Таким образом, характерное время памяти капли оказывается в $1+\eta_0'/\eta$ раз меньше времени релаксации жидкости, из которой она состоит.

Поступила 20 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 533.6.011.3

РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ ГАЗА И ИНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ ИЛИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

В. И. Копченов

(*Москва*)

В рамках двухжидкостной (двухскоростной и двухтемпературной) модели сплошной среды рассматривается течение смеси газа и инородных частиц в дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой частях сопла Лаваля. В случае тонкого пристеночного слоя чистого газа задача решается в два этапа. Вначале при помощи метода установления рассчитывается ядро потока, где течет газ с частицами, при этом параметры в слое чистого газа определяются приближенно, а затем по упрощенным уравнениям (типа уравнений пограничного слоя) находится распределение параметров в зоне чистого газа и уточняется течение в ядре потока. Приведены примеры расчета. Применение развитого метода позволило установить некоторые особенности течения смеси газа с частицами в сопле Лаваля в случае стоксовского закона обтекания инородных частиц.

Для решения прямой задачи о течении смеси газа с частицами в сопле Лаваля в двумерной постановке в работах [1,2] применялся метод установления. Однако из-за отставания частиц вблизи стенки образуется слой чистого газа. Этот слой может быть достаточно тонким, но при сколь угодно малой его толщине в случае конечного относительного расхода частиц (расход частиц к расходу смеси) параметры газа в нем меняются на конечную величину. Последнее обстоятельство существенно затрудняет применение метода установления в случае малой толщины пристеночного слоя, так как для достижения удовлетворительной точности в слое чистого газа потребовалось бы достаточно мелкое разбиение, что привело бы к существенному увеличению времени счета задачи.

В работе [3] задача о течении смеси газа с частицами в сопле Лаваля решалась с помощью метода возмущений. Предполагалось, что коэффициенты φ^f и φ^q, определяющие взаимодействие частиц с газом, велики. Решение находилось в виде разложений по малым параметрам $\varepsilon_1=1/\varphi^f$ и $\varepsilon_2=1/\varphi^q$. Были получены упрощенные уравнения, описывающие течение в пристеночном слое чистого газа. Отмечалось, что, поскольку малый параметр появляется в уравнениях лишь через толщину слоя, которая в рассматриваемом в указанной работе случае пропорциональна ε_1, те же самые соотношения будут справедливы при любом ε_1 для слоя чистого газа, толщина которого мала по сравнению с характерным размером сопла.

В соответствии с вышесказанным в данной работе решение прямой задачи о течении смеси газа с частицами в сопле Лаваля в случае достаточно тонкого пристеночного слоя проводится в два этапа. Вначале с помощью метода установления рассчитывается ядро потока, где течет газ с частицами. Задача решается на грубом для пристеночного слоя, но достаточном, с точки зрения точности в ядре, разбиении. Затем по упрощенным уравнениям на основании распределений параметров газа вдоль линии раздела, полученных с помощью метода установления, находится течение в пристеночном слое с последующим уточнением течения в ядре. Применение развитого в работе метода позволило установить и изучить некоторые особенности течения смеси газа и частиц в сопле Лаваля в случае стоксовского закона.

Рассмотрим течение смеси газа и инородных частиц в осесимметричном сопле Лаваля. Начало цилиндрической системы координат поместим в минимальном сечении сопла, ось x направим по оси течения в сторону движения, а ось y — перпендикулярно оси x. Предполагается, что коагуляция, фазовые переходы, внешние силы и источники тепла отсутствуют, а объем частиц пренебрежимо мал по сравнению с объемом газа. Примем, что рассматриваемое течение можно описать в рамках модели двухжидкостной сплошной среды. Уравнения течения такой среды приведены, например, в [2].

