).

Управление геометрией сетки в этой области зависит от выбранного расстояния  $\Delta x$  между выбранными точками на равномерной линии Маха  $BE$ . Свойства в точках этой линии известны и равны значениям равномерного потока в выходном сечении. На рис. 6 показан вычислительный процесс в области перехода. Сначала

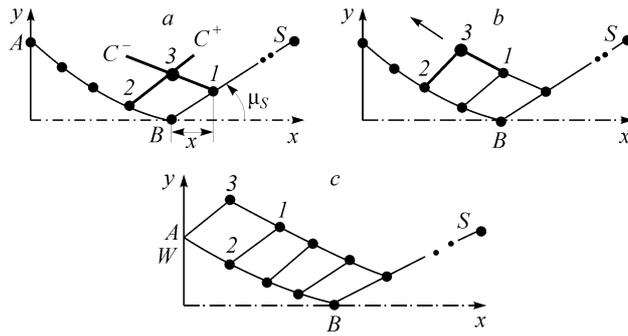


Рис. 6. Вычисление  $C^-$  в переходной области.

рассчитывают свойства точки 3 (см. рис. 6, *a*). Свойства точки 2 уже определены как свойства точек на последней характеристике  $C^-$  области ядра. Свойства в точке 1 даются формулами:

$$x_1 = x_B + \Delta x, \quad y_1 = \Delta x \operatorname{tg}(\mu_E), \quad \theta_1 = 0, 0, \quad T_1 = T_E. \quad (52)$$

Можно определить значение  $T_E$ , решив уравнение (4) при  $T = T_E$  и  $M = M_E$ . Можно рассчитать свойства в точке 3, используя процедуру для внутренних точек.

Затем переходят к расчету свойств в точке 3 (см. рис. 6, *b*) на той же линии  $C^-$ . Последовательные расчеты продолжаются в направлении стрелок, показанных на рис. 6, *b*, до тех пор, пока не будет определена последняя точка 3. Первая точка последней характеристики всегда является точкой стенки 1 (уже заданной).

Возникает трудность при определении точки стенки, которая пересекает рассчитанную линию  $C^-$ . Можно обнаружить несколько промежуточных точек стенки между двумя характеристиками  $C^-$ . Различные возможные случаи определения точек стенки иллюстрируются на рис. 7. На этом рисунке отрезки, соединяющие точки 1, 3 и точки 2, 3, а также отрезок стенки, рассматриваются как прямые линии. Свойства в точках 1, 2, 3 и  $W$  известны. Пересечение стенки с линией  $C^-$  обозначено точкой  $P^-$  со свойствами  $(x^-, y^-, \theta^-, T^-)$ , а пересечение с  $C^+$  обозначено точкой  $P^+$  со свойствами  $(x^+, y^+, \theta^+, T^+)$ .

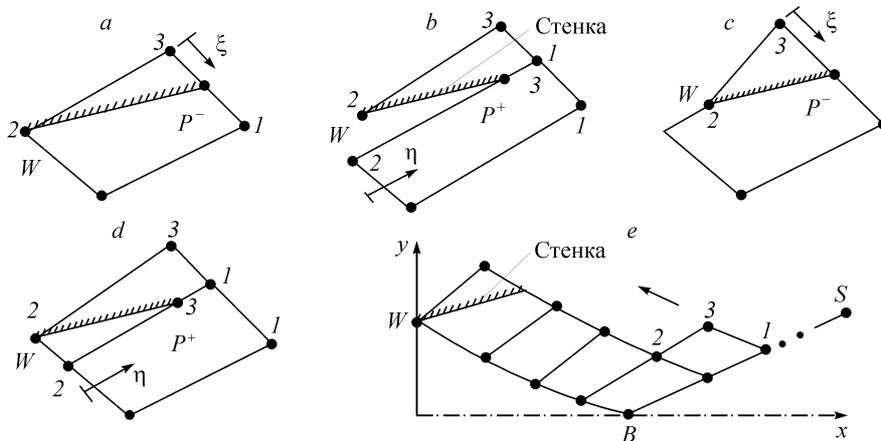


Рис. 7. Различные случаи пересечения стенки с характеристиками (*a, b, c, d*), в области перехода (*e*).

Чтобы найти точку пересечения стенки с  $C^+$  или с  $C^-$ , вычисляют следующее значение при начальном приближении  $\theta^\pm = \theta_W$  [23]

$$\Delta y = y_W - y_1 + (x_1 - x_W) \operatorname{tg}(\varphi), \quad (53)$$

где

$$\varphi = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^\pm. \quad (54)$$

и  $C_W \in [0, 1]$ .

Если  $\Delta y \geq 0$ , то оказываются в ситуации *a* или *b* (см. рис. 7). Если  $\Delta y < 0$ , то оказываются в ситуации *b* или *d*.

Рассматривается случай *a*, если число точек пересечения стенки с  $C^+$  между двумя линиями  $C^-$  равно нулю. В начале расчета течения в области перехода встречается случай *a* или *d*. Если  $\Delta y \geq 0$ , то находят пересечение стенки с вычисленной характеристикой. Необходимо сохранить параметры  $(x_p, y_p, T_p, \theta_p)$  последней вычисленной точки как новой точки стенки, а также перейти к выбору новой линии  $C^-$ , как указывает рис. 7, *e*. Если  $\Delta y < 0$ , то еще не нашли пересечение стенки с рассчитанной характеристикой. Чтобы определить свойства новой определяемой точки стенки, предполагают линейное изменение  $\theta$  на отрезке, соединяющем точки 1 и 3, если  $\Delta y \geq 0$ , и на отрезке, соединяющем точки 2 и 3, если  $\Delta y < 0$  (см. рис. 7).

Первый случай:  $\Delta y \geq 0$ .

При  $\xi = 0$  имеем  $\theta_{13}(\xi) = \theta_3$ , а при  $\xi = \Delta \xi_{13}$  (расстояние между точками 1 и 3) имеем  $\theta_{13}(\xi) = \theta_1$ . Линейная вариация угла  $\theta$  дает следующий результат для точки  $P^-$  [23]:

$$\theta^- = \theta_3 + \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_1). \quad (55)$$

Второй случай:  $\Delta y < 0$ .

При  $\eta = 0$  имеем  $\theta_{23}(\eta) = \theta_2$ , а при  $\eta = \Delta \eta_{23}$  (расстояние между точками 2 и 3) имеем  $\theta_{23}(\eta) = \theta_3$ . Линейная вариация угла  $\theta$  дает следующий результат для точки  $P^+$  [23]:

$$\theta^+ = \theta_2 + \left[ \frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (\theta_3 - \theta_2). \quad (56)$$

Положение точки  $P^-$  определяется из уравнений прямых, соединяющих точки 1, 3 и точки  $W, P$ . Чтобы определить положение точки  $P^+$ , запишем уравнения прямых, соединяющих точки 2, 3 и точки  $W, P^+$ . Получаем [23]:

$$x^\pm = \frac{y_3 - y_W - x_3 \lambda^\pm + x_W \operatorname{tg}(\varphi^\pm)}{\operatorname{tg}(\varphi^\pm) - \lambda^\pm}, \quad (57)$$

$$y^\pm = y_3 + \lambda^\pm (x^\pm - x_3), \quad (58)$$

где

$$\varphi^\pm = C_W \theta_W + (1 - C_W) \theta^\pm, \quad (59)$$

$$\lambda^+ = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad \lambda^- = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}. \quad (60)$$

Соотношение (57) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение, используемое для определения положения  $(x^-, y^-)$  точки  $P^-$  и положения  $(x^+, y^+)$  точки  $P^+$ . Первоначально полагают угол  $\theta^\pm = \theta_w$ . Подставляя это приближение в (57) и (58), мы можем получить начальное приближение для положения  $P^\pm$ . Это значение нужно подставить в соотношение (55) для того, чтобы подправить угол  $\theta$ , или в уравнение (56), чтобы подправить угол  $\theta^-$ . Процедуру повторяют до тех пор, пока не выполнится критерий сходимости (61).

$$\text{Max} \left[ \left| x^\pm(K) - x^\pm(K-1) \right|, \left| y^\pm(K) - y^\pm(K-1) \right| \right] < \varepsilon. \quad (61)$$

Необходимо между каждыми двумя последовательными итерациями проверять условие (53) для нового скорректированного значения  $\theta$  или  $\theta^+$  для того, чтобы взять нужное уравнение между точками  $P^+$  или  $P^-$  с целью точного определения точки стенки. После того, как положение стенки будет определено, оно будет рассматриваться как новая точка стенки, и применяются одна или две из конфигураций рис. 7. Процедура повторяется для следующей выбранной линии  $C^-$  в области перехода. Представление стенки зависит от выбранного шага  $\Delta x$  для точек равномерной линии Маха ВЕ и от свойств, полученных на последней линии  $C^-$  области ядра.

При определении положения точек  $P^+$  или  $P^-$  угол отклонения стенки одновременно находится в процессе счета, и можно вычислить температуру в этих точках, предполагая ее линейное изменение на отрезках, соединяющих точки 1, 3 и точки 2, 3 с тем же шагом как угол  $\theta$ . Температура интерполируется, соответственно, для точек  $P^-$  и  $P^+$  по формулам [23]:

$$T^- = T_3 + \left[ \frac{(x^- - x_3)^2 + (y^- - y_3)^2}{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \right]^{1/2} (T_1 - T_3), \quad (62)$$

$$T^+ = T_2 + \left[ \frac{(x^+ - x_2)^2 + (y^+ - y_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \right]^{1/2} (T_3 - T_2). \quad (63)$$

Для получения числа Маха в этой точке заменяют полученное значение температуры в уравнении (4). Термодинамические отношения можно получить, заменяя значения  $T_3$  на полученное значение  $T^-$  или  $T^+$  в соотношениях (43) и (44).

