

УДК 539.3; 532; 517.946

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ s -УГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ РАСШИРЕНИЯ ГРАНИЦ

А. Д. Чернышов

Воронежская государственная технологическая академия, 394000 Воронеж
E-mail: chernyshovad@mail.ru

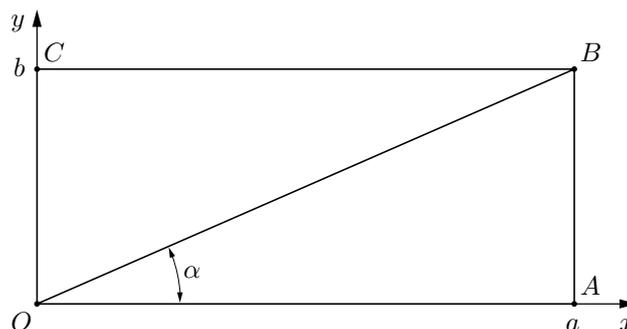
В аналитическом виде с использованием метода расширения границ получено решение задачи о кручении упругого стержня с правильным s -угольником в сечении. Метод основан на введении достаточно широкой прямоугольной области и специальных быстроходящихся рядов Фурье.

Ключевые слова: упругий стержень, кручение, метод расширения границ.

В работе [1] путем подбора полиномов из декартовых координат получено точное решение задачи о кручении стержня с правильным треугольником в сечении. В работе [2] с использованием метода разделения переменных найдено аналитическое решение о кручении стержня прямоугольного сечения. Этот подход развит в [3], где решены задачи для сечений специальной формы, границы областей которых совпадают с координатными линиями декартовой, цилиндрической или эллиптической систем координат. В [4] предложен метод теории функции комплексной переменной, однако его использование затруднено вследствие сложности построения конформных отображений.

Предложенный в настоящей работе метод расширения границ позволяет с большой точностью в аналитическом виде решать задачи теории упругости для тел сложной формы. В качестве одного из простейших примеров рассматривается задача о кручении стержня, поперечное сечение которого представляет собой правильный s -угольник. Данная задача имеет прикладное значение, так как в технике часто используются многогранные стержни, работающие на скручивание.

Разделим правильный s -угольник на $2s$ одинаковых прямоугольных треугольников с острым углом $\alpha = \pi/s$. Начало координат выберем в центре многоугольника, как показано



Треугольная и расширенная по отношению к ней области

на рисунке. Тогда для функции напряжений в треугольнике $\Omega = \Delta OAB$ задачу поставим следующим образом:

$$\Delta U = -2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \Big|_{x=a} = \frac{\partial U}{\partial x} \sin \alpha - \left(\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} \right) \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$U \in \{L_p^\alpha(\Omega), C^{(2)}(\Omega)\}$$

(L_p^α — классы функций Соболева — Лиувилля). Для вычисления производных и последующего разложения неизвестных функций в ряды Фурье необходимо, чтобы в (1) выполнялись требования гладкости ($C^{(2)}$) и интегрируемости [5]. В качестве области, расширенной по отношению к треугольнику OAB , выберем прямоугольник

$$\Omega = OABC, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

со сторонами $OA = a$ и $AB = b = a \operatorname{tg} \alpha$. Граничные условия на сторонах этого прямоугольника запишем в виде

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=b} = f_3(x), \quad U \Big|_{x=0} = f_4(y).$$

На двух сторонах прямоугольника $OABC$, которые при $y = 0$, $x = a$ совпадают с катетами треугольника, граничные условия совпадают с граничными условиями основной задачи (1), а на двух других сторонах прямоугольника при $y = b$, $x = 0$ условия $f_3(x)$, $f_4(y)$ неизвестны и находятся при выполнении условия первоначальной задачи на гипотенузе OB треугольника — последнего из граничных условий в (1). Для этого выполним замену

$$U(x, y) = M(x, y) + V(x, y), \quad (M, V) \in L_p^\alpha(\Omega), \quad (2)$$

$$(M, V) \in \{C^{(4)}(0 < x < a), C^{(3)}(0 \leq x \leq a), C^{(3)}(0 < y < b), C^{(2)}(0 \leq y \leq b)\},$$

