

К ТЕОРИИ УТОНЫШЕНИЯ СВОБОДНЫХ ПЛЕНОК  
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. В. Воинов

(Москва)

Рассматриваются тонкие пленки вязкой жидкости со свободными поверхностями в присутствии поверхностно-активных веществ (ПАВ).

Сформулирована замкнутая система нелинейных уравнений динамики пленок переменной толщины с учетом капиллярных сил и сил Ван-дер-Ваальса, градиентов поверхностного натяжения и эффекта поверхностной вязкости, объемной и поверхностной диффузии и нелинейной изотермы адсорбции. Найдены основные безразмерные критерии, определяющие режим течения пленки. Получено общее решение уравнений переноса ПАВ в квазистатическом приближении, а также в противоположном пределе слабой диффузии. Предложен метод решения задач об утоньшении пленок, основанный на квазистатическом рассмотрении переходной области от пленки к мениску.

Найден механизм утоньшения пленки для случая, когда ее поверхности остаются близкими к параллельным плоскостям (плоскопараллельное утоньшение). До настоящего времени плоскопараллельное утоньшение наблюдалось во многих экспериментах, но не находило объяснения. Получено несколько решений основных уравнений, соответствующих плоскопараллельному утоньшению, и определены условия, при которых оно возможно. При утоньшении пленка может образовывать с мениском отличный от нуля краевой угол. Показано также, что пленки могут разрушаться за счет сил Ван-дер-Ваальса в узкой области перехода от пленки к мениску.

**1. Основные уравнения.** Пусть толщина  $h$  пленки вязкой жидкости изменяется на расстояниях  $l$  таких, что  $l \gg h$ , т. е.  $dh/dx \ll 1$  ( $x$  — координата вдоль слоя). Как и в гидродинамической теории смазки [1], предполагаем, что мало приведенное число Рейнольдса  $R^* = v'h^2/lv$  ( $v'$  — скорость вдоль пленки,  $v$  — кинематическая вязкость). Кроме того, характерное время процесса  $\tau$  достаточно велико ( $\tau v \gg h^2$ ), чтобы за время, много меньшее  $\tau$ , устанавливалось распределение скорости по сечению слоя, близкое к стационарному.

Скорость жидкости  $v'$  можно представить в виде суммы двух решений — симметричного и антисимметричного по координате поперек пленки. Далее рассматриваются только симметричные решения. В отличие от теории смазки кроме средней скорости течения относительно неподвижной поверхности  $u$  следует учитывать скорость движения поверхности  $v \neq \text{const}$ . Уравнение сохранения массы имеет вид

$$(1.1) \quad \text{div} (hu + hv) = -\partial h / \partial t$$

Здесь и далее рассматриваются уравнения, включающие в себя величины, которые изменяются только вдоль плоскости симметрии пленки.

Касательные напряжения внутри свободной пленки вязкой жидкости могут создаваться под влиянием ПАВ. Во многих практически интересных случаях касательные вязкие напряжения на порядки превышают продольные вязкие напряжения. Оценки показывают, что продольные напряжения можно не учитывать только при условии, что изменение скорости поверхности  $\Delta v$  на расстоянии порядка  $l$ , равном масштабу рассматриваемого течения, не слишком велико ( $|\Delta v| \ll ul/h$ ).

В этом случае интегрирование уравнения Навье — Стокса поперек пленки дает

$$(1.2) \quad 12 \mu \mathbf{u} = -h^2 \nabla p + h^2 \mathbf{F}, \quad 6 \mu \mathbf{u} = -h \mathbf{P}_l$$

Здесь  $p$  — давление внутри пленки,  $\mathbf{F}$  — объемная сила, направленная вдоль пленки,  $\mathbf{P}_l$  — касательная сила на поверхности. Всюду величина  $p$  отсчитывается от давления в газе, которое считается постоянным.

Локально течение со скоростью  $\mathbf{u}$ , соответствующее (1.2), представляет собой течение в плоской трубе под действием градиента давления [2].

Величина  $p$  в (1.2) определяется граничным условием для нормальных напряжений на поверхности пленки, которое связано с лапласовским скачком давления и с расклинивающим давлением  $\Pi$  [3]

$$(1.3) \quad -p = 1/2 \sigma \Delta h + \Pi, \quad \Pi = -A / (6\pi h^3)$$

Здесь учитывается только составляющая расклинивающего давления, связанная с молекулярным взаимодействием, которая является причиной разрушения макроскопических по толщине жидких пленок [4, 5],  $A$  — постоянная Ван-дер-Ваальса — Гамакера [6].

Непосредственный расчет давления и массовых сил, действующих в сечении тонкой пленки при отсутствии параллельности ее поверхностей, подтверждают формулы (1.2) и (1.3) [7].

Условие для касательного напряжения  $\mathbf{P}_l$  на поверхности нетрудно записать, сопоставляя поверхности некоторый тензор двумерных напряжений  $P_{ij}$

$$(1.4) \quad \mathbf{P}_l = \text{div } \mathbf{P}$$

Данные многочисленных экспериментов [8–10] доказали, что тензор  $P_{ij}$  в присутствии ПАВ не сводится к поверхностному натяжению, а зависит от скорости деформации поверхности, т. е. в узком приповерхностном слое происходит аномально большая диссипация энергии. Линейная зависимость, аналогичная трехмерному закону Навье — Стокса [11], имеет вид

$$(1.5) \quad P_{ij} = \sigma \delta_{ij} + T_{ij}, \quad T_{ij} = \lambda_s \text{div } \mathbf{v} \delta_{ij} + \eta_s (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$$

Коэффициенты поверхностной вязкости  $\eta_s$  и  $\lambda_s$ , вообще говоря, зависят от концентрации ПАВ  $\Gamma$  в поверхности. Поверхностное натяжение  $\sigma$  существенно зависит от  $\Gamma$ .