Процедура повторяется для каждой выбранной характеристики  $C^-$  до тех пор, пока не будет определена точка пересечения стенки с равномерной характеристикой ВЕ. Когда достигают выходной точки на линии ВЕ, число внутренних точек, которые нужно рассчитать на соответствующей линии  $C$ , убывает до тех пор, пока не останется одна точка. Эта ситуация означает, что расчет пришел в точку Е выходного сечения. Следовательно, безразмерный радиус выходного сечения, соответствующий дискретизации, будет представлен формулой

$$\frac{y_E}{y_*} (\text{вычисленное}) = \frac{y_{N_W}}{y_*}. \quad (64)$$

Количество точек, найденных на стенке сопла l (точнее, число  $N_W$  в соотношении (64)), зависит от выбранного шага  $\Delta x$  на равномерной линии  $C^-$  ВЕ и от количества точек на последней характеристике  $C^-$  АВ области ядра. Это количество больше

или равно числу точек, выбранных на равномерной линии  $C^+ BE$  и даже больше, чем число точек  $N_C$ , полученное на последней линии  $C^+ AB$  области ядра.

$$N_W = f(N_C, \Delta x, \text{обеспечение точек на } C^+ BE), \quad (65)$$

где

$$N_C = f(M_E, T_0, \Delta\theta, N_i, \delta). \quad (66)$$

Это не имеет места для двумерной геометрии, где число  $N_W = N_C$  [17].

Делается сравнение полученных численных результатов между численно рассчитанным лучом в выходном сечении и теоретическим безразмерным отношением площади поперечного сечения, что представлено следующей формулой [15, 22, 23]:

$$\left(\frac{y_E}{y^*}\right)_{\text{теоретическое}}^2 = \frac{A_E}{A^*} = \text{Exp} \left( \int_{T_E}^{T^*} F_A(T) dT \right), \quad (67)$$

где  $F_A(T)$  описано в работах [15, 22].

### 2.3. Изолинии

Очень интересно определить кривые в поле течения, имеющие постоянные физические свойства. Эти кривые называются изолиниями. Наибольший интерес представляют линии постоянного числа Маха и линии постоянного направления. Изобары, линии постоянной температуры и изохоры являются линиями постоянных чисел Маха. Точки этих кривых определяются после расчета внутреннего течения на каждом отрезке характеристик как показано на рис. 8.

Свойства  $(x, y, M, T)$  в точках  $G$  и  $D$  известны. Проблема состоит в определении положения  $(x_P, y_P)$  точки  $P$ , имеющей заданное свойство ( $M$  или  $\theta$ ).

Прежде чем определять свойства в точках характеристик  $C^+$ ,  $C^-$ , оси симметрии или стенки, делают следующий тест:

$$\Delta y = y_D - y_G, \quad (68)$$

- если  $\Delta y > 0$ , то искать точку на  $C^+$  или на стенке,
- если  $\Delta y < 0$ , искать точку на  $C^-$ ,
- если  $\Delta y = 0$ , искать точку на оси симметрии.

#### 2.3.1. Кривые с постоянным числом Маха

Обозначим  $M^{iso}$  — значение числа Маха, которое должно иметь некоторое множество точек внутри сопла, и нужно определить их положения. Отрезок, содержащий точку  $P$  кривой с постоянным числом Маха, удовлетворяет следующему условию:

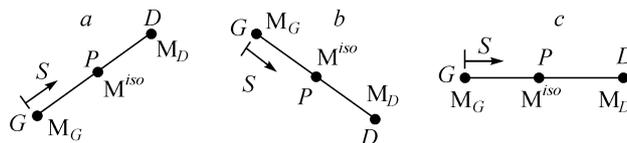


Рис. 8. Различные отрезки кривых с постоянным числом Маха: на  $C^+$  и на стенке (a), на  $C^-$  (b), на оси симметрии (c).

$$(M^{\text{iso}} - M_G)(M^{\text{iso}} - M_D) \leq 0. \quad (69)$$

Определение положения точки  $P$  требует рассмотрения линейной вариации  $M(S) = \alpha S + \beta$  числа Маха на отрезке  $GD$ . При  $S = 0$  имеем  $M(S) = M_G$ , и когда  $S = S_{GD}$  (расстояние между точками  $G$  и  $D$ ), имеем  $M(S) = M_D$ . Соотношение  $M(S) = M_P = M^{\text{iso}}$  выполняется, когда  $S = S_{GP}$ . Тогда расстояние между точками  $G$  и  $P$  дается формулами

$$S_{GP} = \frac{M^{\text{iso}} - M_G}{M_D - M_G} \sqrt{(x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2}. \quad (70)$$

Можно определить положение  $(x_P, y_P)$  точки  $P$  кривой с постоянным числом Маха по формулам:

$$x_P = x_G + S_{GP} \cos(\theta_{GD}), \quad (71)$$

$$y_P = y_G + S_{GP} \sin(\theta_{GD}), \quad (72)$$

где

$$\theta_{GD} = \arctg\left(\frac{y_D - y_G}{x_D - x_G}\right). \quad (73)$$

### 2.3.2. Кривые постоянного направления

Точки кривой с постоянным направлением  $\theta = \theta^{\text{iso}}$  определяются тем же способом, что и кривые с постоянным числом Маха. Соотношения (69), (70) заменяются, соответственно, на:

$$(\theta^{\text{iso}} - \theta_G)(\theta^{\text{iso}} - \theta_D) \leq 0, \quad (74)$$

$$S_{GP} = S^{\text{iso}} = \frac{\theta^{\text{iso}} - \theta_G}{\theta_D - \theta_G} \sqrt{(x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2}. \quad (75)$$

Можно определить положение  $(x_P, y_P)$  точки  $P$  из соотношений (71) и (72), и для значения  $\theta_{GD}$  нужно использовать соотношение (73).

### 2.4. Масса сопла

Чтобы рассчитать массу сопла, рассмотрим следующие два допущения:

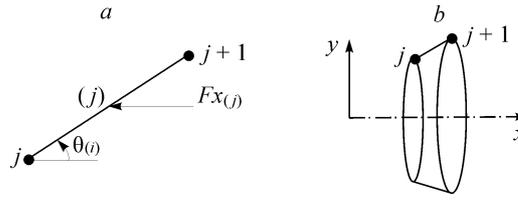
1. Форма стенки между двумя последовательными точками аппроксимируется прямой линией. Это допущение дает хороший результат, если число  $N_W$  точек очень велико.

2. Расходящаяся часть сопла сделана из материала, имеющего постоянную толщину  $t_M$  и плотность  $\rho_M$ .

Расчет массы сопла зависит от расчета его площади вращения. Поскольку имеется  $(N_W - 1)$  отрезков, то массу можно получить в безразмерном виде по формуле [23]:

$$\frac{\text{Mass}}{\rho_M t_M A_*} = C_{\text{Mass}} = \sum_{j=1}^{j=N_W-1} \frac{S_{(j)}}{A_*}, \quad (76)$$

Рис. 9. Представление отрезка сопла: сила давления (а), отрезок сопла (b).



где  $S(j)$  — площадь вращения круглого сопла, лежащая между точками  $j$  и  $j+1$  ( $j=1, 2, \dots, N_W-1$ ), как показано на рис. 9.

В соответствии с теоремой Гульдина [4], можно вычислить площадь сечения  $S_{(j)}$  в безразмерной форме по формуле

$$\frac{S_{(j)}}{A_*} = \left( \frac{y_i + y_{i+1}}{y_*} \right) \left[ \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{y_*} \right)^2 + \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{y_*} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (77)$$

### 2.5. Сила давления, действующая на стенку в расходящейся части

Для расчета силы давления, оказываемой на стенку, учитывают, что давление на сечение  $(j)$  (см. рис. 9) аппроксимируется по формуле

$$P_{(j)} = \sigma P_j + (1 - \sigma) P_{j+1}. \quad (78)$$

Для приложений берут  $\sigma = 0,5$ .

Таким образом, сила осевого давления  $F_x$  на стенку дается как сумма всех сил осевого давления на все сечения сопла. Получают в безразмерном виде [23]

$$\frac{F_x}{P_0 A_*} = C_{\text{Force}} = \sum_{j=1}^{j=N_W-1} \left( \frac{P_{(j)}}{P_0} \right) \left( \frac{S_{(j)}}{A_*} \right) \sin(\theta_{(j)}). \quad (79)$$

Отношение давлений в выражении (79) дается соотношением (44), а угол  $\theta_{(j)}$  можно получить из следующего соотношения:

$$\theta_{(j)} = \arctg \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} \right). \quad (80)$$

Значение  $A_*$  равно  $\pi y_*^2$  в соотношениях (77) и (79).

### 3. ОШИБКА, ВОЗНИКАЮЩАЯ ИЗ-ЗА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛИ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

Проведено сравнение результатов, получаемых при использовании обеих моделей. Для каждой пары значений  $(T_0, M_E)$  ошибка, вызываемая использованием ПГ-модели по сравнению с ВТ-моделью, может быть вычислена для каждого параметра проектирования по следующему соотношению:

$$\varepsilon_{\text{Параметр}} \% = \left| 1 - \frac{\text{Параметр}_{\text{ПГ}}}{\text{Параметр}_{\text{ВТ}}} \right| \times 100. \quad (81)$$

Слово “параметр” в соотношении (81) обозначает все параметры проектирования, в частности, длину сопла, массу конструкции, силу давления и отношение критических сечений.

