

УДК 532.5.013.12–532.5.013.13

О силах, действующих на неподвижный шар при обтекании потоком псевдопластической жидкости вблизи стенки

О.Б. Бочаров, Д.Ю. Кушнир

ОАО “Бейкер Хьюз”, Новосибирск

E-mail: Oleg.Bocharov@bakerhughes.com,
Dmitry.Kushnir@bakerhughes.com

Проведены анализ и оценка сил, действующих на частицы при их обтекании потоком псевдопластической жидкости при наличии стенки. По результатам обработки серийных расчетов для модельной задачи со сферической частицей возле плоской стенки в диапазоне чисел Рейнольдса 0–200 и расстояния до стенки от 0 до 20 диаметров частицы получены корреляционные формулы для вычисления коэффициентов силы сопротивления и подъемной силы. Особое внимание уделено поведению сил, действующих на частицу при ее приближении к стенке.

Ключевые слова: псевдопластическая жидкость, обтекание шара, течение у стенки, подъемная сила, сила сопротивления, численное моделирование.

Введение

Обтекание сферической частицы потоком жидкости — одна из классических проблем гидродинамики [1–3]. С практической точки зрения решение этой задачи позволяет найти силы, действующие на частицу со стороны несущей фазы. Далее эти силы используются для параметризации взаимодействия частиц с потоком в задачах гидро- и пневмотранспорта, в интерпретации реологических свойств суспензий и аэрозолей.

Структуры течений, возникающих при обтекании сферической частицы однородным потоком ньютоновской жидкости при различных режимах, достаточно хорошо изучены и описаны в научной литературе [1, 2].

При обтекании частицы потоком ньютоновской жидкости в течении Пуазейля в трубе при низких значениях чисел Рейнольдса экспериментально получено, что частицы в таком течении после достижения положения равновесия образуют кольцо диаметра 0,6 от диаметра трубы (“pinch”-эффект [4]). Это означает, что на частицу в неоднородном сдвиговом потоке кроме силы сопротивления действует так называемая подъемная сила, направленная перпендикулярно основному потоку жидкости.

Теоретические исследования, посвященные возникновению и вычислению силы, поперечной основному потоку, проводились рядом авторов [5–10]. В результате появились аналитические выражения для вычисления подъемной силы при малых числах Рейнольдса. Результаты численного моделирования представлены в работах [11, 12]. В этих работах проанализированы особенности обтекания сферической частицы

ламинарным сдвиговым потоком ньютоновской жидкости в среднем диапазоне чисел Рейнольдса. Для вычисления коэффициента подъемной силы в сдвиговом потоке в работе [13] приведены корреляционные зависимости, полученные на основе анализа предшествующих работ.

Вблизи стенки силы, действующие на частицу, отличаются от сил, действующих на частицу в однородном потоке. Здесь поток жидкости неизбежно становится сдвиговым из-за прилипания жидкости, что является причиной появления подъемной силы. Наличие стенки также приводит к так называемому эффекту экранирования, когда между стенкой и частицей возникает застойная зона, которая изменяет картину обтекания и может существенно повлиять на силы, действующие на частицу.

Влияние стенки на обтекание частицы для ньютоновской жидкости аналитически исследовалось при малых числах Рейнольдса в приближении Стокса и Озеена в работах [14–18]. Суммируя эти работы, можно выделить четыре типа постановок задачи (см. рис. 1): *a* — однородный профиль потока с движением стенки (эквивалентно движению частицы в неподвижной жидкости), *b* — линейный сдвиговый профиль потока с неподвижной стенкой, *c* — линейный сдвиговый профиль потока с движением стенки (эквивалентно движению частицы в сдвиговом потоке), *d* — параболический профиль потока с движением стенки (эквивалентно движению частицы в сдвиговом течении типа Пуазейля). При задании профилей *a* и *b* в указанных статьях предполагается, что частица неподвижна, вращение частицы не учитывается и рассчитываются сила сопротивления и момент сил, действующие на частицу. Показано, что сила сопротивления и подъемная сила возрастают при приближении частицы к стенке. При задании профилей *c* и *d* предполагается, что на частицу не действует сила сопротивления и момент сил, и вычисляются скорость частицы относительно жидкости, подъемная сила и угловая скорость вращения частицы. В случае *d* подъемная сила меняет знак на некотором расстоянии от стенки, т.е. возникает равновесное положение, что согласуется с экспериментами [4].

Дальнейшее развитие и обобщение на случай чисел Рейнольдса, больших 1 ($2 \div 250$), для ньютоновской жидкости эта проблема получила в работах [19, 20]. С помощью численного моделирования в указанных статьях решалась задача в постановках *a* и *b*, расстояние от центра частицы до стенки варьировалось от 0,505 до 4 диаметров частицы. Моделирование обтекания частицы вблизи стенки проводилось с помощью решения уравнений Навье–Стокса методом конечных элементов с базисными функциями в виде полиномов. Были представлены корреляционные формулы для коэффициентов сопротивления и подъемной силы. Для подъемной силы, действующей на движущуюся в неподвижной жидкости частицу вблизи стенки, было приведено сравнение с экспериментальными данными [21]. Показано, что вблизи стенки поток жидкости

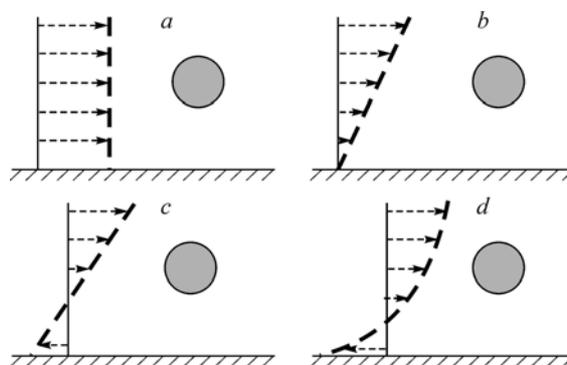


Рис. 1. Возможные постановки задачи в присутствии стенки.