где граничная функция M на сторонах прямоугольника должна удовлетворять тем же условиям, что и функция U :

$$\frac{\partial M}{\partial y} \Big|_{y=0} = M \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial y} \Big|_{y=b} = f_3(x), \quad M \Big|_{x=0} = f_4(y), \quad M \in C^{(2)}(\Omega). \quad (3)$$

Кроме выполнения условий (3) потребуем, чтобы вторая частная производная M_{xx} удовлетворяла дополнительным граничным условиям

$$M_{xx} \Big|_{x=a} = U_{xx} \Big|_{x=a} = f_6(y), \quad M_{xx} \Big|_{x=0} = U_{xx} \Big|_{x=0} = f_8(y). \quad (4)$$

Введение дополнительных условий (4) не вносит каких-либо ограничений на решение задачи, так как функции $f_6(y)$ и $f_8(y)$ являются неизвестными, однако позволяет в дальнейшем использовать ряды Фурье с высокой скоростью сходимости и вычислять вторые частные производные U_{xx} , U_{yy} на всех сторонах прямоугольника. В формулах (3), (4) используются четыре неизвестные функции $f_3(x)$, $f_4(y)$, $f_6(y)$, $f_8(y)$, которые выражаются через функцию U и ее частные производные на границах расширенной области Ω . Из условий гладкости (2) следует, что указанные функции не могут быть произвольными, в углах прямоугольника они должны удовлетворять условиям согласования

$$f_4'(0) = f_6'(0) = f_8'(0) = f_3(a) = 0, \quad (5)$$

$$f_3(0) = f_4(b), \quad f_6(b) = f_3''(a), \quad f_8(b) = f_3''(0).$$

Используя граничную функцию M , для отыскания U можно построить быстроходящиеся ряды Фурье. Приведем простейший вид функции $M(x, y)$:

$$M = \frac{y^2}{2b} \left[f_3(x) - \left(1 - \frac{x}{a}\right) f_3(0) - \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) f_3''(a) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) f_3''(0) \right] + \\ + \left(1 - \frac{x}{a}\right) f_4(y) + \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) f_6(y) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) f_8(y). \quad (6)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при выполнении условий согласования (5) функция M из (6) удовлетворяет граничным условиям (3), (4).

Поскольку функции $f_6(y)$, $f_8(y)$ в соотношениях (5) определяются через вторые частные производные, для вычисления этих функций в уравнении Пуассона из (1) последовательно положим $x = 0$, $x = a$. Получаем

$$U_{xx}|_{x=0} + U_{yy}|_{x=0} = -2, \quad U_{xx}|_{x=a} + U_{yy}|_{x=a} = -2. \quad (7)$$

Используя соотношения (3), (4), запишем вспомогательные выражения в виде

$$U_{xx}|_{x=0} = f_8(y), \quad U|_{x=0} = f_4(y) \Rightarrow U_{yy}|_{x=0} = f_4''(y), \quad (8) \\ U|_{x=a} = 0 \Rightarrow U_{yy}|_{x=a} = 0.$$

Из (7), (8) находим

$$f_6(y) = -2, \quad f_8(y) = -2 - f_4''(y). \quad (9)$$

С учетом (9) упростим условия согласования (5):

$$f_3(a) = f_3''(a) = f_4'(0) = f_4'''(0) = 0, \quad f_3(0) = f_4'(b), \quad f_3''(0) = -f_4'''(b). \quad (10)$$

С использованием (9), (10) выражение для функции M из (6) представим в виде

$$M = \frac{y^2}{2b} \left[f_3(x) - \left(1 - \frac{x}{a}\right) f_3(0) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) f_3''(0) \right] + (ax - x^2) + \\ + \left(1 - \frac{x}{a}\right) f_4(y) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) f_4''(y), \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b]. \quad (11)$$