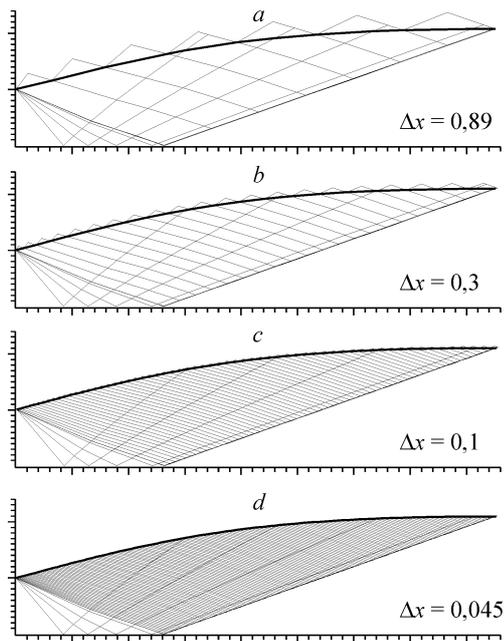


Рис. 10. Измельчение сетки в зоне перехода со степенью  $\Delta\theta = 3,0$  и  $N_i = 0$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

##### 4.1. Сетка на характеристиках

На рис. 10–13 показаны сетки на характеристиках в каждой области течения при использовании различных параметров, влияющих на генерацию сетки. Важен каждый параметр, так как он влияет на результаты проектирования. Сверхзвуковое течение зависит от условий вверх по потоку. Погрешность в начале расчета (горло) будет распространяться и достигнет довольно больших значений в выходном сечении. Кроме того, есть погрешности,

связанные с математическими операциями, которые называют искусственной вязкостью. Выбранный пример относится к случаю  $T_0 = 2000$  К,  $M_E = 3,00$ , что дает  $\theta^* = 13,08$  градусов. Физически поле течения, подлежащее расчету, делится на две части: области ядра и перехода, но математически и численно его делят на четыре части: ядро, переход, зона вставки дополнительных характеристик  $C^-$  между первой регулярной характеристикой  $C^-$  и звуковой линией. Для каждой области имеется параметр, который интерпретирует полученную сетку. Каждая область объясняется одним из четырех рисунков.

Измельчение сеток в зоне перехода путем варьирования безразмерного шага  $\Delta x$  представлено на рис. 10, при этом другие параметры не варьировались. Численные результаты представлены в табл. 1. Легко оценить полученную погрешность на выходном луче. Распространение погрешности нежелательно по той причине, что она влияет на погрешности в трех других областях, следовательно, на результаты проектирования. Можно получить результаты с ошибкой  $10^{-5}$ , если одновременно измельчать сетку в других областях. Значения  $N_C$ ,  $\theta^*$ ,  $M^*$  и длина ядра не зависят от дискретизации зоны перехода. Они зависят, прежде всего, от  $\Delta\theta$ ,  $N_i$  и  $\delta$ . Для

Таблица 1

Влияние измельчения сетки в зоне перехода на сходимость параметров проектирования при  $T_0 = 2000$  К,  $M_E = 3,00$ ,  $\Delta\theta = 0,1$  град. и  $N_i = 0$

$\Delta x$	$N_w$	$Y_E/y_*$	$L/y_*$	$C_{\text{масса}}$	$C_{\text{сила}}$	$\varepsilon$ (%)
2,0	143	2,20007	8,482	35,523	0,302	3,153
1,0	146	2,22219	8,891	34,682	0,315	1,168
0,7	149	2,22689	8,909	34,815	0,320	0,741
0,5	153	2,22960	8,920	34,893	0,324	0,496
0,3	162	2,23158	8,966	34,782	0,329	0,318
0,1	206	2,23271	9,050	34,462	0,333	0,216
0,07	235	2,23279	9,042	34,501	0,334	0,209
0,05	273	2,23285	9,051	34,467	0,334	0,204
0,03	363	2,23290	9,043	34,504	0,334	0,199
0,01	809	2,23291	9,051	34,469	0,335	0,198

Рис. 11. Измельчение сетки в зоне ядра без вставки дополнительных характеристик  $C^-$  для  $\Delta x = 0,30$ .

предложенного примера полученные значения равны, соответственно,  $N_C = 139$ ,  $\theta^* = 13,135$  градусов,  $M^* = 1,513$  и  $L_d/y_* = 2,7361$ .

На рис. 11 сетка измельчалась в зоне ядра без вставки дополнительных линий  $C^-$ . Пример *a* этого рисунка — это случай *b*, рис. 10. Уменьшая шаг  $\Delta\theta$ , можно получить другие конфигурации, представленные в вариантах рис. 11, *b*, *c*, *d*. Полученные численные результаты проектирования представлены в табл. 2. Здесь все параметры зависят от шага  $\Delta\theta$ . Рассмотрение ошибки, полученной на выходном луче, показывает, что измельчение в этой области может привести к уменьшению ошибки. Можно прийти до 0,03 %, если взять шаг  $\Delta\theta = 0,005$  градуса. Если скомбинировать случаи *d* рис. 10 и 11, можно получить ошибку  $\varepsilon = 10^{-5}$ .

На рис. 12 показаны некоторые сетки с введением дополнительных линий  $C^-$  для  $\delta = 2$ . Случай *a* этого рисунка — это случай *a* рис. 11 без учета влияния сгущения сетки. В трех других случаях рис. 12, *b*, *c*, *d* вставляли, соответственно,  $N_i = 5, 10$  и  $50$  линий  $C^-$ . Полученные численные результаты проектирования представлены в табл. 3. Изучая ошибку, полученную для каждого  $N_i$ , можно получить точность  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Результаты в области ядра зависят от результатов, полученных в области, лежащей сразу после вставки дополнительной линии  $C^-$ . Заметим, что имеется прогрессирующее закрытие в направлении горла, а также уменьшение расстояния между первой линией  $C^-$  (вставленной) и звуковой линией.

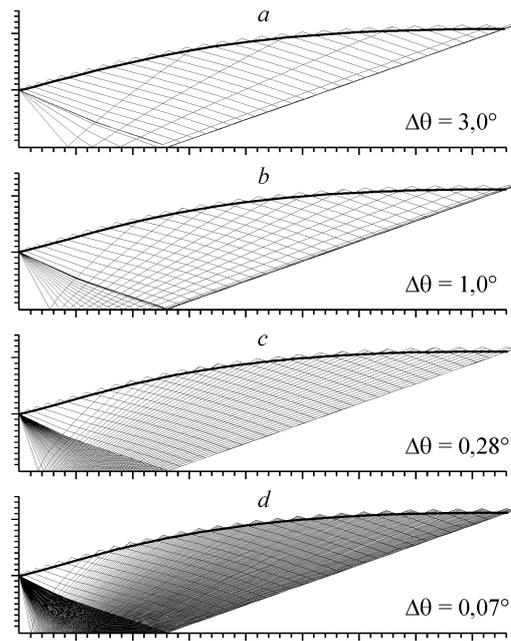


Таблица 2

Влияние измельчения в зоне ядра на сходимость параметров проектирования для  $T_0 = 2000$  К,  $M_E = 3,00$ ,  $\Delta x = 0,05$  и  $N_i = 0$

$\Delta\theta$ (°)	$Y_E/y_*$	$L/y_*$	$C_{\text{масса}}$	$C_{\text{сила}}$	$\varepsilon$ (%)
2,0	2,2153	9,025	34,018	0,287	1,798
1,0	2,2231	9,026	34,271	0,305	1,084
0,7	2,2258	9,034	34,332	0,312	0,832
0,5	2,2279	9,039	34,370	0,318	0,647
0,3	2,2301	9,045	34,415	0,324	0,445
0,1	2,2328	9,051	34,467	0,334	0,204
0,07	2,2333	9,031	34,566	0,336	0,160
0,05	2,2336	9,032	34,573	0,338	0,128
0,03	2,2341	9,032	34,580	0,340	0,092
0,01	2,2346	9,033	34,589	0,343	0,047

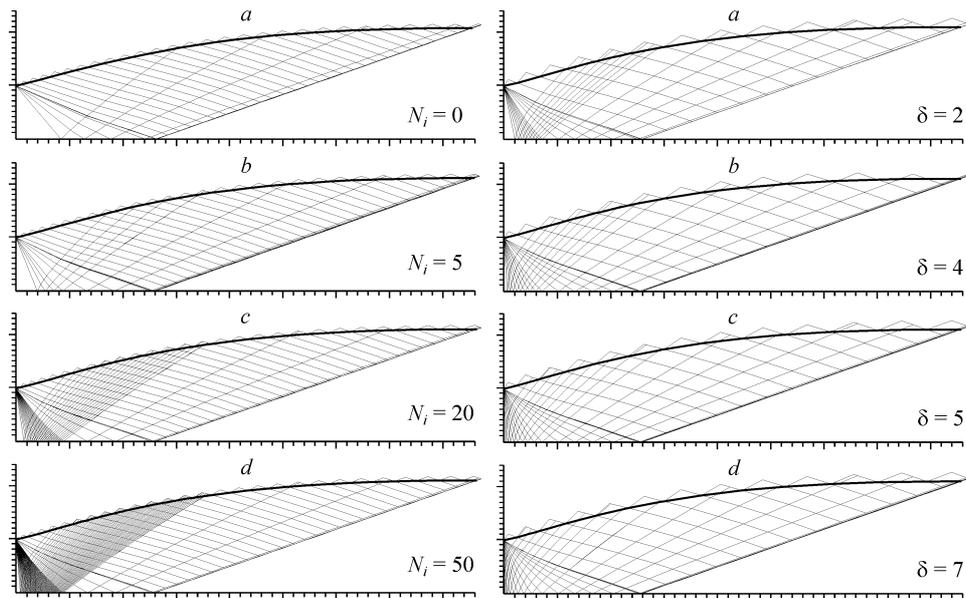


Рис. 12. Вставка дополнительных линий  $C^-$  в зоне ядра для  $\delta = 2$ ,  $\Delta\theta = 3,0$  и  $\Delta x = 0,23$ .