за частицей существенно отличается от потока за частицей, находящейся на значительном удалении от стенки.

Следует учитывать, что несущая фаза может иметь различную реологию [3]. Обтекание частиц потоком неньютоновской жидкости изучено в гораздо меньшей степени, чем в случае ньютоновской. Неньютоновская жидкость, в частности со степенным реологическим законом, исследовалась в ряде экспериментальных и теоретических работ, посвященных обтеканию сферической частицы свободным однородным потоком [3]. В статье [22] приведены корреляционные зависимости для коэффициента силы сопротивления в случае степенной жидкости.

Исследование обтекания частицы сдвиговым потоком степенной и, в частности, псевдопластической жидкости при наличии стенки не проводилось. Целью настоящей работы является моделирование и анализ обтекания частицы ламинарным потоком псевдопластической жидкости в постановке b в широком диапазоне чисел Рейнольдса ($0 \div 200$) и расстояний до стенки ($0 \div 20$ диаметров частицы).

Формулировка задачи

При обтекании сферической частицы ламинарным однородным потоком в свободном пространстве течение жидкости является осесимметричным относительно оси, проходящей через центр частицы вдоль направления потока на бесконечности, и задача сводится к двумерной. При наличии стенки или в случае сдвигового потока двумерным приближением обойтись не удастся, так как в этом случае задача не имеет оси симметрии. Плоскость симметрии, проходящая через центр частицы перпендикулярно стенке, позволяет уменьшить область моделирования вдвое.

Задача решается в предположении плоской стенки. В силу того, что стенка плоская, область моделирования представляет собой прямоугольный параллелепипед конечного размера со сферической частицей внутри (рис. 2). Начало системы координат совпадает с центром сферы.

Моделируется обтекание неподвижной частицы стационарным ламинарным потоком неньютоновской псевдопластической жидкости. Движение жидкости описывается стационарной системой уравнений гидродинамики для обобщенной ньютоновской несжимаемой жидкости [1–3]:

$$\rho(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\nabla p + \nabla \tau, \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (1)$$

где \vec{V} — вектор скорости жидкости, p — давление, ρ — плотность жидкости, τ — тензор напряжений. Реологический закон, выражающий связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций, для степенной жидкости записывается в следующем виде:

$$\tau = \mu_{\text{eff}}(\gamma) \cdot \gamma = k |\gamma|^{n-1} \gamma, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial j} + \frac{\partial V_j}{\partial i} \right),$$

$$i, j = x, y, z,$$

где $\mu_{\text{eff}}(\gamma)$ — эффективная вязкость, γ — тензор скоростей деформации, n — показатель степени, k — индекс вязкости. Для ньютоновской жидкости $n = 1$, для псевдопластической — $n < 1$.

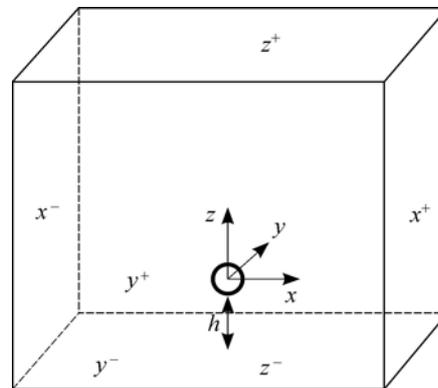


Рис. 2. Область моделирования в задаче обтекания сферической частицы вблизи стенки.

Далее компоненты вектора скорости \vec{V} вдоль осей x, y, z обозначим u, v, w соответственно. На входной границе x^- и на границе y^+ задается линейный профиль скорости $u = u_0(z) = u_p \cdot (z + h + 0,5d)/(h + 0,5d)$, здесь компоненты v и w равны 0, u_p — скорость потока на бесконечности напротив центра частицы, h — расстояние от края частицы до стенки, d — диаметр частицы. Линейный профиль $u_0(z)$ удовлетворяет уравнениям (1) для степенной жидкости при отсутствии частицы и перепада давления. На твердой стенке z^- и поверхности сферической частицы ставится условие прилипания. На границе z^+ задается профиль скорости $\vec{V} = (u_0(z+), 0, 0)$, согласованный с профилем на входной границе x^- . На плоскости симметрии y^- ставится условие симметрии для поля скоростей и давления. На выходной границе x^+ ставится условие свободного выхода — $\partial \vec{V} / \partial x = \vec{0}$ [23]. Условие свободного выхода на выходной границе позволяет моделировать вихревые структуры, возникающие в следе за частицей при небольшой области моделирования.

Безразмерные параметры задачи

В задаче имеется три безразмерных параметра: $Re = \frac{\rho d u_p}{\mu_{\text{eff}}(\gamma_{\text{ch}})} = \frac{\rho d^n u_p^{2-n}}{k}$ — число

Рейнольдса, $Re_S = \frac{\rho d^2 u'_p}{\mu_{\text{eff}}(u'_p)}$ — сдвиговое число Рейнольдса, характеризующее наличие

градиента скорости в потоке, $\delta = h/d$ — безразмерное расстояние от частицы до стенки. Здесь d — диаметр частицы, $u'_p = \partial u_0 / \partial z$ — скорость сдвига потока напротив частицы на бесконечности, $\gamma_{\text{ch}} = u_p / d$ — характерная скорость сдвига. В этой постановке число Рейнольдса, сдвиговое число Рейнольдса и безразмерное расстояние до стенки связаны соотношением $Re_S = Re(\delta + 0,5)^{n-2}$, так как $u'_p = u_p / (h + 0,5d)$.