Концентрация  $\Gamma$  связана с объемной концентрацией ПАВ  $c$ . Пусть адсорбция описывается изотермой Ленгмюра [12]. Тогда

$$(1.6) \quad \sigma - \sigma_0 = -aRT \ln(1 + bc), \quad \Gamma = Hc / (1 + bc), \quad H = ab$$

Здесь  $T$  — абсолютная температура,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $a$  и  $b$  — постоянные.

Для замыкания системы уравнений необходимо учесть перенос ПАВ за счет конвекции и диффузии. При условии  $h^2 \ll D\tau$  ( $\tau$  — характерное время,  $D$  — коэффициент диффузии ПАВ в объеме) можно пренебречь градиентами концентрации поперек пленки и записать уравнения конвективной диффузии в виде

$$(1.7) \quad \text{div} [-hD\nabla c - 2D_s \nabla \Gamma + (\mathbf{u} + \mathbf{v})hc + 2\mathbf{v}\Gamma] = -\frac{\partial}{\partial t} (hc + 2\Gamma)$$

Здесь  $D_s$  — коэффициент диффузии ПАВ в поверхности.

Заметим, что предельный случай  $hc / \Gamma \rightarrow 0$  соответствует нерастворимому ПАВ.

Уравнение (1.7) можно переписать в эквивалентной форме

$$(1.8) \quad 2 \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + h \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) h \nabla c = \\ = \operatorname{div} (D h \nabla c + 2 D_s \nabla \Gamma - 2 \mathbf{v} \Gamma)$$

Формулы (1.4) — (1.7) представляют собой систему шести нелинейных уравнений в частных производных и одного алгебраического уравнения относительно семи неизвестных: толщины пленки  $h$ , компонент скорости  $\mathbf{v}$  поверхности пленки и средней скорости  $\mathbf{u}$  движения жидкости относительно поверхности, концентраций ПАВ в поверхности  $\Gamma$  и в объеме  $c$ .

Ввиду сложности системы уравнений следует прежде всего произвести общую оценку роли различных эффектов для произвольного масштаба течения  $l$ .

В решении задачи об утоньшении пленки под действием капиллярных сил [13] в случае неподвижной поверхности показано, что при возникновении изменения давления  $\Delta p$  с краев участка значительной длины пленка утоньшается в краевой области шириной  $L \sim (h \sigma / \Delta p)^{1/2}$ . Если размеры пленки намного превышают  $L$ , то пленка обязательно утрачивает плоскопараллельность. В общем случае подвижной поверхности параметр  $S = \Delta p l^2 / (h \sigma)$  определяет для участка пленки размером  $l$  связь между величиной перепада давления  $\Delta p$  и неравномерностью толщины.

При  $S \ll 1$  толщина мало изменяется на расстоянии порядка  $l$ . При  $S \gg 1$  изменение толщины  $\Delta h \sim h$  и плоскопараллельность не имеет места.

В отсутствие градиентов поверхностного натяжения поверхность пленки может «тормозиться» за счет поверхностной вязкости  $\mu_s$ . Относительная роль деформаций поверхности в потоке массы, или же степень «отвердения» поверхности, оценивается параметром

$$W = \mu_s h / (6 \mu l^2), \quad \mu_s \sim \lambda_s, \eta_s$$

Если  $W \gg 1$ , то для течения масштаба  $l$  поверхность «отвердевает», т. е. изменение скорости поверхности пренебрежимо мало по сравнению со средней скоростью жидкости относительно поверхности  $\Delta v \ll u$ .

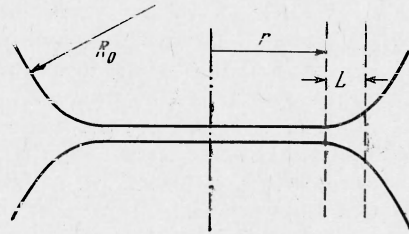
При  $W \lesssim 1$  деформации поверхности пленки играют существенную роль. Если  $W \ll 1$ , то поток массы создается в основном деформацией поверхности, изменение скорости  $\Delta v \gg u$ . При этом можно совершенно не учитывать в кинематике вклада скорости  $u$  жидкости относительно поверхности. Жидкость в каждом сечении оказывается как бы «приклеенной» к деформируемой поверхности пленки.

**2. Задача об утоньшении пленки, граничащей с мениском.** Тонкая круглая пленка радиуса  $r$  граничит с мениском радиуса  $R_0$  (фиг. 1). Мениск находится в равновесии и давление ( $-p_\sigma$ ) внутри него не зависит от времени. Известна концентрация ПАВ  $c_0$  внутри мениска.

Если  $x$  — расстояние от центра пленки, то краевые условия для уравнений (1.1) — (1.7) при  $x \rightarrow \infty$  имеют вид

$$(2.1) \quad u, v \rightarrow 0, \quad c \rightarrow c_0, \quad p \rightarrow -p_\sigma$$

С ростом толщины  $h$  ( $x \rightarrow \infty$ ) переход к мениску совершается быстро, на расстоянии порядка  $(h R_0)^{1/2}$ .



Фиг. 1

К (2.1) можно присоединить начальные условия. Однако наибольший интерес представляют асимптотические законы утоньшения пленок, не зависящие от начальных условий. Задача определения этих законов и рассматривается далее.