Рис. 13. Влияние коэффициента  $\delta$  на качество сетки с  $\Delta\theta = 2,0$  градусов,  $\Delta x = 0,5$  и  $N_i = 10$ .

На рис. 13 показаны сетки при изменении коэффициента  $\delta$  функции (46) для цели хорошего представления стенки в районе горла. Если  $\delta$  велико, то расстояние между звуковой линией и первой линией  $C^-$  уменьшается, что влияет на результаты проектирования, в частности, на представление стенки в горле. Численные результаты проектирования для различных значений  $\delta$  представлены в табл. 4. При сравнении результатов табл. 3 при  $N = 10$  и результатов табл. 4 замечено, что можно уменьшить ошибку с  $10^{-3}$  до  $10^{-4}$ , что демонстрирует влияние этого коэффициента на представление сетки и на результаты проектирования.

Если взять одновременно параметры случая (d) каждого рисунка, то можно приближенно получить ошибку  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Как уже отмечено, имеется большой интерес в измельчении сетки на стенке в окрестности горла. Из рис 10–13 выходит, что проектировать сопло с умеренным числом точек на стенке можно, если использовать измельчение сетки путем вставки дополнительных характеристик  $C^-$ .

Таблица 3

Влияние добавления линий  $C^-$  в области ядра на сходимость параметров проектирования для  $T_0 = 2000\text{K}$ ,  $M_E = 3,00$ ,  $\Delta\theta = 0,01$  градусов,  $\Delta x = 0,01$  и  $\delta = 3$

$N_i$	$Y_E/y_*$	$L/y_*$	$C_{\text{масса}}$	$C_{\text{сила}}$	$\varepsilon$ (%)
0	2,2346	9,04997	34,51844	0,3443	0,043
1	2,2346	9,04997	34,51844	0,3443	0,043
2	2,2346	9,04997	34,51844	0,3443	0,043
5	2,2350	9,05014	34,52450	0,3472	$9,1 \cdot 10^{-3}$
10	2,2351	9,05011	34,52541	0,3481	$3,0 \cdot 10^{-3}$
20	2,2351	9,05008	34,52566	0,3486	$1,1 \cdot 10^{-3}$
30	2,2351	9,05008	34,52574	0,3488	$6,9 \cdot 10^{-4}$
50	2,2351	9,05007	34,52574	0,3489	$4,3 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4

Влияние коэффициента  $\delta$  на сходимость параметров проектирования для  $T_0 = 2000\text{К}$ ,  $M_E = 3,00$ ,  $\Delta\theta = 0,01$  градусов,  $\Delta x = 0,01$  и  $N_i = 10$

$\delta$	$Y_E/y_*$	$L/y_*$	$C_{\text{масса}}$	$C_{\text{сила}}$	$\varepsilon$ (%)
1	2,23494	9,05015	34,52328	0,3465	$1,6 \cdot 10^{-2}$
2	2,23505	9,05014	34,52489	0,3476	$6,6 \cdot 10^{-3}$
3	2,23510	9,05011	34,52541	0,3481	$3,0 \cdot 10^{-3}$
4	2,23511	9,05017	34,52523	0,3484	$1,5 \cdot 10^{-3}$
5	2,23512	9,05019	34,52515	0,3485	$1,0 \cdot 10^{-3}$
6	2,23512	9,05020	34,52510	0,3485	$8,4 \cdot 10^{-4}$
7	2,23512	9,05020	34,52506	0,3485	$8,3 \cdot 10^{-4}$
8	2,23512	9,05020	34,52507	0,3486	$8,1 \cdot 10^{-4}$

Значения  $N_C$  и  $N_W$ , соответствующие результатам табл. 4, равны, 1323 и 1992 соответственно.

#### 4.2. Влияние $T_0$ на контур стенки

Формы сопел, дающие, соответственно,  $M_E = 1,50, 2,00, 3,00, 4,00, 5,00$  и  $6,00$  в выходном сечении, показаны на рис. 14. Каждый случай содержит 4 кривые, где три из них для ВТ-модели и соответствуют  $T_0 = 1000, 2000$ , и  $3000$  К, четвертая — для СГ-модели при  $\gamma = 1,402$ .

В соответствии с формами, полученными на рис. 14, *a*, заметно очень малое различие между четырьмя кривыми.

Рис. 14, *b* показывает форму сопла при  $M_E = 2,00$ . Видно, что различие всегда малое, но больше, чем ошибка в сравнении со случаем *a*.

Увеличивая выходное число Маха, рис. 14, *c-f* представляет, соответственно, контуры, полученные для  $M_E = 3,00, 4,00, 5,00$  и  $6,00$ .

Можно сказать, что если  $T_0$  увеличивается, то различие между СГ- и ВТ-моделями увеличивается и становится значительным, если  $T_0 > 1000$  К независимо от  $M_E$ , или при  $M_E > 2,00$  для любого значения  $T_0$ . Этот предел можно найти, если выбрать ошибку  $\varepsilon$  ниже, чем 5 %.

Перед изучением рис. 14 была исследована дискретизация на стенке путем увеличения чисел  $N$ ,  $N_i$  и  $\delta$ , и каждый раз определяли параметры проектирования и вычисляли относительную ошибку, данную безразмерным радиусом выходного сечения с использованием соотношения (82) до тех пор, пока не будет достигнута точность  $10^{-4}$ .

$$\varepsilon_{(y_E/y_*)} (\%) = \left| 1 - \frac{(y_E/y_*)_{\text{расчет}}}{(y_E/y_*)_{\text{теория}}} \right| \times 100. \quad (82)$$

Расчетные и теоретические отношения  $y_E/y_*$  даются соотношениями (64) и (67) соответственно.

Было замечено, что длина ядра, длина сопла, масса конструкции и сила давления сходятся к точному решению раньше, чем радиус выходного сечения. Это свойство является преимуществом при контроле только сходимости радиуса выходного сечения. Параметры сходятся убывающим образом, т. е. точное решение всегда ниже, чем численное решение. Нужно также отметить, что этот

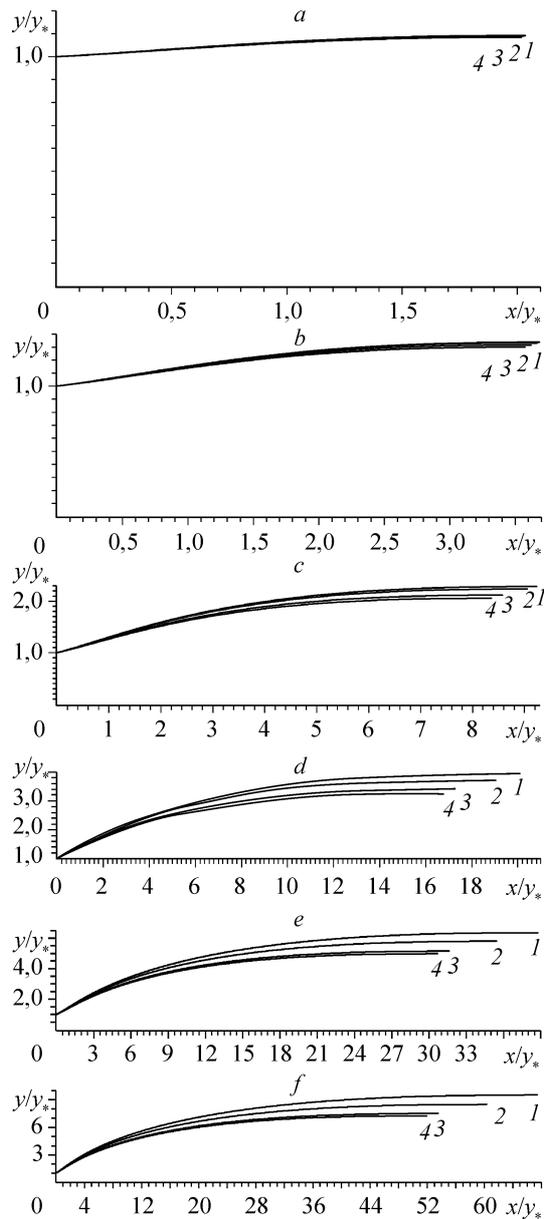


Рис. 14. Формы сопла, дающие различные числа Маха  $M_E$  в выходном сечении (a–f).

тип сопла имеет точку разворота с углом  $\theta_{\max}$  вблизи горла. Тогда угол отклонения стенки возрастает от  $\theta^*$  до  $\theta_{\max}$  и затем постепенно убывает до  $\theta = 0$  в выходном сечении. Положения точки разворота представлены в табл. 5 для ряда значений  $M_E$  и  $T_0$ , включая случай СГ-модели [3]. Число Маха и угол отклонения потока в точке разворота представлены в табл. 6.

### 4.3. Варьирование параметров вдоль стенки

На рис. 15, a–c представлено изменение термодинамических отношений ( $T/T_0$ ,  $\rho/\rho_0$ ,  $P/P_0$ ) вдоль стенки сопла при высокой температуре. Заметно уменьшение параметров в расширяющейся части. Влияние  $T_0$  на эти параметры хорошо представлено.

Таблица 5

Положение точки разворота

$M_E$	$\gamma = 1,402$		$T_0 = 1000 \text{ K}$		$T_0 = 2000 \text{ K}$		$T_0 = 3000 \text{ K}$	
	$x/y_*$	$y/y_*$	$x/y_*$	$y/y_*$	$x/y_*$	$y/y_*$	$x/y_*$	$y/y_*$
1,5	0,43	1,02	0,43	1,02	0,43	1,02	0,43	1,02
2,0	0,56	1,07	0,57	1,08	0,57	1,08	0,57	1,08
3,0	0,70	1,18	0,71	1,19	0,72	1,21	0,73	1,21
4,0	0,81	1,28	0,82	1,29	0,84	1,32	0,85	1,34
5,0	0,88	1,38	0,89	1,38	0,89	1,41	0,90	1,43
6,0	0,91	1,44	0,92	1,44	0,92	1,47	0,93	1,50

Отношение  $T/T_0$  позволяет нам сделать подходящий выбор материалов, которые могут сопротивляться этому распределению температуры и используются для определения внутреннего граничного условия для проведения исследования теплопередачи через материалы стенки.