На сферу со стороны потока действует сила $\vec{F} = \iint_S (-p\vec{n} + \tau\vec{n})dS$ и момент силы

$\vec{M} = \iint_S \vec{r} \cdot (-p\vec{n} + \tau\vec{n})dS$, интегрирование происходит по поверхности сферы S . Введем

следующие безразмерные характеристики: коэффициент силы сопротивления, действующей параллельно стенке, коэффициент подъемной силы, действующей перпендикулярно стенке, и коэффициент момента сил. Они будут иметь вид:

$$C_D = \frac{F_x}{(\pi d^2 / 4)(\rho u_p^2 / 2)}, \quad C_L = \frac{F_z}{(\pi d^2 / 4)(\rho u_p^2 / 2)}, \quad C_M = \frac{M_y}{d(\pi d^2 / 4)(\rho u_p^2 / 2)}.$$

Остальные компоненты \vec{F} и \vec{M} в силу наличия плоскости симметрии равны нулю.

Методика численного исследования и тестирование

Для решения рассматриваемой многопараметрической задачи проводились систематические расчеты. Численное трехмерное моделирование обтекания сферической частицы вблизи стенки осуществлялось посредством гидродинамического пакета OpenFoam на кластере с операционной системой Linux.

Размер расчетной области не должен влиять на результаты моделирования. Достаточные для достижения необходимой точности размеры параллелепипеда устанавливались в ходе предварительных методических расчетов. Расстояние h от стенки z^- до ближайшей точки частицы варьируется. Задача решается в половине области в силу симметрии относительно плоскости, проходящей в направлении потока через центр частицы перпендикулярно стенке.

Выбор размеров области моделирования и расчетной сетки в задаче со стенкой

Одна из основных проблем трехмерного численного моделирования обтекания частицы вблизи стенки состоит в построении параметризованной расчетной сетки, так как расстояние от частицы до стенки является параметром в задаче. Для выбора расчетной сетки, определения размеров области моделирования и тестирования алгоритма рассматривалась задача обтекания сферической частицы однородным безграничным потоком ньютоновской жидкости в трехмерной постановке. Результаты сравнивались с экспериментальной корреляцией [24]. Тестировались сетки различных типов, как структурированные, так и не структурированные. От последних пришлось отказаться, так как расчеты на неструктурированной сетке с тетраэдральными элементами не всегда сходились, в особенности при малых числах Рейнольдса ($Re \leq 1$).

Сфера помещается в куб G со стороной, сравнимой с диаметром сферы. Грани куба G проектируются на поверхность сферы вдоль лучей, выходящих из центра сферы. В результате сфера разбивается на шесть одинаковых криволинейных четырехугольных областей. Далее эти двумерные области с предварительно построенной двумерной сеткой обратно проектируются на соответствующие грани куба G . В итоге между сферой и границей куба G строится сетка с гексаэдральными элементами. Вблизи частицы (в кубе G) строится сетка с мелким равномерным шагом, равным $0,05d$. В оставшейся области строится регулярная прямоугольная сетка, шаг которой увеличивается от границы куба к границе внешней области с некоторым множителем q . Известно, что при обтекании сферы однородным потоком в ламинарном случае при $Re \geq 30$ возникает тороидальный вихрь. Поэтому для детализации вихря за частицей зона с мелкой равномерной сеткой простирается в два раза дальше, чем в других направлениях (рис. 3).

На рис. 4 приведено отклонение расчетного коэффициента сопротивления по сравнению с корреляционной формулой $C_{DSN}(Re) = 24Re^{-1}(1 + 0,15Re^{0,687})$ [24] (нижний индекс SN соответствует фамилиям авторов указанной работы) для трех сеток с параметрами, указанными в таблице.

Таблица

Параметры расчетных сеток

Сетки	Число расчетных узлов	Число двумерных элементов на полусфере	Шаг двумерной сетки на полусфере	Макс. шаг первого слоя, прилегающего к полусфере	q	Среднее время на одну итерацию
1	502000	1200	$0,039d$	$0,075d$	1,13	10,8 с
2	230260	1728	$0,033d$	$0,019d$	1,33	4,1 с
3	880640	1728	$0,033d$	$0,027d$	1,25	26,3 с

По результатам расчетов выбрана сетка типа 3, так как коэффициенты сопротивления, полученные с ее использованием, наименее отклоняются от корреляционной формулы (менее 5%). Дополнительное измельчение сетки в зоне тороидального вихря позволяет получать хорошие результаты. При приближении частицы к стенке сетка легко перестраивается, а ее разрешение и структура практически не меняются.

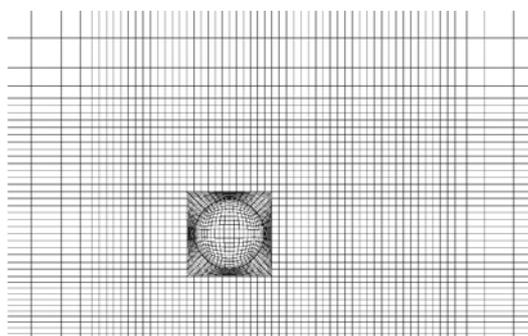


Рис. 3. Расчетная сетка в плоскости симметрии и на поверхности шара.

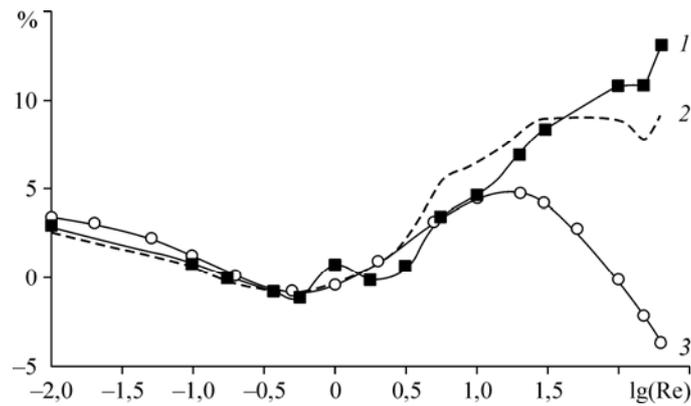


Рис. 4. Ошибка вычисленных значений коэффициента сопротивления на разных сетках в зависимости от числа Рейнольдса. Линии 1, 2, 3 соответствуют параметрам строк 1, 2, 3 таблицы.