Пусть для пленки  $p_0 r^2 \gg h\sigma$ , тогда, следуя п. 1, в отсутствие сил Ван-дер-Ваальса можно показать, что на расстоянии от центра пленки  $x < r - L$  (внутренняя область) изменение давления  $p$  много меньше  $p_0$  и имеется узкая область перехода к мениску, в которой происходит основное изменение давления  $p$ . Внутренняя область имеет размер, мало отличающийся от размера пленки  $r$ . Ширина переходной области  $L \sim (h\sigma / p_0)^{1/2} \ll r$  пренебрежимо мала по сравнению с размером пленки. Заметим, что только в случае  $p_0 r^2 \gg h\sigma$  можно ввести понятие размера пленки, отделить пленку от мениска. Естественно поэтому, что это условие хорошо выполнено во всех экспериментах [6, 14]. Эксперимент показывает, что часто свободные пленки утоньшаются, оставаясь плоскопараллельными. Из п. 1 тогда следует, что поверхность их существенно деформируется в продольном направлении и скорость поверхности не равна нулю. В противном случае плоскопараллельное утоньшение невозможно.

Благодаря наличию малого параметра  $L / r$  задача допускает эффективное решение. Время установления формы переходной области  $\tau_1$  по порядку величины равно  $L / v_1$ , причем характерная скорость жидкости в переходной зоне  $v_1 \sim -rh' / h$ . Поэтому отношение  $\tau_1 / \tau$ , где  $\tau = |h / h'|$  — характерное время утоньшения, имеет порядок  $L / r \ll 1$ . Следовательно, переходная область квазистатична, в ней можно опускать производные по времени в уравнениях движения. Зависимость от времени войдет после сращивания с решением, справедливым во внутренней области, которое можно искать отдельно.

**3. Внутренняя область. Учет диффузии и адсорбции.** Допустим, что поверхностная вязкость в течении, масштаб которого равен  $r$ , не подавляет движение поверхности пленки ( $W(r) \leq 1$ ). Необходимо найти градиенты поверхностного натяжения, возникающие при деформации поверхности.

Пусть, как это выполнено во многих экспериментах [14, 15],  $D\tau \gg r^2$  ( $\tau$  — характерное время утоньшения,  $D \sim D_s$ ), тогда благодаря диффузии значения  $\Gamma$  и  $c$  мало изменяются вдоль всей пленки

$$(3.1) \quad |\Gamma - \Gamma_0| \ll \Gamma_0, \quad |c - c_0| \ll c_0$$

Если скорость поверхности пленки отлична от нуля  $v \gg u$ , то  $v \sim r / \tau$ .

Учитывая эти оценки, (1.8) можно упростить

$$(3.2) \quad \text{div} (hD\nabla c + 2D_s \nabla \Gamma - 2v\Gamma) = 0$$

Отсюда следует, что изменение  $\Gamma$ , вызываемое деформацией поверхности, компенсируется диффузионным потоком. В плоском или осесимметричном случае выражение под знаком  $\text{div}$  в (3.2) равняется константе, которая равна нулю в силу симметрии

$$hD\nabla c + 2D_s \nabla \Gamma = 2v\Gamma$$

Отсюда с учетом (1.6) следует:

$$(3.3) \quad \text{grad} \sigma = -Kv, \quad K = cHRT / (D_s + D(1 + bc)^2 h / 2H)$$

Здесь в силу (3.1)  $c$  — постоянная; вдоль пленки  $K = K(h)$ .



Коэффициент  $K = 0$  в пределе больших и малых концентраций ПАВ и имеет максимальное значение

$$K_{\max} = \frac{H^2 RT}{Dhb} \frac{c}{1+bc}, \quad \varepsilon = \frac{1}{b} \sqrt{1 + 2 \frac{D_s}{D} \frac{H}{h}}$$

При пренебрежении  $\mu_s$  из (1.2), (1.5) и (4.3) получаем

$$(3.4) \quad u = (K / 6\mu) hv, \quad h \operatorname{grad} p = -2Kv$$

Коэффициент  $K$  определяет возможность деформирования поверхности пленки без возникновения существенных изменений давления и существенных изменений толщины. При  $K \rightarrow 0$  градиенты  $p$  и  $\sigma$  исчезают, поверхность пленки деформируется свободно. При больших значениях  $K \gg \gg 6\mu / h$  поверхность несжимаема. Малые значения  $K$  достигаются за счет большой величины коэффициента диффузии, а также за счет малого содержания ПАВ в поверхности по отношению к объему. Коэффициент  $K$  существенно понижается в области насыщения адсорбции  $c \gg 1/b$ .

Из (1.1), (1.3), (3.4) получаем уравнение для толщины пленки в плоском или осесимметричном случае

$$(3.5) \quad \operatorname{div} \left\{ \left( \frac{h^2}{4K(h)} + \frac{h^3}{24\mu} \right) \operatorname{grad} \left( \sigma \Delta h - \frac{A}{3\pi h^3} \right) \right\} = - \frac{\partial h}{\partial t}$$

Для  $A = 0$  и малых изменений толщины пленки (3.5) по форме совпадает с уравнением, исследованным в [13]. Уравнение (3.5) справедливо всюду, если поверхностная вязкость столь мала, что не сказывается на течении в переходной области. При этом во внутренней области толщина изменяется значительно, плоскопараллельное утоньшение невозможно.

При  $v \gg u$  сравнить роль изменения  $\sigma$  и поверхностной вязкости можно, сопоставляя соответствующие отношения  $u/v$  скоростей движения с поверхностью и относительно нее. При  $W \ll Kh / 6\mu$ , или  $\mu_s \ll \ll Kl^2$ , поверхностная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с  $\operatorname{grad} \sigma$ , так как при том же  $u$  допускает гораздо большие значения  $v$ . В обратном предельном случае поверхностная вязкость играет основную роль.