Во время расширения газ охлаждается, при этом температура  $T_*$ , всегда выше, чем  $T_E$ . СГ-модель, дает охлаждение, сравнимое с реальным термодинамическим поведением, особенно если  $T_0$  увеличивается. Например, если  $T_0 = 2000 \text{ K}$ , то  $T_* = 1665$  и  $T_E = 1108 \text{ K}$  для СГ-модели, а для ВТ-модели  $T_* = 1737$  и  $T_E = 1232 \text{ K}$ . Поэтому получается разница в 72 К в горле и 124 К в выходном сечении.

Отношение  $P/P_0$  будет использоваться для определения силы давления, оказываемого на стенку и для определения количества газа, которое пересечет расширяющуюся часть, и это будет использоваться для определения продолжительности пребывания топлива.

Изменение угла отклонения потока на стенке сопла представлено на рис. 15, *d*. Видно наличие точки соотношения расширения  $S/S_0$  вблизи горла, где происходит расширение потока от  $\theta = 0$  до  $\theta = \theta^*$  в горле (внезапное расширение), увеличивается до  $\theta = \theta_{\max}$  в точке перегиба, после чего снижается до  $\theta = 0$  на выходе из сопла. Пересечение четырех кривых с вертикальной осью дает значение  $\theta = \theta^*$ . Значения  $\theta = \theta_{\max}$  даны в табл. 6.

В отличие от двумерного случая, для осесимметричной геометрии отсутствуют аналитические формулы, связывающие параметры  $\theta^*$  и  $M_E$ , поэтому проверяется соотношение  $\theta^* = v_E/2$  [2, 17], где  $v_E$  — значение функции Прандтля–Майера, соответствующее выходному числу Маха  $M_E$ . Видно, что значение  $\theta^*$  в осесимметричном случае ниже, чем  $\theta^*$  в двумерном случае:

$$\theta_{\text{осесимметричное}}^* < \frac{\theta_{\text{двумерное}}^*}{2}. \quad (83)$$

Таблица 6

Значения  $M$  и  $\theta$  в точке разворота

$M_E$	$\gamma = 1,402$		$T_0 = 1000 \text{ K}$		$T_0 = 2000 \text{ K}$		$T_0 = 3000 \text{ K}$	
	$M$	$\theta$ (°)	$M$	$\theta$ (°)	$M$	$\theta$ (°)	$M$	$\theta$ (°)
1,5	1,27	3,75	1,27	3,91	1,27	4,01	1,27	4,05
2,0	1,50	8,28	1,50	8,66	1,50	9,00	1,51	9,11
3,0	1,84	15,44	1,84	16,10	1,86	17,09	1,87	17,46
4,0	2,07	20,25	2,07	20,95	2,10	22,38	2,12	23,10
5,0	2,23	23,55	2,24	24,22	2,26	25,79	2,28	26,79
6,0	2,35	25,87	2,36	26,54	2,37	28,13	2,40	29,25

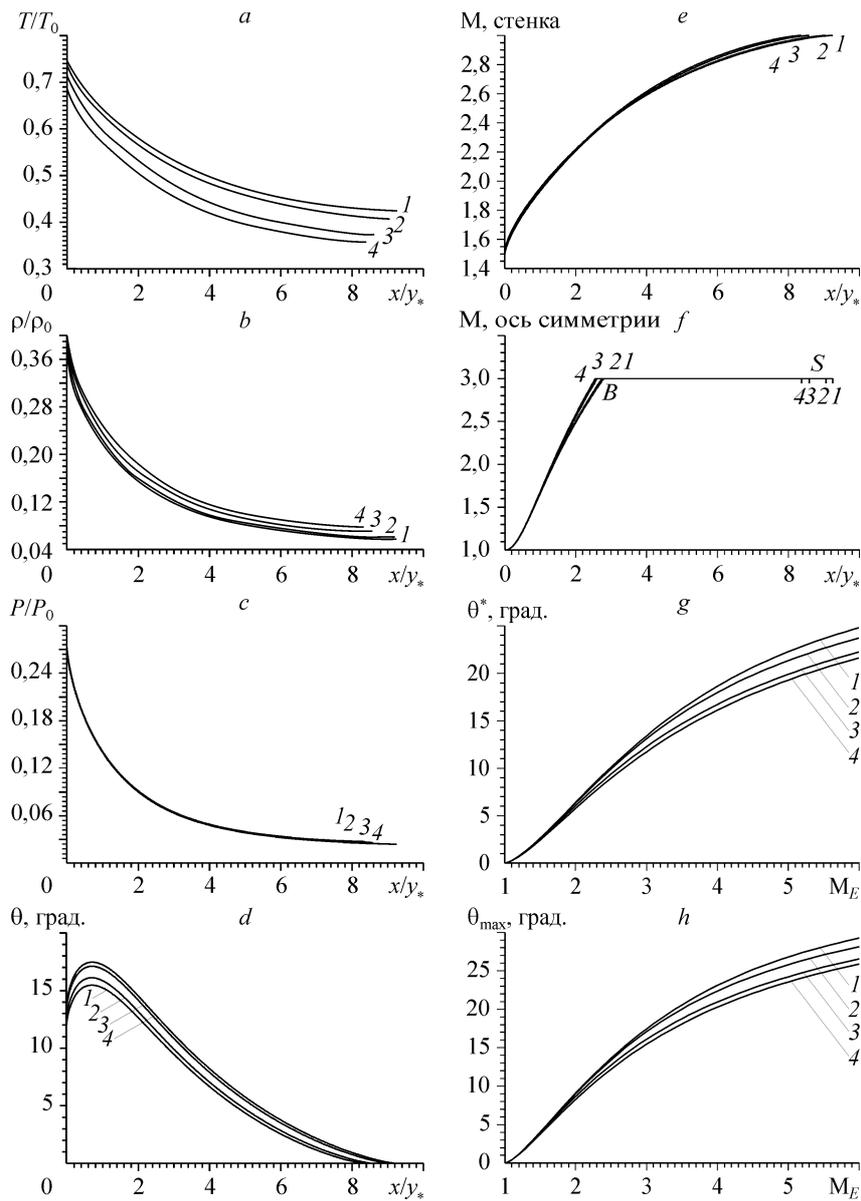


Рис. 15. Изменения  $T/T_0$  (a),  $\rho/\rho_0$  (b),  $P/P_0$  (c),  $\theta^*$  (d),  $M$  (e) вдоль стенки для  $M_E = 3,00$ ; изменение  $M$  вдоль оси симметрии для  $M_E = 3,00$  (f), изменении угла  $\theta^*$  (g) и угла  $\theta_{\max}$  в зависимости от  $M_E$  (h).

Изменение числа Маха на стенке сопла представлено на рис. 15, e. Здесь показано увеличение числа Маха, что интерпретируется расширением газа. Сравнивая рис. 15, e и 15, c, видим, что увеличение числа Маха дает снижение давления. Пересечение четырех кривых на рис. 15, e с вертикальной осью дает значения  $M^*$ . В этой точке имеется резкое изменение от  $M = 1$  до  $M = M^*$  сразу после горла. Значения  $M^*$  для осесимметричного случая ниже, чем для двумерного.

На рис. 15, f видна постоянная часть четырех кривых. Эта часть указывает на область равномерного потока BE (см. рис. 1). Другая часть указывает на изменение

числа Маха на оси симметрии в области ядра от  $M = 1$  до  $M = M_E$  ( $M_E = 3,00$  для нашего примера). Длина ядра различна для всех четырех кривых.

Рис. 15, *e, f* показывают, что течение осесимметричное. Для данного сечения число Маха убывает по радиусу сопла. Например, при  $T_0 = 3000$  К и  $x/y_* = 2,00$  число Маха будет приблизительно равно  $M = 2,56$  на оси симметрии и  $M = 2,21$  на стенке.

#### 4.4. Изменение параметров проектирования в соответствии с числом Маха на выходе

Изменение параметров проектирования сопла, требуемое при высокой температуре для того, чтобы иметь равномерный и параллельный поток в выходном сечении, показано на рис. 15, *g, h*–16. Ясно, что  $T_0$  влияет на все параметры проектирования и что чем более высокое значение  $T_0$  берется, тем больше различие между двумя моделями, что приводит к потребности учета  $T_0$ . Кривые 3 и 4 на каждом рисунке представляют собой, соответственно, результаты ВТ-модели при  $T_0 = 1000$  К и для СГ-модели ( $\gamma = 1,402$ ). Видно, что четыре кривые почти совпадают вплоть до числа Маха  $M_E = 2,00$ , затем начинают все более расходиться с ростом  $M_E$  и  $T_0$ . Этот результат объясняется адекватностью использования СГ-модели для проектирования сверхзвуковых сопел до тех пор, пока  $M_E$  либо ниже, чем 2,00 независимо от  $T_0$ , либо если  $T_0 < 1000$  К независимо от  $M_E$ .

Рис. 15, *g* показывает, что, чем выше число Маха в выходном сечении, тем больше сопло становится открытым к горлу, чтобы обеспечить достаточное расширение и равномерный и параллельный поток. Аналогично, при заданном числе Маха, даже если  $T_0$  растет, сопло должно быть открытым в горле.