В ходе тестовых расчетов установлено, что удаление границ на расстояние $20d$ во все стороны от частицы является достаточным для адекватного определения силы сопротивления, действующей на частицу в однородном потоке. Та же величина удаления границ ($20d$) использовалась и при приближении частицы к стенке. Сетка в зависимости от расстояния до стенки содержит от 550000 до 880000 расчетных узлов.

Результаты численного моделирования

Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

- число Рейнольдса $Re = 0,01, 0,1, 0,2, 0,5, 1, 2, 5, 10, 20, 30, 50, 100, 150, 200$;
- расстояние от частицы до стенки $\delta = 0,005, 0,01, 0,03, 0,05, 0,1, 0,3, 0,5, 1, 3, 5, 10, 20$;
- показатель степени $n = 1, 0,9, 0,7, 0,5$.

Ньютоновская жидкость

В работах [19, 20] достаточно хорошо исследован процесс обтекания неподвижной частицы сдвиговым потоком вблизи стенки для ньютоновской жидкости в диапазоне $Re \in [2, 250]$, $\delta \in [0, 4]$. Сравнение результатов используемой в настоящей работе численной методики с данными для коэффициентов C_D и C_L , приведенными в статье [20], представлено на рис. 5. Расхождение значений коэффициента C_D в диапазоне $Re \in [0,01, 200]$, $\delta \in [0, 20]$ составляет в среднем 3 %. Максимальное расхождение (порядка 6 %) наблюдается при $Re = 200$ и $\delta = 3$. Расхождение для коэффициента C_L — менее 3 %.

Обработка полученных здесь расчетных данных дает следующую корреляционную зависимость:

$$C_D(Re, \delta) = C_{DSN}(Re)f(\delta), \text{ где } f(\delta) = 1 + (1,18 + \delta)^{-2,5}.$$

Эта формула имеет более простой вид, чем формула, приведенная в статье [20]. Её погрешность по сравнению с расчетными данными составляет в среднем 3,5 % (рис. 6).

Как видно из рис. 6, на расстоянии от стенки более трех диаметров ($\delta \geq 3$) ее влиянием на коэффициент сопротивления можно пренебречь, так как в данном случае сила сопротивления отличается от силы сопротивления в однородном потоке менее чем на 5 %, что сравнимо с погрешностью расчетов.

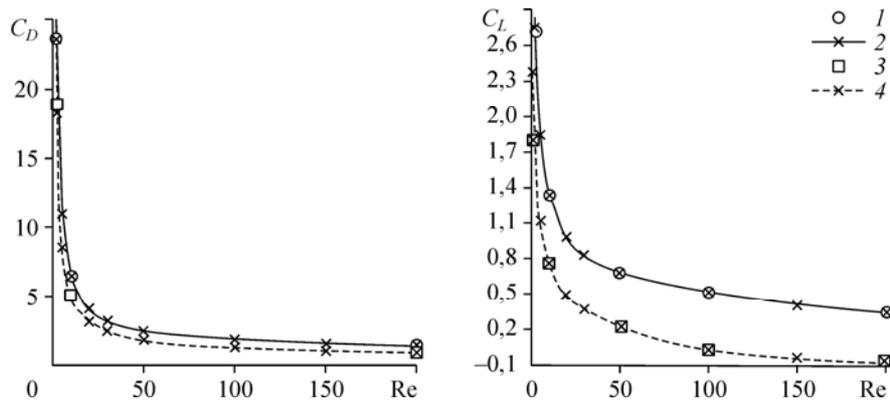


Рис. 5. Сравнение полученных расчетных коэффициентов с данными работы [20].

$\delta = 0,005$: 1 — расчеты [20], 2 — расчеты настоящей работы;
 $\delta = 0,5$: 3 — расчеты [20], 4 — расчеты настоящей работы.

Поведение подъемной силы, коэффициента C_L , в зависимости от δ детально представлено на рис. 7. При малых δ проведенные расчеты для C_L хорошо согласуются с данными работы [20] в широком диапазоне чисел Рейнольдса (рис. 7). Из анализа данных следует, что при $Re \geq 80$ подъемная сила меняет знак на некотором расстоянии от стенки $\delta(Re)$, что также согласуется с результатами, полученными ранее в той же работе.

При удалении частицы от стенки подъемная сила становится мала по сравнению с силой сопротивления из-за уменьшения влияния стенки. В результате ее сложно вычислить с хорошей точностью. Авторы статьи [20] указывают, что полученная ими корреляционная формула для коэффициента C_L имеет большую погрешность. Как показали настоящие расчеты, при $\delta > 3$ эта сила составляет менее 5 % от силы сопротивления во всем рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса. Таким образом, в первом приближении ее можно не учитывать при $\delta > 3$, если сдвиг потока небольшой ($Re_s \leq 50$). При $\delta \leq 3$ подъемная сила может составлять значительную величину. При $\delta \leq 0,3$ и при всех рассмотренных значениях чисел Рейнольдса она направлена от стенки. Однако при достаточно больших числах Рейнольдса на некотором расстоянии от стенки $\delta_0 \geq 0,3$