Уравнение (3.5) допускает частное решение

$$(3.6) \quad h(x, t) = h_0 - \frac{h_0}{16\sigma h_0^2} \frac{K(h_0)}{1 + h_0 K(h_0) / 6\mu} x^4$$

справедливое при  $|h - h_0| \ll h_0$ . Здесь  $x$  — расстояние до оси. Утоньшающаяся пленка, близкая к плоскопараллельной, с краев толще, чем в центре. Неравномерность толщины наибольшая при  $K = K_{\max}$ . Из (3.6) следует условие плоскопараллельности внутренней области:  $|h| r^4 K \ll 16\sigma h^3$ .

Если роль диффузии пренебрежимо мала  $Dr^2 \ll \tau$  и, кроме того, средняя скорость движения жидкости относительно поверхности значительно меньше скорости поверхности  $u \ll v$ , то уравнение переноса (1.7) имеет интеграл

$$(3.7) \quad c + 2\Gamma / h = f(\xi_i), \quad i = 1, 2$$

Здесь  $\xi_i$  — лагранжевы координаты. Из (1.6) и (3.7) поверхностное натяжение легко находится в виде функции лагранжевых координат и толщины пленки  $\sigma = \sigma(\xi_i, h)$ . При этом видно, что при большой толщине пленки  $h \gg 2\Gamma / c$  изменения толщины приводят к относительно малым изменениям  $\sigma$ .

4. **Переходная область при  $KL^2 \ll \mu_s$ .** В квазистатическом приближении (п. 2) основные уравнения в переходной области имеют вид

$$(4.1) \quad hu + hv = h_0 v_0, \quad -\frac{12\mu u}{h} = 2\mu_s \frac{d^2 v}{dx^2} = h \frac{d}{dx} \left( -\frac{\sigma}{2} \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{A}{6\pi h^3} \right)$$

$$\mu_s = \lambda_s + 2\eta_s$$

Здесь ввиду условия  $L \ll r$  малые члены в уравнениях, соответствующие осевой симметрии, опущены. Для расчета переходной области достаточно рассмотреть плоскую задачу.

На бесконечности заданы условия

$$(4.2) \quad h \rightarrow h_0, \quad v \rightarrow v_0, \quad x \rightarrow -\infty$$

$$v \rightarrow 0, \quad \sigma d^2 h / dx^2 \rightarrow 2p_\sigma, \quad x \rightarrow \infty$$

Решение уравнений (4.1) с условиями (4.2) определяется с точностью до трансляции. Асимптотическое решение при  $x \rightarrow -\infty$  линеаризованных уравнений (4.1) можно использовать для определения начальных данных численных расчетов аналогично тому, как это было сделано в [16] при решении задачи о движении пленки с несжимаемой поверхностью.

В безразмерных обозначениях

$$(4.3) \quad x = l\xi, \quad h = h_0 y, \quad l = (\sigma / 24 \mu v_0)^{1/3} h_0$$

из (4.1) для значений  $y$  при  $x \rightarrow -\infty$  следует:

$$Wy''' - y' + W(y - 1) = 0, \quad W = h_0 \mu_s / 6\mu l^2$$

Уравнение

$$W\lambda^3 - \lambda + W = 0$$

соответствующее решению вида  $1 + \exp(\lambda \xi)$ , при  $W < 1/3 \cdot 2^{2/3}$  имеет два положительных действительных корня. При  $W > 1/3 \cdot 2^{2/3}$  имеются два комплексных корня  $\text{Re} \lambda > 0$ . Соответственно, при  $W < 1/3 \cdot 2^{2/3}$  асимптотическое решение монотонно, а при больших значениях  $W$  имеет вид волны с быстро затухающей амплитудой. Монотонное решение характерно для растяжимой поверхности, тогда как волнообразное — для несжимаемой. Переход от одного решения к другому происходит при  $\mu_s \sim \mu R_0$ . Асимптотическое исследование уравнений (4.1) при  $x \rightarrow \infty$  для случая  $\mu_s \gg \mu R_0$  дает

$$v \sim x^{-\lambda}, \quad \lambda = 12 \mu R_0 / \mu_s$$

что соответствует переходу к пределу постоянной скорости поверхности  $v \approx v_0$ . Вязкое натяжение при этом убывает как  $1/x$ .

5. **Переходная область при  $KL^2 \ll \mu_s \ll R_0 \mu$ .** Краевой угол пленки с мениском. В этом случае  $u \ll v$  и интегрирование (4.1) с учетом (4.2) дает

$$(5.1) \quad h \frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{4\mu_s h_0 v_0}{\sigma h^2} \frac{dh}{dx} - \frac{A}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h^2} \right)$$

В безразмерных обозначениях

$$(5.2) \quad x = l\xi, \quad h = h_0 y, \quad l = \sigma h_0^2 / (4\mu_s v_0)$$

$$B = Al^2 / (\pi \sigma h_0^4), \quad \alpha = 2p_\sigma l^2 / (\sigma h_0)$$

задача расчета переходной области имеет вид

$$(5.3) \quad 2yy'' = y'^2 + 2y'y^{-2} - B(1 - y^{-2}); \quad y \rightarrow 1, \quad x \rightarrow -\infty;$$

$$y'' \rightarrow \alpha, \quad x \rightarrow \infty$$

При  $B = 0$  уравнение (5.3) допускает решение в квадратурах. Интегрируя (5.3), получим

$$(5.4) \quad y' = \sqrt[2]{5} (\sqrt{y} - y^{-2})$$

Отсюда для значения  $\alpha$  в (5.2) следует:  $\alpha = \sqrt[2]{25}$ . Решению при  $B = 0$  соответствует кривая 1 (фиг. 2). Размер переходной области  $L$  можно примерно определить, приняв в качестве него расстояние, на котором  $y$  изменяется от 1.14 до 2. Тогда  $L \approx 3l$  и из (5.2) следует:

$$(5.5) \quad p_\sigma L^2 = 0.36 h_0 \sigma, \quad L^2 = \sqrt[2]{0.18} h_0 R_0$$

что хорошо подтверждает общую оценку  $p_\sigma L^2 \sim h\sigma$ .