Существование точки разворота на стенке сопла в окрестности горла, имеющего значение  $\theta_{\max}$  вблизи  $\theta^*$ , показано на рис. 15, *h*. Это не имеет места для двумерной геометрии. В табл. 5 и 6 представлены положение, а также число Маха в точках разворота для некоторых значений  $M_E$  и  $T_0$ .

На рис. 16, *a* определяется число Маха  $M^*$  сразу после расширения (в точке А) горла, которое необходимо для обеспечения равномерного и параллельного потока на выходе. Это число Маха представляет собой значение в первой точке последней линии  $C^-$  зоны ядра.

Изменение длины ядра при высокой температуре дано на рис. 16, *b* в зависимости от  $M_E$ . Чем более высокое значение числа Маха обеспечивает сопло на выходе, тем больше его длина  $L_d$ . Этот рисунок показывает, что можно непосредственно вывести длину сопла, не делая расчет в зоне перехода, считая, что поток в зоне  $BSE$  равномерный и параллельный.

Длина сопла, представленная на рис. 16, *c* связана с длиной ядра соотношением (84). Отношение критических сечений в этой формуле вычисляется согласно (67):

$$\frac{L}{y_*} = \frac{L_d}{y_*} + \frac{A_E}{A_*} \sqrt{M_E^2 - 1}. \quad (84)$$

На рис. 16, *d* показано изменение радиуса выходного сечения. Значение радиуса получается численным расчетом с помощью соотношения (64) с ошибкой, меньшей, чем  $10^{-4}$ .

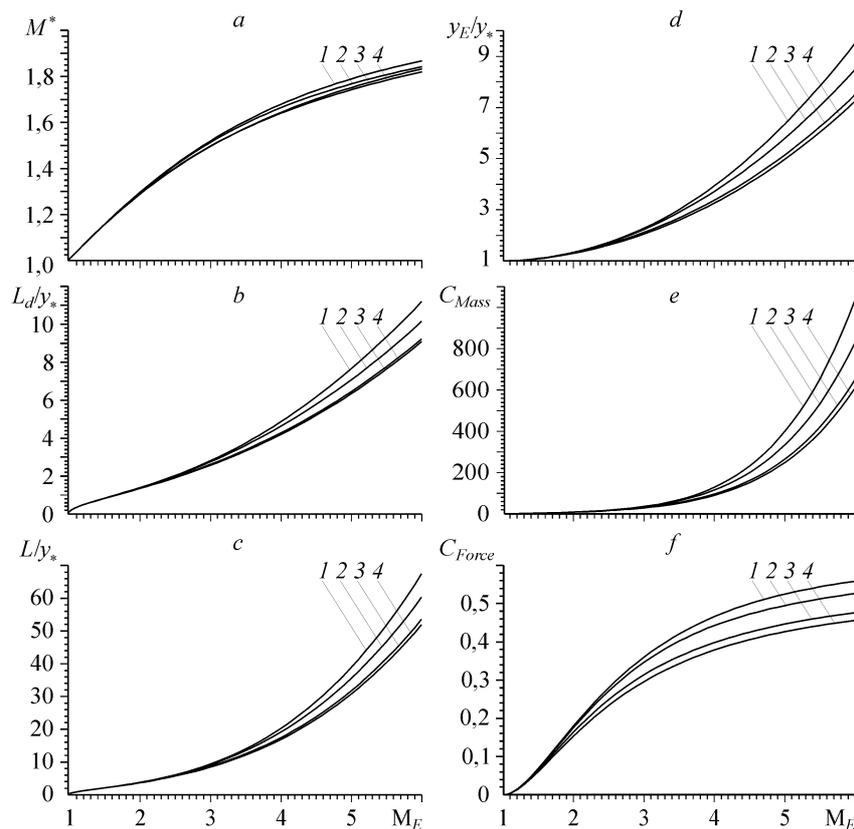


Рис. 16. Изменения  $M^*$  (a),  $L_d$  (b),  $L$  (c) в зависимости от  $M_E$ , изменения радиуса выходного сечения (d),  $C_{mass}$  (e), изменение  $C_{сила}$  (f) в зависимости от  $M_E$ .

Можно начертить кривые этого рисунка независимо от проектного вычисления (течение одномерное). Достаточно определить значение  $T_E$ , соответствующее  $M_E$ , и  $T_*$ , соответствующее  $T_0$ , затем проинтегрировать функцию  $F_A(T)$  с использованием соотношения (67), чтобы получить радиус выходного сечения.

Изменение в безразмерной форме массы сопла и силы давления на стенке, необходимых для получения равномерного и параллельного потока в выходном сечении сопла, показано, соответственно, на рис. 16, e, f.

#### 4.5. Изменение параметров проектирования в соответствии с температурой торможения

Для сравнения обеих моделей на рис. 17 показано изменение различных параметров проектирования в соответствии с  $T_0$  при  $M_E = 3,00$ . СГ-модель представлена горизонтальной линией с учетом того, что она не зависит от  $T_0$ . ВТ-модель зависит, в первую очередь, от  $T_0$ . Видно, что при  $T_0 < 240\text{K}$  ВТ-модель не дает никакой поправки к СГ-модели, где  $\varepsilon = 0,0$ . С увеличением  $T_0$  растет различие между двумя моделями, и оно становится значительным, начиная с  $T_0 > 1000\text{K}$ . При  $T_0 < 1000\text{K}$  изменение всех параметров не превышает 5%. Если начертить рис. 17 для других значений  $M_E$ , то различие между двумя моделями уменьшается, если  $M_E$  убывает, и увеличивается, если  $M_E$  растет.

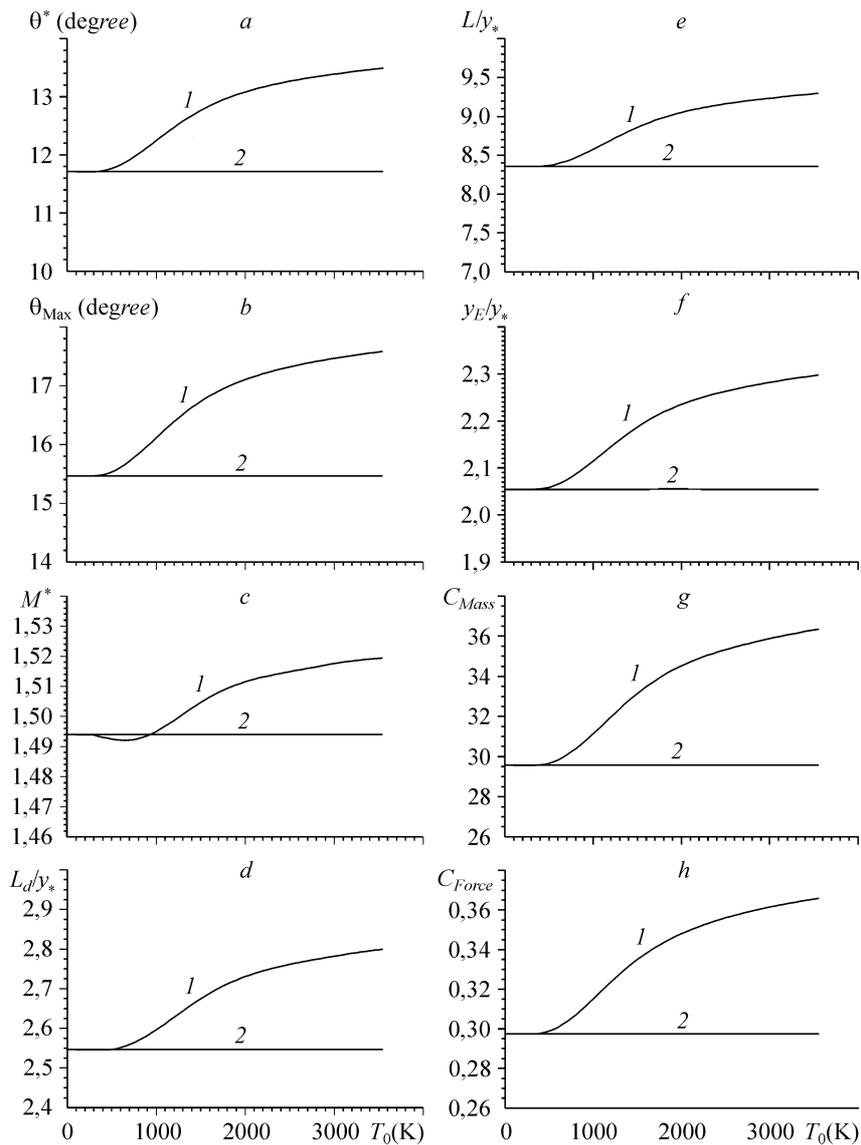


Рис. 17. Изменения длины сопла (а), угла  $\theta_{\max}$  (b),  $M^*$  (c),  $L_d$  (d),  $L$  (e), в зависимости от  $T_0$ , изменения радиуса выходного сечения (f),  $C_{\text{mass}}$  (g),  $C_{\text{Force}}$  (h) в зависимости от  $T_0$   
 НТ модель (1), PG модель (2) при  $M_E = 3,00$ .

#### 4.6. Погрешность модели совершенного газа

На рис. 18 показано изменение относительной ошибки, данной, соответственно, длиной сопла, массой конструкции и силой давления СГ-модели в сравнении с ВТ-моделью для некоторых значений  $T_0$ .