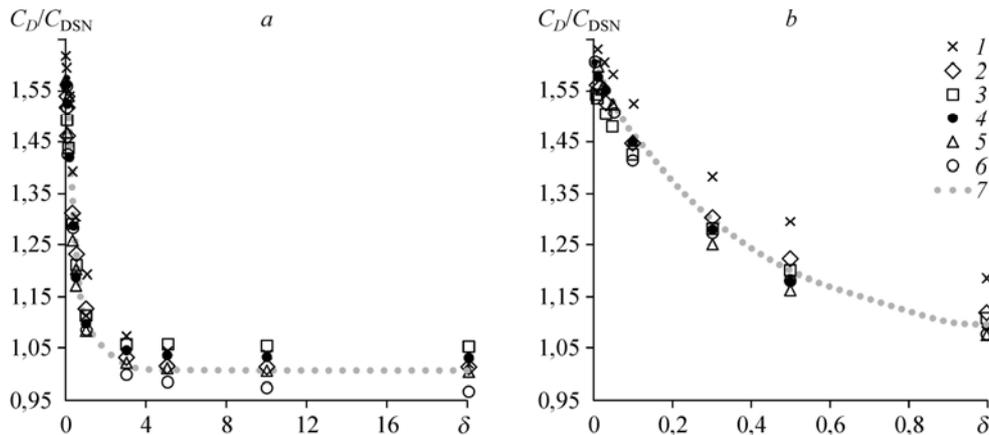


Рис. 6. Отношение C_D/C_{DSN} в зависимости от δ для различных значений Re и функция $f(\delta)$.

a — общий вид, b — ближняя к стенке зона; $Re = 0,1$ (1), 2 (2), 10 (3), 50 (4), 100 (5), 200 (6), $f(\delta)$ (7).

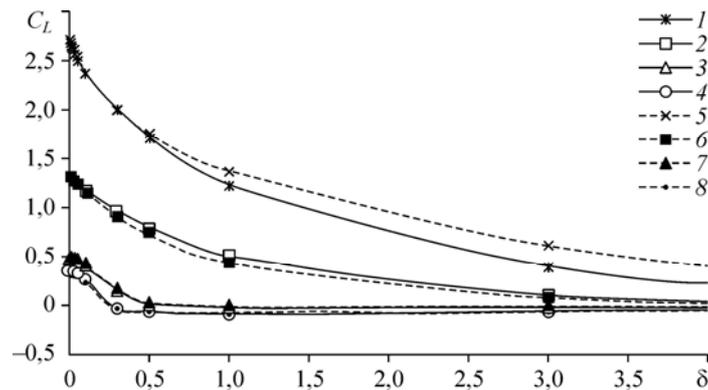


Рис. 7. Коэффициент C_L в зависимости от δ для различных значений Re .

Расчеты работы [20] при $Re = 2$ (1) 10 (2), 100 (3), 200 (4) и настоящей работы при $Re = 2$ (5), 10 (6), 100 (7), 200 (8).

(например, при $\delta = 1$ и $Re^* \approx 80$) подъемная сила меняет направление и становится направленной к стенке.

Псевдопластическая жидкость

Величина коэффициента сопротивления при наличии стенки сравнивается с величиной коэффициента сопротивления в однородном свободном потоке $C_{DPLF}(Re, n)$ (PLF — Power Law Fluid, псевдопластическая жидкость) при тех же значениях Re и n . На рис. 8 приведена зависимость безразмерной величины $Y(\delta) = C_D / C_{DPLF}$ при фиксированных показателях степени и числах Рейнольдса в зависимости от расстояния до стенки. Из рисунка видно, что сила сопротивления ведет себя достаточно сложным образом. Для псевдопластической жидкости вязкость зависит от скорости сдвига. Скорость сдвига потока при приближении частицы к стенке для фиксированного числа Рейнольдса увеличивается, а с увеличением показателя степени n убывает. Показатель n оказывает существенное влияние на поведение силы сопротивления. Ее абсолютное значение может как увеличиваться, так и уменьшаться при приближении к стенке при постоянном Re в зависимости

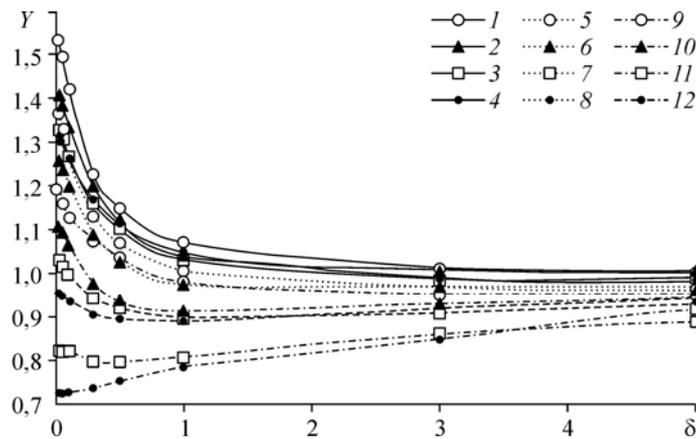


Рис. 8. Поведение относительного коэффициента сопротивления в зависимости от расстояния до стенки при различных числах Рейнольдса и различных значениях степени n .

$Re = 100: n = 0,9$ (1), $0,7$ (5), $0,5$ (9); $Re = 30: n = 0,9$ (2), $0,7$ (6), $0,5$ (10);
 $Re = 5: n = 0,9$ (3), $0,7$ (7), $0,5$ (11); $Re = 0,2: n = 0,9$ (4), $0,7$ (8), $0,5$ (12).

от параметров δ и n . При $n = 0,9$ поведение величины $Y(\text{Re}, n, \delta)$ похоже на поведение аналогичной величины в ньютоновской жидкости: при фиксированном значении Re сила сопротивления увеличивается с приближением частицы к стенке. В отличие от ньютоновской жидкости с уменьшением числа Рейнольдса уменьшается скорость роста коэффициента сопротивления при приближении частицы к стенке при фиксированном Re (рис. 8), а при $n = 0,7$ и $0,5$ коэффициент сопротивления при малых числах Рейнольдса становится даже меньше, чем в однородном потоке, и только вблизи самой стенки ($\delta \leq 1$) наблюдается некоторый рост.