Относительно функции V в расширенной области Ω для неоднородного уравнения Пуассона получаем краевую задачу с однородными граничными условиями:

$$\Delta V = -2 - \Delta M, \quad \frac{\partial V}{\partial y}|_{y=0} = V|_{x=a} = \frac{\partial V}{\partial y}|_{y=b} = V|_{x=0} = 0. \quad (12)$$

Из решения уравнения Эйлера — Лагранжа находим собственные функции и собственные значения $G_{m,n}$, $\lambda_{m,n}$

$$\Delta G_{m,n} + \lambda_{m,n} G_{m,n} = 0, \quad \frac{\partial G_{m,n}}{\partial y}|_{y=0} = G_{m,n}|_{x=a} = \frac{\partial G_{m,n}}{\partial y}|_{y=b} = G_{m,n}|_{x=0} = 0.$$

Для прямоугольника собственные функции и собственные значения имеют вид

$$G_{m,n} = \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \lambda_{m,n} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \\ m = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots$$

Искомые функции $V(x, y)$, $f_3(x)$, $f_4(y)$, каждую в своей области определения, представим в виде быстроходящихся рядов Фурье

$$U = M + V, \quad V = \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} v_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,0} \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$f_3(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) f_3(0) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) f_3''(0) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{3,m} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (13)$$

$$f_4(y) = f_4^* + \frac{y^2}{2b} f_3(0) + f_4'''(b) \left(\frac{y^4}{24b} - \frac{by^2}{12}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

В рядах Фурье (13) слагаемые перед суммами для $f_3(x)$, $f_4(y)$ (граничные функции) подобраны таким образом, чтобы данные ряды равномерно сходились в соответствующих областях их определения вместе с производными до четвертого порядка по переменной x и производными до пятого порядка по переменной y включительно [6]. При этом ряд Фурье для $U(x)$ равномерно сходится в Ω вместе со своими частными производными четвертого порядка по переменной x и производными до третьего порядка по переменной y включительно. Это позволяет дать оценку коэффициентам разложения:

$$v_{m,n} \sim \frac{1}{m^5 n^4} \quad (n \neq 0), \quad (v_{m,0}, f_{3,m}) \sim \frac{1}{m^5}, \quad f_{4,n} \sim \frac{1}{n^6}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что функция кручения U и ее частные производные U_x , U_y , через которые выражаются касательные напряжения в упругом стержне, вычисляются с погрешностью

$$\delta U \sim \max((m_0 + 1)^{-5}, (n_0 + 1)^{-4}) = \delta_0, \quad \delta U_x \sim \max((m_0 + 1)^{-4}, (n_0 + 1)^{-4}),$$

$$\delta U_y \sim \max((m_0 + 1)^{-5}, (n_0 + 1)^{-3}). \quad (15)$$

Правомерность вычисления частных производных U_x , U_y от рядов Фурье, используемых в определении решения U , обоснована тем, что при выборе граничной функции M в виде (11) и граничных функций из (13) при представлении $f_3(x)$ и $f_4(y)$ выполняются условия теоремы о почленном дифференцировании рядов Фурье [6]. Оценки (14), (15) позволяют сделать вывод, что в ряде Фурье (13) для U следует учитывать только те коэффициенты из множества $\{v_{m,n}\}$, номера m , n которых удовлетворяют неравенству $(m + 1)^5 (n + 1)^4 \leq \delta_0^{-1}$, $n \geq 1$. При построении решения задачи с точностью до 10^{-4} достаточно в суммах по индексам n , m взять по четыре слагаемых ($n_0 = m_0 = 4$). Отбрасывая малые коэффициенты высшего порядка, получаем следующее множество неизвестных величин:

$$v_{m,0}, v_{m,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, f_3(0), f_3''(0), f_{3,m}, f_4^*, f_4'''(b), f_{4,n},$$

$$m = 1, \dots, 4, \quad n = 1, \dots, 4,$$

для отыскания которых подставим U из (13) и M из (11) в уравнение Пуассона (1):

$$\sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} v_{m,n} \lambda_{m,n} G_{m,n} = \frac{y^2}{2b} \left[f_3''(x) - \left(1 - \frac{x}{a}\right) f_3''(0) \right] - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) f_4^{IV}(y) +$$

$$+ \frac{1}{b} \left[f_3(x) - \left(1 - \frac{x}{a}\right) f_3(0) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) f_3''(0) \right]. \quad (16)$$