В рамках указанной модели взаимодействие между газом и частицами обусловлено силой $\mathbf{f}$, с которой газ действует на частицы, и тепловым потоком q от газа к частицам, причем под $\mathbf{f}$ и q понимаются величины, приходящиеся на одну частицу, отнесенные к ее массе. Для $\mathbf{f}$ и q принимаются следующие выражения: $\mathbf{f}=\varphi^f(\mathbf{W}-\mathbf{W}_s)$; $q=\varphi^q(T-T_s)$, где $\mathbf{W}$ и T—вектор скорости и температура газа, а $\mathbf{W}_s$ и T_s—аналогичные величины для частиц. Коэффициенты φ^f и φ^q в дальнейшем будем считать постоянными, что отвечает стоксовскому режиму обтекания каждой частицы. Отметим, что последнее предположение о режиме обтекания частиц не принципиально с точки зрения используемого метода.

Рассматривается совершенный газ с постоянными теплоемкостями и показателем адиабаты $\varkappa$. Удельная внутренняя энергия частиц e_s есть линейная функция их температуры T_s, т. е. $e_s=\delta T_s$, где $\delta=\text{const}$ — удельная теплоемкость частиц.

Все величины в приведенных соотношениях и далее будут безразмерными. Пусть L, W_*, ρ_* — характерные величины с размерностями длины, скорости и плотности, а R — размерное значение газовой постоянной. Тогда приведение к безразмерному виду достигается отнесением пространственных переменных к L, скоростей — к W_*, плотностей — к ρ_*, давления — к $\rho_* W_*^2$, энтальпии и внутренней энергии — к W_*^2, температур — к W_*^2/R, теплоемкости частиц — к R, силы $\mathbf{f}$ — к W_*^2/L, теплового потока q—к W_*^3/L. За L принимается радиус минимального сечения сопла, а в качестве ρ_*, W_* выбираются критические плотность и скорость смеси при равновесном течении, т. е. течении без отставания частиц по скорости и температуре.

Решение стационарной задачи получается в процессе установления по времени. Граничные условия берутся совпадающими с граничными условиями соответствующей стационарной задачи. Предполагается, что сопло плавно примыкает к полубесконечной цилиндрической трубе. Тогда при $x\to-\infty$ реализуется течение без динамического (по скорости) и теплового (по температуре) отставания частиц, с вертикальными составляющими скоростей газа и частиц, равными нулю. Распределения полной энтальпии и энтропии смеси, отношение плотности частиц к плотности газа считаются постоянными по сечению. Известно, (см., например, [3]), что равновесное течение смеси газа и частиц эквивалентно течению газа с плотностью $\rho_\Sigma = \rho + \rho_s$ и эффективным показателем адиабаты $\varkappa_e$, который определяется с помощью следующих соотношений:

$$\varkappa_e = \frac{\beta}{\beta - 1} \quad \left(\beta = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{1-m}{m}\delta\right).$$

Здесь ρ, ρ_s, ρ_Σ — плотности газа, частиц и смеси соответственно, а $m = \rho/(\rho + \rho_s)$—заданная константа, равная относительному расходу газа при $x \to -\infty$. При проведении расчетов граничные условия сносились в некоторое достаточно удаленное сечение $x = x_0$ в цилиндрической части канала.

На стенке сопла и на оси выполняется условие непротекания для газа. Для частиц подобное граничное условие не выставляется. Однако предполагается, что отсутствуют отражение частиц от стенки и пересечение линий тока частиц в поле течения. Выполнимость последнего условия может быть проверена после решения задачи. При его нарушении описание течения в рамках двухжидкостной среды становится невозможным.

Выходное сечение сопла выбирается настолько далеко в расширяющейся части, что там реализуется условие $u > a$, где u — проекция скорости газа $\mathbf{W}$ на ось x; $a = \sqrt{\varkappa p/\rho}$— скорость звука в газе, и поэтому в указанном сечении не нужно ставить какие-либо дополнительные граничные условия.

Стационарное поле течения получается в процессе установления по времени. Особенности разностной схемы, применявшейся при установлении, изложены в [2]. По найденным в результате установления распределениям параметров вдоль линии раздела между слоем чистого газа и ядром потока при помощи упрощенных уравнений, предложенных в [3], находится течение в пристеночном слое.