С учетом  $\alpha = \sqrt[2]{25}$  из (5.2) найдем скорость втекающей пленки

$$(5.6) \quad v_0 = (5 / 4 \mu_s) h_0^{3/2} \sqrt{\sigma p_\sigma}$$

Условие, при котором справедливо (5.6), есть  $W(L) \ll 1$ , что с учетом (5.5) эквивалентно  $\mu_s \ll R_0 \mu$ .

Решение с учетом сил Ван-дер-Ваальса ( $B \neq 0$ ) найдено численно. Интерес представляет решение, которое наиболее быстро убывает при  $x \rightarrow -\infty$ . Масштаб изменения другого возможного решения значительно больше, и это решение не обсуждается.

На фиг. 2 кривые  $y(\xi)$  2, 3 соответствуют значениям  $B = 0.08, 0.16$ . Зависимость  $\alpha(B)$  мало отличается от линейной

$$\alpha = 0.08 - 0.5B$$

которая дает правильный результат при  $B = 0$  и 0.16, а отличие по наклону не превышает  $\sim 12\%$ . То, что  $\alpha = 0$  при  $B = 0.16$ , имеет важный смысл. Так как из (5.2)

$$3 p_m / p_\sigma = B / \alpha \quad (p_m = -\Pi = A / 6 \pi h_0^3)$$

то в пределе  $B \rightarrow 0.16$   $p_m \gg p_\sigma$  и силы Ван-дер-Ваальса играют основную роль в переходной области. Асимптотика  $y(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$  для  $B = 0.16$  имеет вид:  $y = 0.4 \xi$ . Размер переходной области определяется уже не  $p_\sigma$ , а величиной  $p_m$  ( $L^2 \approx \sigma h_0 / 2 p_m$ ). При этом  $L \ll \sqrt[2]{h_0 R_0}$ . Следовательно, пленка при  $p_m \gg p_\sigma$  образует с мениском краевой угол

$$(5.7) \quad \theta = (A / \pi \sigma)^{1/2} h_0^{-1}$$

Скорость втекания пленки, определяемая из (5.2)

$$(5.8) \quad v_0 = (5 / 8 \mu_s) \sqrt{A \sigma / \pi}$$

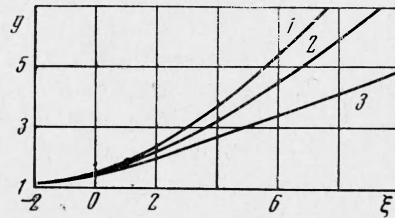
не зависит от толщины, если  $B \sim 0.16$ .

Приближенная формула

$$(5.9) \quad v_0 = \frac{5}{4\mu_s} h_0^{3/2} \sqrt{\sigma \left( p_\sigma + \frac{A}{4\pi h_0^3} \right)}$$

в пределах  $h_0 \rightarrow \infty$  и  $h_0 \rightarrow 0$  совпадает с точными (5.6) и (5.8), а для промежуточных значений  $h_0$ , когда  $p_\sigma \sim A / (4\pi h_0^3)$ , имеет погрешность, не превышающую 4%.

**7. Переходная область при  $\mu_s \gg R_0 \mu$ . Разрушение под действием сил Ван-дер-Ваальса.** В рассматриваемом случае поверхность в переходной области ведет себя как несжимаемая. Скорость  $v \approx v_0$  и уравнения



Фиг. 2

(4.1) упрощаются

$$(6.1) \quad \sigma \frac{d^3 h}{dx^3} + \frac{A}{\pi h^4} \frac{dh}{dx} = \frac{24\mu v_0}{h^3} (h_0 - h)$$

Для  $A = 0$  это уравнение рассмотрено в [16], где исследовалось втекание в мениск пленки, поверхность которой несжимаема за счет  $\text{grad } \sigma$ . Заметим, что такая ситуация для утоньшающейся пленки невозможна. Когда поверхность несжимаема за счет  $\text{grad } \sigma$  в переходной области, тогда она несжимаема всюду и скорость  $v = 0$ .

Важно вязкое натяжение  $T_{xx}$ -компонента тензора вязких напряжений в поверхности, определяемого (1.5). Кроме условий  $h \rightarrow h_0$  при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\sigma h'' \rightarrow 2p_\sigma$  при  $x \rightarrow \infty$  должно выполняться условие для разности вязкого натяжения  $T_{xx}^{(-)}$  при  $x \rightarrow -\infty$  и вязкого натяжения  $T_{xx}^{(+)}$  при  $x \rightarrow \infty$ . Натяжения  $T_{xx}^{(-)}$  и  $T_{xx}^{(+)}$ , создаваемые за счет поверхностной вязкости, могут быть существенны, только когда  $W(L) \gg 1$ . Их значения можно найти из решения задачи во внешности переходной области.