Ясно видно, что ошибка зависит от значений  $T_0$  и  $M_E$  и растет с увеличением  $T_0$ . Например, при  $T_0 = 2000$  К и  $M_E = 2,50$  использование СГ-модели дает относительную ошибку, равную  $\varepsilon = 10\%$  для длины,  $\varepsilon = 5\%$  для массы конструкции и  $\varepsilon = 13\%$  для силы давления. Можно заметить, что при низком значении  $M_E$  и  $T_0$  ошибка  $\varepsilon$  мала. На этих рисунках кривая 3 лежит ниже ошибки 5%. Это

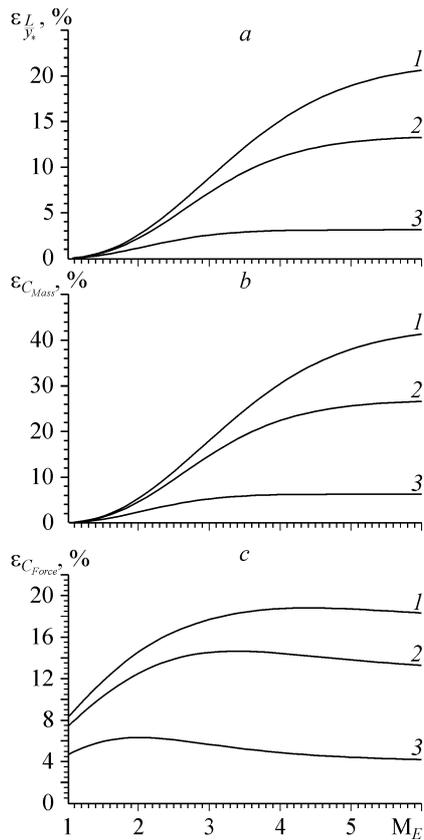


Рис. 18. Изменение относительной ошибки, заданной параметрами проектирования СГ-модели, в зависимости от  $M_E$ .

Длина (a), масса (b), сила давления (c).

положение позволяет использовать потенциал СГ-модели до  $T_0 = 1000$  К для приложений в аэронавтике. Но если поднимать  $T_0$ , то ошибка растет, и в этом случае можно использовать СГ-модель независимо от  $T_0$ , если число Маха не превышает  $M_E = 2,00$ .

Можно получить относительную ошибку при  $M = 1$  (пересечение кривых с вертикальной осью ошибки) для каждого параметра, используя соотношения (85), (86), (87). Неопределенность в соотношении (86) устраняется с использованием соотношения (76). Для силы давления используется соотношение (79).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(L/y_*)}(M=1) &= \\ &= \lim_{\substack{M \rightarrow 1 \\ T \rightarrow T_*}} \left| 1 - \frac{(L/y_*)_{СГ}(M)}{(L/y_*)_{ВТ}(T)} \right| \times 100 = 0, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\varepsilon_{(C_{\text{масса}})}(M=1) = \lim_{\substack{M \rightarrow 1 \\ T \rightarrow T_*}} \left| 1 - \frac{(C_{\text{масса}})_{СГ}(M)}{(C_{\text{масса}})_{ВТ}(T)} \right| \times 100 = 0, \quad (86)$$

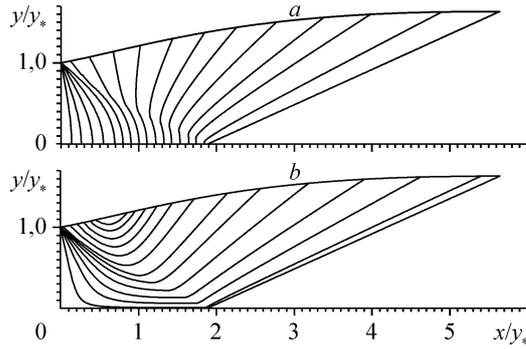
$$\begin{aligned} \varepsilon_{(C_{\text{сила}})}(M=1) &= \lim_{\substack{M \rightarrow 1 \\ T \rightarrow T_*}} \left| 1 - \frac{(C_{\text{сила}})_{РГ}(M)}{(C_{\text{сила}})_{НТ}(T)} \right| \times 100 = \\ &= \begin{cases} 4,724 \% \text{ для } T_0=1000 \text{ К} \\ 7,474 \% \text{ для } T_0=2000 \text{ К} \\ 8,368 \% \text{ для } T_0=3000 \text{ К} \end{cases} \end{aligned} \quad (87)$$

#### 4.7. Другие результаты

На рис. 19 показаны, соответственно, линии постоянного числа Маха и линии постоянных направлений.

Кривые, полученные в области перехода, не являются прямыми линиями с учетом того, что в этой зоне волны не являются простыми, в отличие от двумерного случая, где находили прямолинейные отрезки, см. [17]. Эти рисунки показывают, что течение осесимметричное с равномерным и параллельным потоком в выходном сечении.

Рис. 19. Кривые постоянного числа Маха (а), кривые постоянного направления (b).



На рис. 19, b кривые пересекают стенку сопла в двух точках, что указывает на существование точки перегиба, имеющей  $\theta = \theta_{\max}$ . Видно, что некоторые из кривых постоянных значений проходят возле точки А горла, что указывает на то, что эти кривые с постоянными числами Маха имеют число Маха  $M \leq M^*$  и кривые постоянного направления имеют  $\theta \leq \theta^*$ . Точки, в которых  $\theta = 0$  (нулевое направление), — точки горла, ось симметрии и все точки в треугольной области равномерного потока.

Формы четырех сопел, имеющих одинаковые выходные сечения, показаны на рис. 20. Кривые 1, 2, 3 для ВТ-модели, когда, соответственно,  $T_0 = 3000, 2000 \text{ К}, 1000 \text{ К}$ . Кривая 4 соответствует СГ-модели. Четыре сопла, имеющие выходное сечение СГ-случая для  $M_E = 3,00$ , которое равно  $y_E/y_* = 2,054$ . Можно показать с помощью соотношений (4) и (67), что они не обеспечивают одно и то же число Маха  $M_E$ . Этот рисунок показывает, что если рассмотреть спроектированные сопла на основе СГ-модели для приложений в аэронавтике, то можно заметить ухудшение эффективности, в частности, по числу Маха в выходном сечении с учетом того, что сопла имеют почти одинаковые размер и форму, за исключением небольшого различия в длине. Численные результаты для главных параметров представлены в табл. 7. При этом различии в длине поток почти равномерный. Форма используемого сопла не меняется за исключением термодинамического поведения воздуха в зависимости от температуры.

### 5. СРАВНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЕЛ

На рис. 21 показаны формы двумерных и осесимметричных сопел, дающих  $M_E = 3,00$  для  $T_0 = 2000 \text{ К}$ . Оба сопла имеют одинаковое выходное сечение. Безразмерное выходное сечение равно отношению выходного сечения для двумерного случая и равно квадратному корню из отношения выходного сечения для осесимметричного случая.

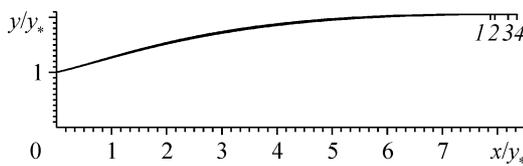


Рис. 20. Сопла, имеющие одно и то же отношение выходных сечений, дающее  $M_E = 3,00$  для СГ-модели.

Таблица 7

Численные значения для конструкции сопла на рис. 21

	$M_E$	$\theta$ (°)	$M^*$	$L/y_*$	$C_{\text{масса}}$	$C_{\text{сила}}$
$\gamma = 1,402$	3,00	11,71	1,49	8,35	29,56	0,29
$T_0 = 1000 \text{ К}$	2,94	11,92	1,48	8,18	28,99	0,30
$T_0 = 2000 \text{ К}$	2,84	12,13	1,48	7,94	28,10	0,32
$T_0 = 3000 \text{ К}$	2,81	12,20	1,48	7,87	27,83	0,33

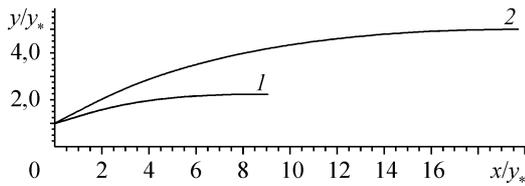


Рис. 21. Двумерное и осесимметричное сопла, дающие  $M_E = 3,00$  для  $T_0 = 2000$  К.

Сила давления, произведенная соплом, одинакова для обеих

геометрий.

Для массы сопла в действительности нельзя проводить сравнение по этому параметру с учетом того, что в двумерном случае не включена масса левой и правой стенок (они не существуют).

Двумерное сопло открыто в горле по сравнению с осесимметричным соплом. Полученные значения  $\theta^*$  удовлетворяли соотношению (83).

На рис. 22 сравниваются некоторые параметры проектирования. Длина осесимметричного сопла приблизительно равна квадратному корню из длины двумерного сопла.

### ВЫВОДЫ

С погрешностью до 5 % можно изучать сверхзвуковое течение с использованием СГ-соотношений, если температура торможения ниже 1000 К для любого значения числа Маха, или когда число Маха ниже 2,00 — для любой температуры торможения вплоть до приблизительно 3000 К.