Заменив выражение $f_3(x)$ с помощью соотношений (13), упростим равенство (16):

$$\sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} v_{m,n} \lambda_{m,n} G_{m,n} + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,0} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} = -\frac{y^2}{2b} \sum_{m=1}^{\infty} f_{3,m} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} + \\ + \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{\infty} f_{3,m} \sin \frac{m\pi x}{a} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right) \left[\frac{1}{b} f_4'''(b) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \cos \frac{n\pi y}{b} \right]. \quad (17)$$

Умножая уравнение (17) на $G_{m,n}$ и интегрируя по прямоугольной области Ω , найдем коэффициенты $v_{m,0}$, $v_{m,n}$ в явной форме

$$v_{m,0} = -f_{3,m} \frac{b}{6} + f_{3,m} \frac{a^2}{m^2 \pi^2 b} + f_4'''(b) \frac{2a^4}{m^5 \pi^5 b}, \\ v_{m,n} = \frac{2}{\lambda_{m,n}} \left[-f_{3,m} (-1)^n \frac{m^2 b}{a^2 n^2} + f_{4,n} \frac{a^2 n^4 \pi}{m^3 b^4} \right]. \quad (18)$$

Для того чтобы найти коэффициенты $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$, функции M из (11) и V из (13) подставим в соотношения (3), а затем функцию U — в последнее граничное условие из (1), заданное на гипотенузе OB при $y = x \operatorname{tg} \alpha$. В результате имеем

$$\frac{b^2 x^2}{2a^2} \sum_{m=1}^{\infty} f_{3,m} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} + b(a-2x) + \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} v_{m,n} \frac{an\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} - \\ - \frac{b}{a} \left[f_4^* + f_3(0) \frac{bx^2}{2a^2} + f_4'''(b) \frac{b^3}{12a^2} \left(\frac{x^4}{2a^2} - x^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \cos \frac{n\pi x}{a} \right] - \\ - \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) \left[f_3(0) + f_4'''(b) \frac{b^2}{6} \left(\frac{3x^2}{a^2} - 1 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \frac{n^2 \pi^2}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} \right] + \\ + \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} v_{m,n} \frac{bm\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,0} \frac{bm\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} - \\ - x \sum_{m=1}^{\infty} f_{3,m} \sin \frac{m\pi x}{a} - (a-x) \left[f_3(0) \frac{x}{a} + f_4'''(b) \frac{b^2}{6} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \right] + \\ + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right) \left[f_4'''(b)x + \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \frac{an^3 \pi^3}{b^3} \sin \frac{n\pi x}{a} \right].$$

Исключая $v_{m,0}$, $v_{m,n}$ с помощью выражений для них из (18), получаем

$$-f_3(0) \left(2x - \frac{3x^2}{2a} - \frac{a}{3} + \frac{b^2 x^2}{2a^3} \right) - f_4^* \frac{b}{a} + \\ + f_4'''(b) \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6a} - \frac{ax^2}{3} - \frac{b^4 x^4}{24a^5} + \frac{b^4 x^2}{12a^3} - \frac{b^2}{6} \left(\frac{3x^2}{a^2} - 1 \right) \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) - \right. \\ \left. - \frac{b^2}{6} \left(\frac{x^3}{a^2} - x \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + 2a^3 \left(\frac{1}{90} - \frac{x^2}{12a^2} + \frac{x^3}{12a^3} - \frac{x^4}{48a^4} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{m_0} f_{3,m} \left\{ \left[\frac{b^2 x^2 m \pi}{2a^3} - \frac{2m^3 b^2 \pi}{a^3} \sum_{p=1}^{20} (-1)^p \frac{1}{\lambda_{m,p} p^2} \cos \frac{p\pi x}{a} - \frac{b^2 m \pi}{6a} + \frac{a}{m\pi} \right] \cos \frac{m\pi x}{a} - \right. \\
& \quad \left. - \left[x + \frac{2\pi m^2}{a} \sum_{p=1}^{20} (-1)^p \frac{1}{\lambda_{m,p} p} \sin \frac{p\pi x}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^{m_0} f_{4,n} \left\{ \left[\frac{n^2 \pi^2}{b} \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) - \frac{b}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + \frac{2an^4 \pi^2}{b^3} \sum_{q=1}^{20} \frac{1}{\lambda_{q,n} q^2} \cos \frac{q\pi x}{a} \right] \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{an\pi}{b} \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \frac{an^3 \pi^3}{b^3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right) + \frac{2a^3 n^5 \pi^2}{b^5} \sum_{q=1}^{20} \frac{1}{\lambda_{q,n} q^3} \sin \frac{q\pi x}{a} \right] \sin \frac{n\pi x}{a} \right\} = \\
& \hspace{25em} = b(2x - a). \quad (19)
\end{aligned}$$