Из (1.2) и (1.5) для разности натяжений следует:

$$(6.2) \quad T = 2T_{xx}^{(-)} - 2T_{xx}^{(+)} = 1/2 \sigma (hh'' - 1/2 h'^2)_\infty + A / (4\pi h_0^2)$$

Здесь всегда  $T > 0$ , так как во внутренней области поверхность растягивается ( $T_{xx}^{(-)} > 0$ ), а на мениске, выше переходной области, сжимается ( $T_{xx}^{(+)} < 0$ ). Здесь индекс  $\infty$  обозначает предельное значение  $x \rightarrow \infty$ . Замена переменных (4.3) приводит к задаче нахождения решений  $y(\xi)$  уравнения

$$(6.3) \quad y^4 y''' + B y' + y(y-1) = 0$$

при условиях

$$(6.4) \quad \begin{aligned} y &\rightarrow 1 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty \\ y''_\infty &= \alpha, (yy'' - 1/2 y'^2)_\infty + 1/2 B = \alpha T_1 \\ \alpha &= \frac{2p_\sigma l^2}{h_0 \sigma}, \quad B = \frac{3\alpha p_m}{p_\sigma}, \quad p_m = \frac{A}{6\pi h_0^3}, \quad T_1 = \frac{T}{p_\sigma h_0} \end{aligned}$$

Асимптотика решения (6.3)  $\xi \rightarrow -\infty$  с точностью до трансляции имеет вид

$$(6.5) \quad y = 1 + \exp(a_1 \xi) \cos(a_2 \xi + \varphi)$$

Здесь постоянные  $a_1$  и  $a_2$  определяются из решения кубического уравнения

$$\lambda^3 + B\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = a_1 + ia_2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0$$

Задавая значения фазового угла  $\varphi$  в (6.5) от 0 до  $2\pi$  и продолжая численно в область  $\xi > 0$  решение, имеющее при  $-a_1 \xi \gg 1$  вид (6.5), получим все решения задачи (6.3), (6.4).

Характерные формы переходной области представлены на фиг. 3 для значений  $B = 0, 1$  (кривые 1, 2 соответственно) и  $T_1 = 0$ . Значению безразмерного натяжения  $T_1 = 0$  соответствует предел  $T \ll p_\sigma h_0$ . Решение в переходной области, как и следует ожидать из анализа асимптотики, имеет волнообразный характер.

Численные расчеты дают зависимость величины  $\alpha, T_1, B$  в параметрической форме, в виде функций  $T_1(B, \varphi)$  и  $\alpha(B, \varphi)$ . Функция  $T_1(\alpha, B)$  представлена на фиг. 4 для значений  $B = 0, 0.5, 0.8, 1.105, 1.5, 1.8$  (кривые 1-6 соответственно). Величина  $\max T_1$  монотонно убывает от 0.346 при  $B = 0$  до 0 при  $B = 1.105$ . В области  $B > 1.105$   $\max T_1 < 0$ .

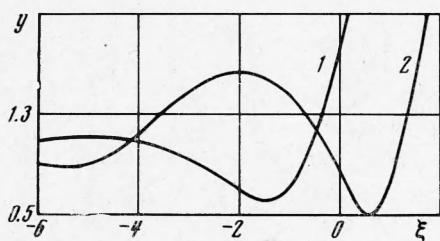


В отсутствие сил Ван-дер-Ваальса ( $B = 0$ ) и при вязком натяжении  $T \ll p_\sigma h_0$  величина  $\alpha = 1.185$ . При этом из (4.3) и (6.4) следует:

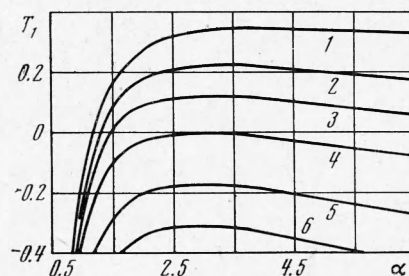
$$(6.6) \quad v_0 = 0.092 (p_\sigma h_0)^{3/2} / (\mu \sigma^{1/2})$$

Максимальное значение отношения  $p_m / p_\sigma = 0.18$  для  $T_1 = 0$  достигается при  $B = 0.9$ .

При  $B > 1.105$  или  $p_m > 0.18 p_\sigma$  стационарного решения в переходной области, удовлетворяющего условию  $T > 0$ , не существует. При  $p_m \ll p_\sigma$  отсутствие решений означает переход к течению с заторможенной поверхностью, когда надо учитывать изменение толщины до переходной области,



Фиг. 3



Фиг. 4

во внутренней области пленки. Исчезновение стационарных решений означает, что начинается гораздо более быстрое утоньшение пленки в переходной области, нежели во внутренней.

При  $p_m \sim 0.18 p_\sigma$  исчезновение стационарного решения при  $h = h_*$  сопровождается быстрым разрушением пленки. Этому способствует волнообразный характер решения (фиг. 3), так как в более тонких сечениях пленки давление  $p$  за счет молекулярных сил существенно повышено и с уменьшением толщины резко возрастает. Таким образом, если  $\mu_s \gg \gg R_0 \mu$ , то прорыв пленки в переходной области как следует из условий  $p_m < 0.18 p_\sigma$  и (6.4) происходит при толщине, большей или равной

$$h_* = 0.66 (A / p_\sigma)^{1/3}$$

**7. Плоскопараллельное утоньшение.** Поверхности пленки остаются параллельными плоскостями с переменным расстоянием  $h_0(t)$  одна от другой, если распределение скорости имеет вид  $v = v_0 x / r$ . При этом пленка и ее поверхность претерпевает однородную деформацию. Пленка сплющивается в направлении, перпендикулярном поверхности, ее поверхность расширяется. Это есть чистый сдвиг — точное решение уравнений Навье—Стокса.

Когда вязкое натяжение во внутренней области мало по сравнению с натяжением в переходной области, сращивание двух решений при  $x \approx \approx r$  производится по толщине и скорости пленки, так как соответствующие задачи в переходной области решены с учетом равенства нулю вязких натяжений при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Сращивание позволяет найти законы утоньшения.