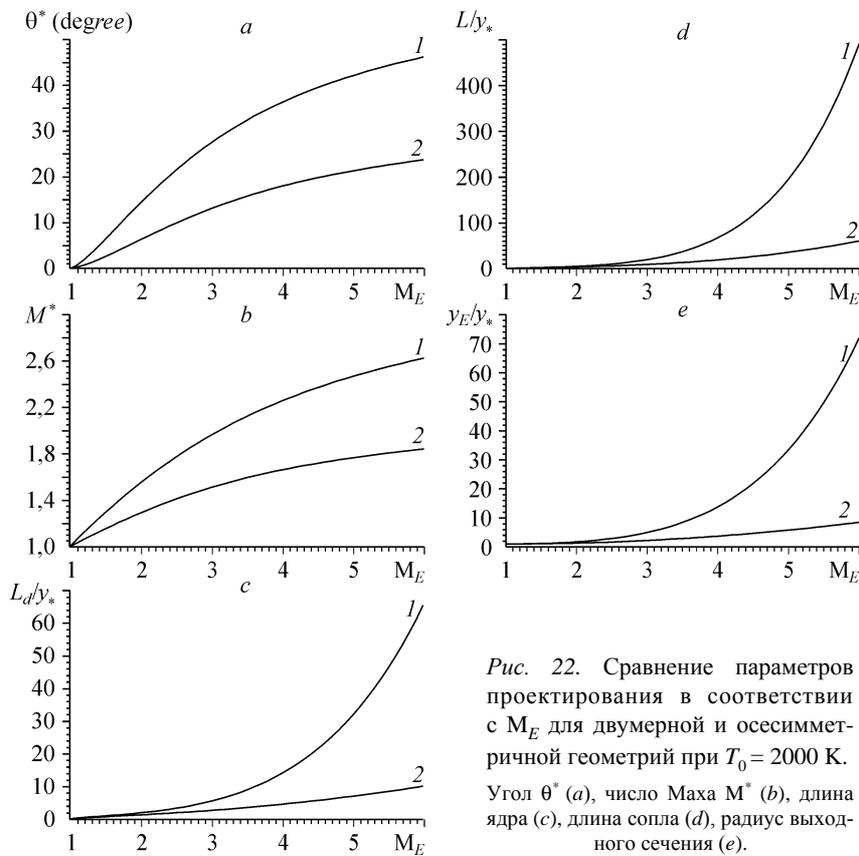


Рис. 22. Сравнение параметров проектирования в соответствии с  $M_E$  для двумерной и осесимметричной геометрий при  $T_0 = 2000$  К. Угол  $\theta^*$  (a), число Маха  $M^*$  (b), длина ядра (c), длина сопла (d), радиус выходного сечения (e).

Основная переменная для нашей модели — температура, а для СГ-модели — число Маха, принимая во внимание нелинейное неявное уравнение, связывающее эти два параметра.

Представленные соотношения справедливы для любой интерполяции, выбранной для функции  $C_p(T)$ . Существенно то, что выбранная интерполяция дает приемлемо малую ошибку. Можно выбрать другое вещество вместо воздуха. Соотношения остаются справедливыми, за исключением того, что необходимо иметь таблицу изменения  $C_p(T)$  от температуры и делать хорошую интерполяцию. Можно применять отношение теоретических сечений как источник сравнения для верификации численных результатов проектирования разнообразных сверхзвуковых сопел, дающих равномерный и параллельный поток в выходном сечении методом характеристик.

Можно получить соотношения для совершенного газа, исходя из соотношений ВТ-модели, аннулируя все члены интерполяций функции  $C_p(T)$ , за исключением первого. В этом случае СГ-модель становится частным случаем нашей ВТ-модели. Для низких температур и чисел Маха различие в результатах между двумя моделями мало, что дает возможность исследования ВТ-течения с помощью соотношений СГ-модели. Осесимметричное сопло имеет точку разворота.

Определение параметров поля течения с помощью алгоритма предиктор-корректор требует в случае ВТ-модели большего числа итераций в сравнении с СГ-моделью для достижения одинаковой точности. Различие в числе итераций примерно 30 %, что влияет на время машинного счета. Результаты проектирования по методу характеристик зависят, главным образом, от результатов вверх по потоку независимо от результатов вниз по потоку. Недостаточное число точек в горле не может дать быструю сходимость расчета к искомому решению. Использование СГ-модели для проектирования сверхзвукового сопла ухудшает реальную эффективность параметров проектирования, в частности, число Маха и силу давления, если температура в камере сгорания  $T_0$  высока.

Получение определенных параметров проектирования при использовании СГ-модели требует изменения формы сопла, которая поддерживает эти параметры. Расширение в осесимметричном сопле происходит быстрее по сравнению с двумерным соплом. Изменение температуры торможения дает бесконечное число профилей, имеющих одно и то же число Маха на выходе.

Автор благодарит Феттума Мебрека и Джамель, Хаулу, Абдельгани Зеббиче за то, что они потратили свое время на подготовку этой рукописи.

#### ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A$ — площадь поперечного сечения,	$MX$ — метод характеристик,
$A$ — скорость звука,	$N$ — число регулярных характеристик, распространяющихся вниз,
$C_F$ — коэффициент силы давления,	$N_i$ — число вставленных характеристик распространяющихся вниз,
$C_{Mass}$ — коэффициент массы сопла,	$P$ — давление,
$C_p$ — удельные теплоемкости при постоянном давлении,	$СГ$ — совершенный газ,
$C_y$ — интерполяционный коэффициент по ординате $y$ ,	$R$ — газовая постоянная,
$C_\theta$ — интерполяционный коэффициент параметра $\theta$ ,	$T$ — температура,
$C_T$ — интерполяционный коэффициент температуры $T$ ,	$x, y$ — декартовы составляющие,
$C_W$ — интерполяционный коэффициент отклонения отрезка стенки,	$\theta$ — угол отклонения потока,
$C^+$ — характеристика, распространяющаяся вправо,	$v$ — функция Прандтля—Майера,
$C^-$ — характеристика, распространяющаяся влево,	$\mu$ — угол Маха,
$F_x$ — сила давления на стенке сопла,	$\rho$ — плотность,
$H$ — энтальпия,	$\varepsilon$ — ошибка вычислений (желаемая точность),
	$\gamma$ — отношение удельных теплоемкостей,

BT — высокая температура,  
L — длина сопла,  
M — число Маха,  
СМД — сопло минимальной длины,

$\delta$  — коэффициент функции растяжения,  
 $\xi$  — линия Маха, направленная вниз,  
 $\eta$  — линия Маха, направленная вправо,  
a — интерполяционный коэффициент давления,  
 $\Delta x$  — безразмерный шаг на линии BE (рис. 1).

#### НИЖНИЕ ИНДЕКСЫ

13 — среднее значение между точками 1 и 3,  
23 — среднее значение между точками 2 и 3,  
3 — значение в точке 3,  
0 — условие торможения,  
\* — критическое условие,  
E — выходное сечение,  
d — зона ядра,  
(j) — отрезок,  
j — узел,  
W — стенка.

#### ВЕРХНИЕ ИНДЕКСЫ

\* — значение в горле сразу после расширения,  
K — итерация,  
iso — кривая с постоянным значением.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anderson J.D.Jr. Fundamentals of aerodynamics. New York, McGraw-Hill Book Company, 1982.
2. Anderson J.D.Jr. Modern compressible flow: with historical perspective. New York, McGraw-Hill Book Company, 1988.
3. Argrow B.M., Emanuel G. Comparison of minimum length nozzles // J. Fluid Engng. September. 1988. Vol. 110, P. 283–288.
4. Berger M. Géométrie: Convexes et poly-topes, polyèdres réguliers, aires et volumes. T. 3. Paris, Fernand Nathan. 1978.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
6. Dumitrescu L.Z. Minimum length axisymmetric laval nozzles // AIAA J. 1975. Vol. 13. P. 520–532.
7. Emanuel G. Gasdynamic: Theory and Application. New York // AIAA Educational Serie. 1986.
8. Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics: specific techniques for different flow categories. Vol. II. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. 1988.
9. Oosthuisen P.H., Carscallen W.F. Compressible fluid flow. New York: Mc Graw-Hill. Book Company. 1997.
10. Peterson C.R., Hill P.G. Mechanics and thermodynamics of propulsion. Addition-Wesley Publishing Company Inc, 1965.
11. Ralston A., Rabinowitz A.A. First course in numerical analysis. New York, McGraw Hill Book Company, 1985.
12. Rao G.V.R. Contoured rocket nozzles // Proc. 9th Inter. Astro-Fed. Congress, Amsterdam, 1958.
13. McLain D.H. Drawing contours from arbitrary data points // The Computer Journal. 1974. Vol. 17. P. 318–324.
14. Zebbiche T., Youbi Z. Fonction de Prandtl Meyer à haute température // Conférences Inter. de la Mécanique Avancée, Boumerdes, Algérie. 30 Nov.-02 Dec. 2004.
15. Zebbiche T., Youbi Z. Supersonic flow parameters at high temperature. application for air in nozzles // DGLR-2005-256. German Aerospace Congress. 26-29 Sep. 2005. Friedrichshafen, Germany.
16. Zebbiche T., Youbi Z. Supersonic plug nozzle design at high temperature. application for air. // AIAA Paper 2006-0592, 44th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 9-12 Jan. 2006. Reno Nevada, Reno Hilton, USA.
17. Zebbiche T., Youbi Z. Design of two-dimensional supersonic minimum length nozzle at high temperature. Application for air. // DGLR 2005-257. German Aerospace Congress. 26-29 Sep. 2005. Friedrichshafen, Germany.
18. Zebbiche T. New generalized form of the Prandtl Meyer function. application for air at high temperature // AIAA-2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, 5-8 June 2006, USA.
19. Zucker R.D., Bilbarz O. Fundamentals of Gasdynamics. New York: John Wiley & Sons, 2002.
20. Zucro M.J., Hoffman J.D. Gas Dynamics. New York: Wiley. 1976. Vol. 1, 2.
21. Zebbiche T. Stagnation temperature effect on the prandtl meyer function // AIAA Journal. 2007. Vol. 45, No. 4. P. 952–954.
22. Zebbiche T., Youbi Z. Effect of stagnation temperature on the supersonic flow parameters with application for air in nozzles // The Aeronautical Journal. 2007. Vol. 111, Jan. P. 31–40.
23. Zebbiche T. Supersonic axisymmetric minimum length nozzle conception at high temperature // AIAA paper AIAA-2008-3674, 40th AIAA Thermophysics Conference, 23-26 June 2008, Washington, USA.

*Статья поступила в редакцию 16 марта 2009 г.*