По результатам обработки расчетных данных получена следующая корреляционная зависимость для вычисления коэффициента сопротивления:

$$C_D(\text{Re}, n, \delta) = C_{D0}(\text{Re}, n) \cdot C_{Dw}(n, \delta) \cdot C_{D\text{Re}}(\text{Re}, n, \delta),$$

$$C_{D0}(\text{Re}, n) = 24 \text{Re}^{-1} (-2,82n^3 + 5,05n^2 - 3,26n + 2,03 + 0,15 \text{Re}^{0,687}),$$

$$C_{Dw}(n, \delta) = -0,42n + 1,4 + (5,54n^2 - 5,39n + 0,82)(1,18 + \delta)^{-6,5n^2 + 6,3n - 1,85},$$

$$C_{D\text{Re}}(\text{Re}, n, \delta) = 2(1-n) \left((-0,032x + 0,042)y^2 + (-0,06x + 0,04)y \right) + 1,$$

здесь $x = \lg \delta$, $y = \lg \text{Re}$.

На рис. 9 изображены расчетные данные и корреляционные кривые согласно приведенной формуле для некоторых значений параметров. Полученная корреляционная зависимость хорошо согласуется с расчетными данными в диапазоне параметров $0 < \text{Re} \leq 150$, $0,5 \leq n \leq 1$, $\delta > 0$. Средняя относительная ошибка составляет 5,5 %, а максимальная — 15 %, и достигается при $\text{Re} = 200$, $n = 0,9$, $\delta = 1$.

На рис. 10 представлено поведение коэффициента подъемной силы в зависимости от расстояния до стенки при фиксированных значениях числа Re и показателя степени n . Как видно из рис. 5 и 10, поведение коэффициента подъемной силы в псевдопластической жидкости при приближении частицы к стенке слабо отличается от поведения в ньютоновской жидкости. С уменьшением показателя степени n коэффициент подъемной силы

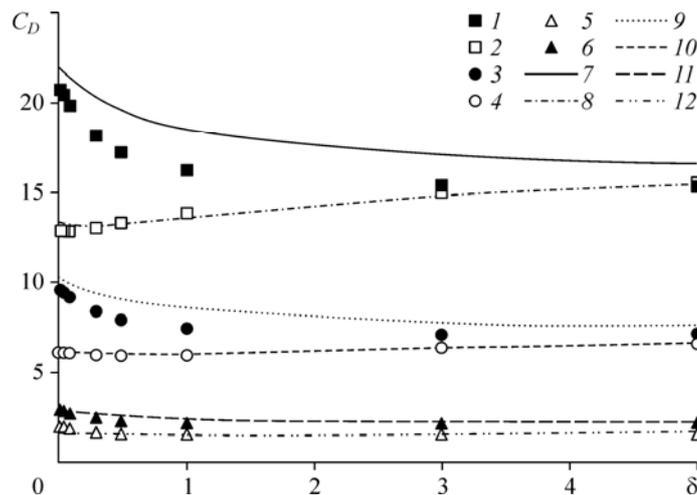


Рис. 9. Коэффициент сопротивления. Сравнение расчетных данных с корреляционной зависимостью. Маркеры — расчет, линии — корреляционная формула.

1, 7 — $\text{Re} = 2$, $n = 0,9$; 2, 8 — $\text{Re} = 2$, $n = 0,5$; 3, 9 — $\text{Re} = 5$, $n = 0,9$;
4, 10 — $\text{Re} = 5$, $n = 0,5$; 5, 11 — $\text{Re} = 30$, $n = 0,9$; 6, 12 — $\text{Re} = 30$, $n = 0,5$.

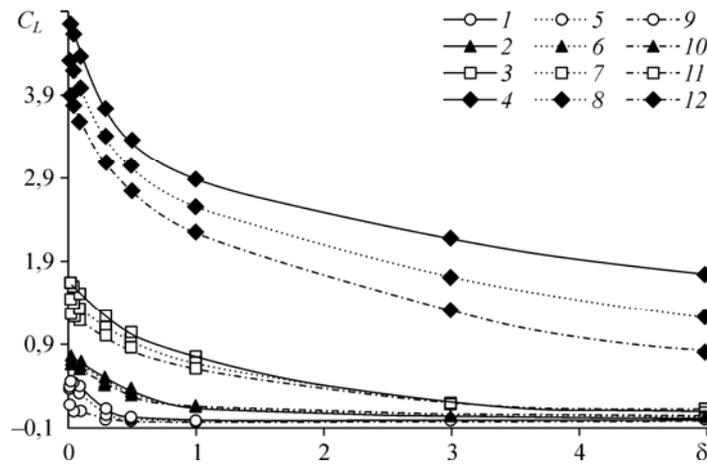


Рис. 10. Коэффициент подъемной силы при различных числах Рейнольдса в зависимости от расстояния до стенки.

Re = 100: n = 0,9 (1), 0,7 (5), 0,5 (9); Re = 30: n = 0,9 (2), 0,7 (6), 0,5 (10);
 Re = 5: n = 0,9 (3), 0,7 (7), 0,5 (11); Re = 0,2: n = 0,9 (4), 0,7 (8), 0,5 (12).

уменьшается. При $\delta \leq 1$ подъемная сила для показателя степени $n = 0,5$ имеет величину на 40 % меньше величины подъемной силы в случае обтекания ньютоновской жидкостью.

При фиксированном $Re \geq 100$ и изменении расстояния до стенки подъемная сила ведет себя достаточно сложным образом. Вблизи стенки она направлена от нее и имеет тот же порядок, что и сила сопротивления. При удалении от стенки подъемная сила резко убывает и меняет направление, что хорошо видно на рис. 11, где представлено отношение подъемной силы к силе сопротивления ($Y = C_L / C_D$) в зависимости от расстояния до стенки при различных числах Рейнольдса. На некотором расстоянии от стенки находится локальный максимум — точка, в которой подъемная сила, направленная к стенке, максимальна по модулю. При $\delta \rightarrow \infty$ подъемная сила стремится к нулю. При удалении частицы от стенки на величину более трех ее диаметров ($\delta > 3$), подъемная сила составляет менее 5 % от силы сопротивления во всем диапазоне чисел Рейнольдса и показателей степени n (рис. 11). Соотношение подъемной силы и силы сопротивления существенно меняется при различных n и δ (рис. 12).