При плоскопараллельном утоньшении зависимость скорости утоньшения от размера пленки  $r$  имеет вид

$$dh_0 / dt = - 2h_0 v_0(h_0) / r$$

причем функция  $v_0(h_0)$  определяется свойствами жидкости и ПАВ и зависит от давления в мениске  $p_\sigma$ .

Для случая  $\mu_s \ll R_0\mu$  в отсутствие сил Ван-дер-Ваальса из (5.6) и (1.1) следует:

$$(7.1) \quad dh_0 / dt = -2.5 h_0^{5/2} \sqrt{\sigma p_\sigma} / (\mu_s r), \quad \mu_s = \lambda_s + 2\eta_s$$

Отсюда  $h_0 \sim t^{-2/3}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Для  $\mu_s \ll R_0\mu$ ,  $p_\sigma \ll A / (6\pi h_0^3)$  из (5.9) получим

$$(7.2) \quad dh_0 / dt = -1.25 h_0 \sqrt{A\sigma} / (\mu_s r \sqrt{\pi})$$

Толщина пленки экспоненциально убывает со временем.

Закон утоньшения для случая  $\mu_s \gg R_0\mu$ , когда поверхность ведет себя как несжимаемая в переходной области, следует из (6.6)

$$(7.3) \quad dh_0 / dt = 0.18 p_\sigma^{3/2} h_0^{5/2} / (r \mu \sigma^{1/2})$$

Зависимость от времени аналогична (7.1).

Для справедливости формул (7.1) — (7.3) необходимо также выполнение условий, найденных в п. 3.

С ростом  $\mu_s$  в области  $\mu_s \gg R_0\mu$  формула (7.3) перестает быть справедливой, когда оказываются существенными вязкие натяжения вне переходной области.

Чтобы учесть вязкие натяжения вне переходной области, рассмотрим движение в поверхности отдельно от движения жидкости в объеме, принимая, что их взаимодействие существенно только в переходной области, которую заменим скачком натяжения. Анализ асимптотики вне переходной области показывает, что такой подход оправдан в пределе  $\mu_s \gg \gg R_0\mu$ . Кроме того, при выводе допустим, что радиус пленки  $r$  много меньше радиуса мениска  $R_0$ . Тогда поверхность мениска на расстоянии порядка нескольких  $r$  мало отличается от плоской.

Уравнение (1.4) с учетом (1.5) при сделанных предположениях дает

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2} = 0$$

Отсюда с учетом условия  $v = v_0$  при  $x = r$  находим, что

$$v = v_0 x / r \text{ при } x \in [0, r], \quad v = v_0 r / x \text{ при } x > r$$

При этом вязкие натяжения, входящие в (6.2), равны

$$(7.4) \quad T_{xx}^{(-)} = 2(\lambda_s + \eta_s) v_0 / r, \quad T_{xx}^{(+)} = -2\eta_s v_0 / r, \quad T = 4(\lambda_s + 2\eta_s) v_0 / r$$

Аналогично в плоском случае

$$(7.5) \quad v = v_0 x / r \text{ при } x \in [0, r], \quad v = v_0 \text{ при } x > r \\ T = 2(\lambda_s + 2\eta_s) v_0 / r$$

Приравнивая значения внешнего скачка натяжения (7.4) или (7.5) внутреннему скачку, определяемому из (6.4), находим

$$(7.6) \quad q \frac{\lambda_s + 2\eta_s}{6\mu r} \left( \frac{2p_\sigma h_0}{\sigma} \right)^{1/2} = \alpha^{3/2} T_1(\alpha)$$

Здесь  $q = 1, 2$  в осесимметричном и плоском случаях соответственно. Натяжениями во внутренней области можно пренебречь, если левая часть уравнения (7.6) много меньше единицы. Этому соответствует  $\alpha \approx \approx 1.185$  и закон утоньшения (7.3). С ростом левой части (7.6), как следует из п. 6, параметр  $\alpha$  монотонно возрастает, при этом скорость утоньшения падает.

**8. Утоньшение пленки под действием сил Ван-дер-Ваальса.** В случае, когда роль поверхностной диффузии мала по сравнению с ролью объем-

ной диффузии

$$(8.1) \quad D_s \ll D (1 + bc)^2 h / 2H$$

из (3.5) и (3.3) в условиях преобладающего действия сил Ван-дер-Ваальса следует:

$$(8.2) \quad -\frac{A}{2\pi} \left( \frac{D(1+bc)^2}{4H^2cRT} + \frac{1}{12\mu} \right) \operatorname{div} \left( \frac{1}{h} \operatorname{grad} h \right) = \frac{\partial h}{\partial t}$$

Хотя это уравнение неэволюционно и задача Коши для него некорректна, его решение представляет интерес, потому что пленки иногда утоньшаются только под действием сил Ван-дер-Ваальса [17] прежде чем разрушиться.

Уравнение (8.2) допускает решение

$$(8.3) \quad h = (h_0 - \alpha t) Y(x)$$

Функция  $Y(x)$  в осесимметричном случае удовлетворяет уравнению

$$(8.4) \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{1}{Y} \left( \frac{dY}{dx} \right)^2 + \frac{1}{x} \frac{dY}{dx} = Y^2 \frac{\alpha}{G}, \quad G = \frac{A}{2\pi} \left( \frac{D(1+bc)^2}{4H^2cRT} + \frac{1}{12\mu} \right)$$

$$Y = 1, \quad Y' = 0 \quad \text{при } x = 0$$

Для численного интегрирования удобно выбрать переменную

$$\xi = x \sqrt{\alpha / G}$$

Результат численного расчета представлен кривой 1 (фиг. 5). В точке  $\xi_0 = 2.828$  имеется вертикальная асимптота, толщина пленки обращается в бесконечность как  $(\xi_0 - \xi)^{-2}$ .