Левая и правая части уравнения (19) выражены различными функциями переменной $x \in [0, a]$, однако при надлежащем выборе коэффициентов $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$ $\forall x \in [0, a]$ значения этих частей одинаковы. Последовательно полагая в уравнении (19) $x = 0$, $x = a$, интегрируя его левую и правую части по x в пределах $[0, a]$, получаем три алгебраических уравнения. После умножения левой и правой частей (19) на $\cos(q\pi x/a)$, затем на $\sin(q\pi x/a)$ ($q = 1, 2, \dots$) и интегрирования по промежутку $[0, a]$ приходим к замкнутой относительно $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$ системе, которая может быть получена и в явной конечной форме. (Вследствие громоздкости выражений эта система не приводится.) Поскольку в данном случае используются быстросходящиеся ряды Фурье, можно применить более простой поточечный метод, позволяющий удовлетворить граничному условию (19). Для этого в каждой сумме уравнения (19) ограничимся конечным числом слагаемых, полагая $m = 1, \dots, m_0$, $n = 1, \dots, n_0$. Требуя выполнения равенства (19) не всюду, а только в расчетных точках на гипотенузе треугольника:

$$x = x_k = ak/(m_0 + n_0 + 2), \quad k = 0, \dots, m_0 + n_0 + 2, \quad (20)$$

из (19) получаем линейную систему алгебраических уравнений, замкнутую относительно $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$. Решив эту систему, найдем значения $v_{m,n}$, $f_3(0)$, f_4^* , $f_{3,m}$, $f_{4,n}$ и подставим их в выражения (13) для V , f_3 , f_4 , затем в (6) для M и в (2) для получения решения задачи U . Следует отметить, что в случае использования классических рядов Фурье поточечный метод вычисления коэффициентов неприменим. Поскольку функция U представлена в аналитическом виде, напряжения в любой точке сечения стержня вычислим по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz} = G_0 \theta \left\{ \frac{y}{b} \sum_{m=1}^{\infty} f_{3,m} \sin \frac{m\pi x}{a} - \sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} v_{m,n} \frac{\pi n}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \right. \\
\quad - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3} \right) \left(f_4'''(b) \frac{y}{b} - \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \frac{\pi^3 n^3}{b^3} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) + \\
\quad \left. + \left(1 - \frac{x}{a} \right) \left[\frac{y}{b} f_3(0) + f_4'''(b) \left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \frac{\pi n}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = & -G_0\theta \left\{ \frac{\pi y^2}{2ab} \sum_{m=1}^{\infty} f_{3,m} m \cos \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,0} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} + \right. \\ & + \frac{\pi}{a} \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} m v_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + a - 2x - \\ & - \frac{1}{a} \left[f_4^* + \frac{y^2}{2b} f_3(0) + f_4'''(b) \left(\frac{y^4}{24b} - \frac{by^2}{12} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} f_{4,n} \cos \frac{n\pi y}{b} \right] - \\ & \left. - \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) \left[\frac{1}{b} f_3(0) + f_4'''(b) \left(\frac{y^2}{2b} - \frac{b}{6} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_{4,n} \frac{\pi^2 n^2}{b^2} \cos \frac{n\pi y}{b} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь G_0 — упругий модуль Юнга; θ — угол закручивания на единицу длины стержня; $v_{m,n}$, $v_{m,0}$ следует взять из (18). При $m_0 = n_0 = 4$ и $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ для упругого стержня треугольного сечения из линейной алгебраической системы находим следующие значения коэффициентов $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$ (приводятся только первые четыре цифры после запятой): $f_3(0) = -1,7320$, $f_4^* = 0,6666$, $f_4'''(b) = 6,354 \cdot 10^{-6}$, $f_{3,1} = -1,164 \cdot 10^{-6}$, $f_{3,2} = 1,020 \cdot 10^{-7}$, $f_{3,3} = 9,465 \cdot 10^{-8}$, $f_{3,4} = 9,285 \cdot 10^{-8}$, $f_{4,1} = -1,727 \cdot 10^{-7}$, $f_{4,2} = -3,086 \cdot 10^{-9}$, $f_{4,3} = -6,891 \cdot 10^{-10}$, $f_{4,4} = -6,949 \cdot 10^{-11}$; $U(0,0) = 0,6666$. Погрешность приближенного решения имеет порядок менее 10^{-5} и определяется как разность значений функции напряжений в центре упругого стержня $U(0,0)$, полученных при приближенном решении в форме (13) и точном решении [1]. Полагая в уравнении (19) $a = 1$, $b = 1/\sqrt{3}$, находим решение задачи о кручении упругого стержня шестиугольного сечения. Получаем следующие значения коэффициентов $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$: $f_3(0) = -1,4358$, $f_4^* = -0,0423$, $f_4'''(b) = -92,5468$, $f_{3,1} = 5,4142$, $f_{3,2} = 1,7332$, $f_{3,3} = 0,7581$, $f_{3,4} = 0,1987$, $f_{4,1} = 0,3393$, $f_{4,2} = -0,0469$, $f_{4,3} = 0,0091$, $f_{4,4} = 0,0022$; $U(0,0) = 0,2613$.

Для вычисления коэффициентов $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$ и решения задачи при $m_0 = n_0 = 4$ использовалась система 11 линейных алгебраических уравнений, полученная из (19) в точках $x = x_k$ равномерной сетки (20). С целью проверки возможности применения поточечного метода для того, чтобы удовлетворить граничному условию (19), проведен следующий численный эксперимент.

Подставим в (19) приведенные выше значения коэффициентов $f_3(0)$, f_4^* , $f_4'''(b)$, $f_{3,m}$, $f_{4,n}$, разность между левой и правой частями обозначим через $\delta Y(x)$. По построению в расчетных точках $x = x_k$ должны выполняться равенства $\delta Y(x_k) = 0$, тогда как в промежуточных точках $x_k < x < x_{k+1}$ выполняются неравенства $\delta Y(x) \neq 0$. Численно проверено, что $\max |\delta Y(x)| < 10^{-6} \forall x \in [0,1]$. Это означает, что граничное условие (19) всюду выполнено с высокой точностью.

Из данного примера следует, что использование предложенного метода расширения границ позволяет получить приближенное решение в аналитическом виде с высокой точностью при незначительных вычислительных затратах. Аналогично можно решать задачи для областей более сложной криволинейной формы, а также нелинейные и динамические плоские и пространственные задачи с подвижной границей. В случае нелинейных задач система алгебраических уравнений является нелинейной, для динамических задач имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по времени t , т. е. метод расширения достаточно универсальный и имеет прикладную направленность.

Таким образом, предложенный метод расширения границ имеет существенные преимущества по сравнению с конечно-разностными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Saint-Venant В.** // Memoires Savants Etrangers. 1855. Т. 14.
2. **Тимошенко С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1979.
3. **Арутюнян Н. Х.** Кручение упругих тел / Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян. М.: Физматгиз, 1963.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
5. **Ильин В. А.** Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1991.
6. **Толстов Г. П.** Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 15/XII 2008 г.