Отношение C_L / C_D ведет себя немонотонно относительно числа Рейнольдса (рис. 13). Максимум достигается при $Re \approx 20$ для $n = 0,5$ и при $Re \approx 5$ для $n = 1$. При $Re \geq 80$

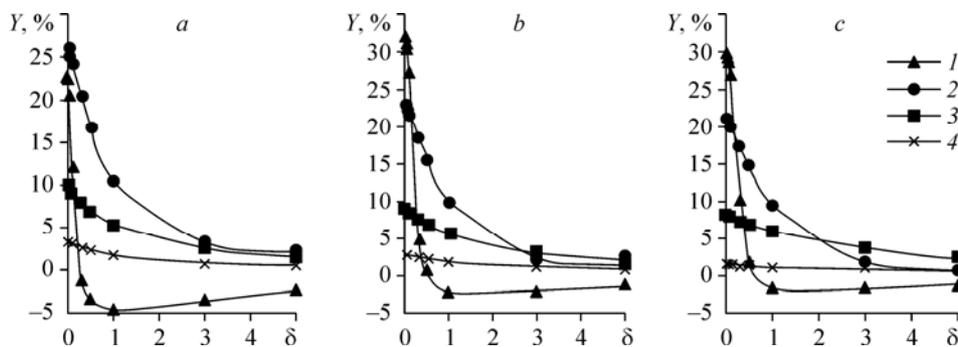


Рис. 11. Отношение подъемной силы к силе сопротивления в зависимости от расстояния до стенки при различных числах Рейнольдса.

$n = 0,5$ (a), $0,7$ (b), $0,9$ (c); Re = 100 (1), 10 (2), 1 (3), 0,2 (4).

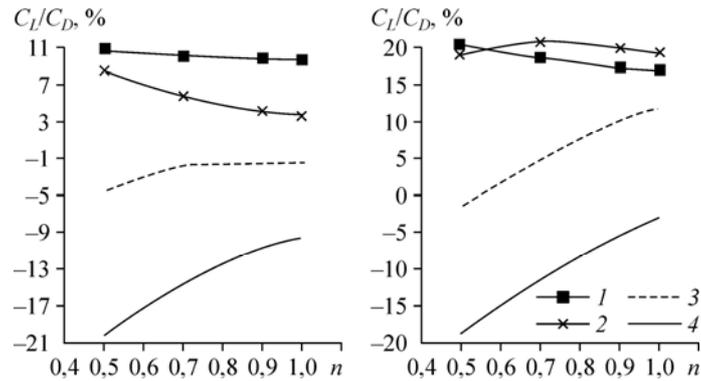


Рис. 12. Отношение подъемной силы к силе сопротивления в зависимости от показателя степени n при различных числах Рейнольдса.
 $\delta = 1$; $Re = 10$ (1), 50 (2), 100 (3), 200 (4).

подъемная сила принимает отрицательные значения, начиная с некоторого значения δ_0 ($0,3 \leq \delta_0 \leq 1$).

Подъемная сила, направленная от стенки, может составлять более 5 % от силы сопротивления в диапазоне $0,5 \leq Re$, $0,5 \leq n \leq 1$, $0 < \delta < 1$. Подъемная сила, направленная к стенке и составляющая более 5 % от силы сопротивления, наблюдается в диапазоне $100 \leq Re$, $0,5 \leq n \leq 1$, $0,1 < \delta$. Как видно из графиков на рис. 14, в диапазоне $0,5 \leq Re \leq 50$, $0,5 \leq n \leq 1$, $0 < \delta \leq 0,3$ подъемная сила существенна, направлена от стенки и практически линейно убывает с ростом δ . Для этого диапазона можно использовать следующую корреляционную формулу:

$$C_L(Re, n, \delta) = c_1(Re, n)\delta + c_2(Re, n),$$

$$c_1(Re, n) = (0,28n - 0,77)y^2 + (0,94n + 1)y - 2,22n - 0,6, \quad y = \lg Re,$$

$$c_2(Re, n) = (0,33n + 0,35)y^2 + (-1,6n - 1,19)y + 1,92n + 1,48.$$

Приведенная зависимость хорошо согласуется с расчетными данными в указанном диапазоне параметров. Средняя относительная ошибка составляет 3,6 %, максимальная — 15 % ($Re = 50$, $n = 0,5$, $\delta = 0,3$). На рис. 14 представлены расчетные данные и кривые согласно формуле для характерных значений параметров.

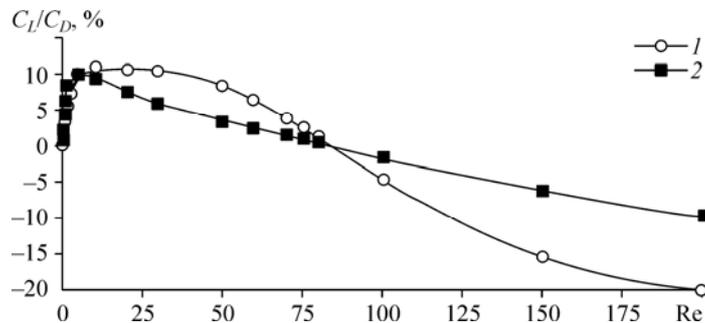


Рис. 13. Зависимость отношения коэффициентов подъемной силы и сопротивления от числа Рейнольдса для различных показателей степени n .
 $\delta = 1$; $n = 0,5$ (1), 1 (2).