В (8.3)  $\alpha = G \xi_r^2 / r^2$ . Здесь  $\xi_r$  — точка на кривой  $y(\xi)$ , которой соответствует радиус пленки  $r$ . Значение  $\xi_r$  может соответствовать как расстоянию до асимптоты, так и, например, расстоянию  $\xi_r = 1.53$ , на котором толщина пленки изменяется вдвое.

В последнем случае закон утоньшения при  $D = 0$  мало отличается от того, который следует из уравнения Рейнольдса [17]. Линейная зависимость (8.3) согласуется с экспериментом [17].

В плоском случае уравнение, аналогичное (8.4), следующее из (8.2)

$$Y d^2 Y / d\xi^2 - (dY / d\xi)^2 = Y^3$$

интегрируется в явном виде

$$(8.5) \quad Y = 1 / \cos^2 (\xi \sqrt{2})$$

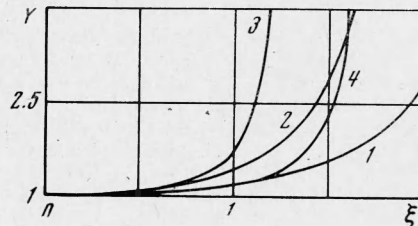
Очевидно,  $Y \rightarrow \infty$  при  $\xi \rightarrow \pi / \sqrt{2} = 2.221$ . Формуле (8.5) соответствует кривая 2 (фиг. 5).

Когда важна только поверхностная диффузия, т. е. в предельном случае, противоположном (8.1), уравнение (3.5) имеет вид

$$(8.6) \quad \frac{AD_s}{4\pi c H R T} \operatorname{div} \left( \frac{1}{h^2} \operatorname{grad} h \right) = -\frac{\partial h}{\partial t}$$

если выполнено  $6D_s \gg c H R T \mu$ . Имеется частное решение

$$h = h_0 (1 - t / \tau)^{1/2} Y(x), \quad Y(0) = 1$$



Фиг. 5

В плоском случае  $Y(\xi)$  определяется квадратурой

$$\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\ln Y}} e^{-t^2} dt = \xi, \quad \xi = x \sqrt{\frac{h_0}{\tau M}}, \quad M = \frac{AD_s}{2\pi c HRT}$$

Решение (кривая 3 на фиг. 5) обращается в бесконечность при  $\xi = \sqrt{\pi/2}$ . Через значение  $\xi_r$ , соответствующее радиусу пленки  $r$ , величина  $\tau$  определяется в виде

$$\tau = h_0 r^2 / (\xi_r^2 M)$$

В осесимметричном случае, как видно из (8.6),  $Y(\xi)$  удовлетворяет уравнению

$$Y Y'' - 2Y'^2 + Y Y' x^{-1} - Y^4 = 0$$

Решение с начальными данными  $Y = 1$ ,  $Y' = 0$  при  $\xi = 0$  обращается в бесконечность при  $\xi = 1.68$  (кривая 4 на фиг. 5). Толщина  $h$  вдвое превышает толщину в центре при  $\xi = 1.325$ .

Наличие вертикальной асимптоты в решении является общим для всех четырех рассмотренных задач. Полученные решения могут иметь смысл, только когда капиллярное давление в мениске  $p_\sigma \ll p_m = -\Pi(h_0)$  и, следовательно, размер пленки имеет порядок расстояния до вертикальной асимптоты.

Автор благодарит А. А. Трапезникова за внимание к работе, Г. А. Мартынова и Н. В. Чураева за обсуждение результатов.

Поступила 28 XI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1970.
3. Дерягин Б., Кусаков М. Свойства тонких слоев жидкостей и их влияние на взаимодействие твердых поверхностей. Изв. АН СССР, Сер. хим., 1936, № 5.
4. Scheludko A. Sur certaines particularites des lames mousseuses. Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. B, 1962, vol. 65, No. 1.
5. Scheludko A., Manev E. Critical thickness of rupture of chlorobenzene and aniline films. Trans. Faraday Soc., 1968, vol. 64, pt. 4.
6. Зонтаг Г., Штрэнге К. Коагуляция и устойчивость дисперсных систем. Л., «Химия», 1973.
7. Воинов О. В. К гидродинамическому описанию пленки простой жидкости. Ж. физ. химии, 1972, т. 46, № 2.
8. Schütt K. Über Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen. Ann. Physik, 1904, Bd. 13, H. 4.
9. Трапезников А. А. Поверхностная вязкость и методы ее измерения. Совещание по вязкости жидкостей и коллоидных растворов. I. Доклады. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1941.
10. Joly M. Rheological properties of monomolecular films. In: Surface and Colloid Sci., vol. 5. New York, Wiley, 1972.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
12. Мелвин-Хьюз Э. А. Физическая химия, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
13. Воинов О. В. Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил. ПМТФ, 1970, № 1.
14. Scheludko A. Über das Ausfließen der Lösung aus Schaumfilmen. Kolloid-Zeitschrift, 1957, Bd 155, H. 1.
15. Ivanov I. B., Radoev B., Manev E., Scheludko A. Theory of the critical thickness of rupture of thin liquid film. Trans. Faraday Soc., vol. 66, pt. 5.
16. Mysels K. J., Shinoda K., Frankel S. Soap films. London, Pergamon Press., 1959.
17. Шелудко А. Самопроизвольное утончение тонких двусторонних жидких пленок. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 6.