Рассмотрение течения в слое чистого газа проводится в криволинейной системе координат τn, связанной со стенкой сопла, причем оси τ и n направлены по касательной и по нормали к стенке в сторону газа соответственно. Следует отметить, что данный подход допускает расчет пристеночного слоя по сечениям, нормальным к стенке. Распределение параметров в слое чистого газа с точностью до $0(\varepsilon)$, где ε — малый параметр, равный отношению толщины слоя к характерному размеру задачи, в сечении $\tau = \text{const}$ находится из следующей системы уравнений:

$$i(p, \rho) + U^2/2 = H(\psi); \; S(p, \rho) = S(\psi); \; \frac{\partial p}{\partial n} = \rho U^2 K, \;\; d\psi = -cy^\nu \rho U dn,$$

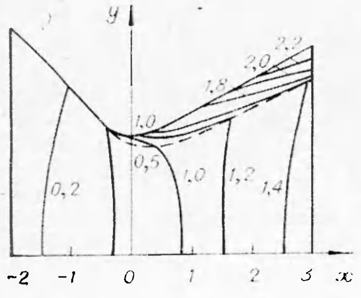
где U — проекция вектора скорости газа на ось τ; ψ — функция тока; c — константа, которая выбирается так, чтобы при $\psi = 0$ на оси симметрии значение функции тока на стенке ψ_w равнялось единице; S — энтропия; K — кривизна стенки, а функции $H(\psi)$ и $S(\psi)$ определяются по значениям полной энтальпии и энтропии газа на линии раздела. В качестве независимой переменной удобно рассматривать ψ. Параметры определяются последовательно от линии раздела, где $\psi = \psi_d$ (индекс d относится к линии раздела), до точки, где $\psi = \psi_w$, причем ψ_w находится по значению функции тока в точке схода линии раздела со стенки. При этом линия $\psi = \psi_w$ не будет совпадать с заданной стенкой сопла, что связано как с погрешностями, допущенными в расчетах, так и с влиянием неравномерности потока в слое чистого газа.

Контур сопла поправляется с учетом толщины вытеснения, и снова проводится расчет течения с помощью метода установления. На следующем этапе определяются параметры в пристеночном слое. Расчеты показали, что уже после однократного пересчета контура линия $\psi=\psi_w$ располагается существенно ближе к верхней стенке заданного сопла, чем при первоначальном определении параметров в пристеночном слое. Отклонение линии $\psi=\psi_w$ от исходного контура сопла составляло в рассмотренных примерах приблизительно 1%. Описанный выше процесс последовательных приближений может быть продолжен.

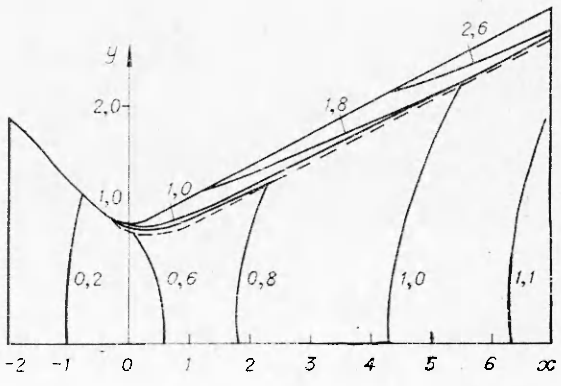
Основные расчеты проводились для осесимметричного сопла, контур которого задавался следующим образом. Сужающаяся и расширяющаяся части были образованы отрезками прямых с углами наклона к оси x 30 и 15° соответственно. Прямолинейные участки плавно сопрягались между собой дугой окружности единичного радиуса (все размеры относились к ординате минимального сечения сопла). Сужающаяся часть сопла примыкает к дуге окружности радиуса $r=2$, плавно переходящей в цилиндрический участок того же радиуса. Константы $\varkappa$ и δ брались равными 1,4 и 0,7 соответственно.