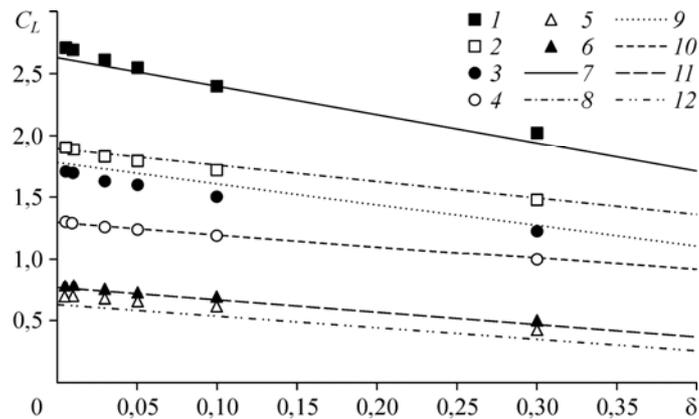


Рис. 14. Сравнение расчетных данных коэффициента подъемной силы при различных числах Рейнольдса и различных значениях степени n с корреляционной зависимостью.

Маркеры — расчет, линии — корреляционная формула.

1, 7 — $Re = 2, n = 0,9$; 2, 8 — $Re = 2, n = 0,5$; 3, 9 — $Re = 5, n = 0,9$;
4, 10 — $Re = 5, n = 0,5$; 5, 11 — $Re = 30, n = 0,9$; 6, 12 — $Re = 30, n = 0,5$.

В целом можно сделать вывод о сложных немонотонных зависимостях C_L от величин Re, n, δ (рис. 11–13), поэтому построить корреляцию при $Re \geq 100$ достаточно проблематично.

Выводы

При $\delta > 3$ (расстоянии от сферы до стенки более трех диаметров частицы) подъемная сила, действующая на сферическую частицу вблизи стенки при достаточно малой скорости сдвига потока ($Re_S \leq 50$), составляет менее 5 % от силы сопротивления, следовательно, влиянием стенки при вычислении силы сопротивления можно пренебречь.

Значение силы сопротивления при $\delta \leq 3$ по сравнению с силой, возникающей при обтекании сферы однородным потоком, может быть как больше, так и меньше, в зависимости от параметров Re, Re_S, n и δ .

При $\delta \leq 1$ подъемная сила, стремящаяся отодвинуть частицу от стенки, возрастает с уменьшением расстояния до стенки при фиксированном Re и при $\delta < 0,1, 100 \leq Re \leq 200$ может достигать 25–30 % от силы сопротивления.

Список литературы

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 713 с.
2. Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, drops, and particles. N.Y.: Academic Press, Inc, 1978. 394 p.
3. Chhabra R.P. Bubbles, drops, and particles in non-newtonian fluids. 2nd edn. Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group CRC, 2007. 721 p.
4. Segre G., Silberberg A. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Pt. 2. Experimental results and interpretation // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 14. P. 136–157.
5. Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. P. 385–400.
6. Saffman P.G. Corrigendum to “The lift on a small sphere in a slow shear flow” // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 31. P. 624–624.
7. Асмолов Е.С. О динамике сферической частицы в ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 91–96.
8. Асмолов Е.С. О движении дисперсной примеси в ламинарном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1992. № 1. С. 66–73.
9. McLaughlin J.B. Inertial migration of a small sphere in linear shear flows // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 224. P. 261–274.

10. **McLaughlin J.B.** The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 246. P. 249–265.
11. **Dandy D.S., Dwyer H.A.** Sphere in shear flow at finite Reynolds number: effect of shear on particle lift, drag and heat transfer // *J. Fluid Mech.* 1990. Vol. 216. P. 381–410.
12. **Bagchi P., Balachandar S.** Effect of free rotation on the motion of a solid sphere in linear shear flow at moderate Re // *Physics of Fluids* 2002. Vol. 14, No. 8. P. 2719–2737.
13. **Mei R.** An approximate expression for the shear lift force at finite Reynolds number. // *Intern. J. Multiphase Flow.* 1992. Vol. 18, No. 1. P. 145–147.
14. **Bretherton F.P.** The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 14, No. 2. P. 284–304.
15. **O'Neill M.E.** A sphere in contact with a plane wall in a slow linear shear flow // *Chem. Eng. Sci.* 1968. Vol. 23. P. 1293–1298.
16. **Goldman A.J., Cox R.G., Brenner H.** Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall-I Motion through a quiescent fluid // *Chem. Eng. Sci.* 1967. Vol. 22. P. 637–651.
17. **Goldman A.J., Cox R.G., Brenner H.** Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall-II Couette flow // *Chem. Eng. Sci.* 1967. Vol. 22. P. 653–660.
18. **Fischer T.M., Rosenberger R.** A boundary integral method for the numerical computation of the forces exerted on a sphere in viscous incompressible flows near a plain wall // *J. of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 1987. Vol. 38. P. 339–365.
19. **Zeng L., Balachandar S., Fischer P.** Wall-induced forces on a rigid sphere at finite Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 2005. Vol. 536. P. 1–25.
20. **Zeng L., Najjar F., Balachandar S., Fischer P.** Forces on a finite-sized particle located close to a wall in a linear shear flow // *Phys. Fluids.* 2009. Vol. 21, No. 3. P. 033302-1–033302-18.
21. **Takemura F., Magnaudet J.** The transverse force on clean and contaminated bubbles rising near a vertical wall at moderate Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 2003. Vol. 495. P. 235–253.
22. **Dhole S.D., Chhabra R.P.** Flow of power-law fluids past a sphere at intermediate Reynolds numbers // *Ind. Eng. Chem. Res.* 2006. Vol. 45. P. 4773–4781.
23. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 612 с.
24. **Schiller L., Nauman A.Z.** Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraftaufbereitung // *Ver. Deut. Ing.* 1933. Vol. 77. P. 310–320.

*Статья поступила в редакцию 22 января 2015 г.,
после доработки — 25 февраля 2015 г.*