На фиг. 1, 2, где масштаб по оси y вдвое больше, чем по оси x, сплошными кривыми изображены линии постоянных чисел Маха газа соответственно для случаев $m=1/2$ и 1/4, при этом $\varphi^f=2$ и $\varphi^q=4$. Число Маха подсчитывалось по скорости звука в газе $M=W/a$. Штриховой кривой изображена линия раздела. Следует отметить, что смещение звуковой линии $M=1$ вниз по течению от минимального сечения сильно зависит от относительного расхода частиц и составляет на оси 0,85 и 4,29 радиусов горла сопла соответственно при $m=1/2$ и 1/4. В пристеночном слое происходит интенсивный разгон потока, течение там существенно неравномерное.

В процессе расчетов варьировался параметр φ^f, при этом всегда величина φ^q равнялась удвоенному значению φ^f. На фиг. 3 показано распределение M газа вдоль оси сопла в его расширяющейся части при $m=1/2$. Кривые *1—10* на фиг. 3, 4 соответствуют значениям коэффициента взаимодействия 0; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0; 8,0 и равновесному течению, т. е. течению без скоростного и температурного отставания частиц (последнему отвечает $\varphi^f=\infty$). Следует отметить, что M в выходном сечении сопла всегда меньше величины, соответствующей замороженному течению, когда

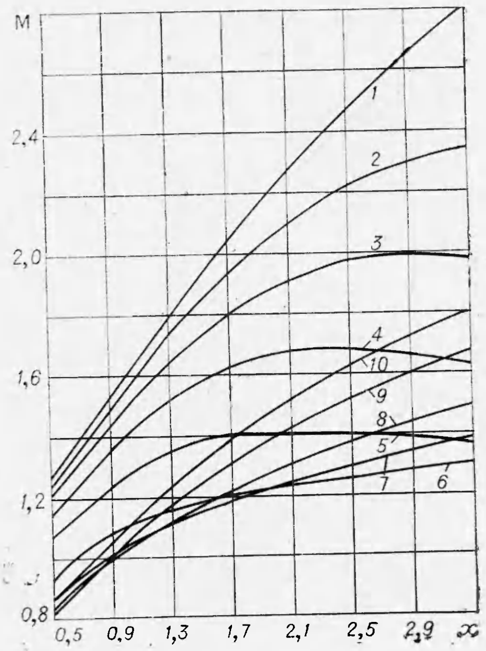


Фиг. 1



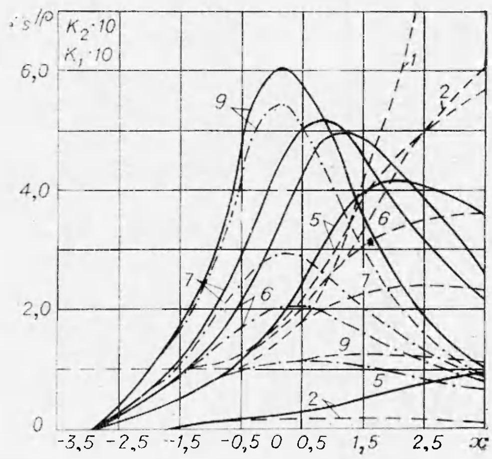
Фиг. 2

отсутствует взаимодействие между фазами, но может быть как больше, так и меньше значения, отвечающего равновесному течению. В некоторых случаях присутствие частиц приводит к тому, что с ростом x число Маха на оси сопла начинает уменьшаться. Последнее объясняется преобладанием тормозящего воздействия частиц на газ над разгоном, связанным с расширением сопла.



Фиг. 3

На фиг. 4 показано изменение некоторых величин, определяющих силовое воздействие частиц на газ, для различных коэффициентов взаимодействия. Уменьшение φ^f приводит к возрастанию отставания частиц по скорости. В то же время, как видно из фиг. 4, величина $K_1 = \varphi^f(1 - W_s/W)$, распределение которой по оси сопла представлено штрихпунктирной кривой, с ростом φ^f при всех x монотонно увеличивается. Однако силовое воздействие частиц на газ определяется не только отставанием частиц по скорости, но и отношением плотностей частиц и газа. Изменение величины ρ_s/ρ вдоль оси сопла для различных значений φ^f показано штриховыми кривыми. Следует отметить, что при переходе от равновесного режима течения к замороженному наблюдается возрастание отношения плотностей частиц и газа почти по всей длине сопла. Последнее приводит к немонотонному по φ^f изменению величины $K_2 = \varphi^f(1 - W_s/W)\rho_s/\rho$, учитывающей вклад как динамического отставания частиц, так и отношения плотностей в силовое воздействие частиц на газ. Распределения величины K_2 по оси x для различных значений φ^f показаны сплошными кривыми. Отмеченная немонотонность может быть причиной рассматриваемой ранее особенности в поведении M газа на оси сопла при изменении φ^f. В работе [4], где представлен обзор по одномерным двухфазным течениям в соплах, также содержатся данные, свидетельствующие о немонотонном изменении скорости газа при увеличении коэффициента взаимодействия.



Фиг. 4

В заключение автор благодарит А. Н. Крайко за руководство работой, Л. Е. Стернина за ценные замечания, Е. В. Буганову и Л. П. Фролову за помощь в работе.

Поступила 12 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васенин И. М., Рычков А. Д.* Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лаваля.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1973, № 5, с. 178—181.
2. *Копченов В. И., Крайко А. Н.* Решение в рамках двухжидкостной модели прямой задачи о двухфазном течении в сопле Лаваля.—«Труды НИИ Механики МГУ», 1974, № 32.
3. *Крайко А. Н., Ткаленко Р. А.* К решению прямой задачи теории сопла Лаваля для двухфазной смеси при малом отставании частиц.— ПМТФ, 1973, № 4, с.89—100.
4. *Hoglund R. F.* Recent advances in gas-particle nozzle flows.—«ARS J.», 1962, vol. 32, N 5, p. 662—671.

УДК 533.6.011+536.423.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Г. А. Салтанов, Р. А. Ткаленко

(*Москва*)

Конденсация пересыщенного пара в трансзвуковом потоке может привести к нестационарности течения. Это обусловлено выделением скрытой теплоты конденсации, образованием ударной волны и ее взаимодействием с зоной конденсации. Впервые такое явление отмечено в [1,2], где сказано, что характер движения ударной волны зависит от параметров в начальном сечении, относительной влажности и контура сопла. В работе [3] измерены значительные пульсации параметров потока (с частотой 500—1000 Гц), возникающие при течении в воздухе влажного воздуха и чистого водяного пара. В [4] выведен приближенный закон подобия для безразмерной частоты нестационарного течения. В работах [5,6] рассматриваемое явление изучалось методом обращения воздействия, в [7,8] проведены теоретические расчеты и экспериментально подтверждена диаграмма, позволяющая определить границы области устойчивости течения. В последнее время было найдено, что частота пульсаций давления и плотности при течении с конденсацией влажного воздуха может достигать 6000 Гц [9].

В данной работе модифицированным методом С. К. Годунова [10] получено численное решение системы уравнений, описывающей нестационарное квазиодномерное течение со спонтанной конденсацией в трансзвуковой части сопла Лаваля.

Расчеты неравновесных нестационарных течений в соплах методом установления проводились и ранее, например, в работах [11,12] (смешанное течение в соплах), [13] (течение с учетом колебательной релаксации и неравновесных химических реакций), [14] (двухфазное течение в сопле при рассогласовании фаз по скоростям и температурам). Специфика данной задачи состоит в том, что в процессе установления при стационарных начальных и граничных условиях предельное состояние не является стационарным, однако обнаруживает известную периодичность.

1. Рассмотрим нестационарное квазиодномерное течение в сопле Лаваля пересыщенного пара без учета вязкости, теплопроводности и излучения. Предположим, что скорости фаз одинаковы, конденсация спонтанная. Зависимость площади поперечного сечения сопла от координаты x, изменяющейся вдоль оси, задается функцией $F(x)$, причем $x=0$ соответствует минимальному сечению сопла. Пусть p — давление; ρ — плотность смеси; u — скорость; t — время, параметры конденсирующейся