$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65N15, 65N30

Априорные границы ошибки для параболических интерфейсных задач с данными измерений*

Дж. Сен Гупта

Department of Mathematics, Bits Pilani Hyderabad, Hyderabad, 500078, India

E-mail: jhumagupta08@gmail.com

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 16, 2023.

Сен Гупта Дж. Априорные границы ошибки для параболических интерфейсных задач с данными измерений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2023.— Т. 26, № 3.— С. 313–330.

В данной статье рассматривается априорный анализ ошибок для линейных параболических интерфейсных задач с данными измерений во времени в ограниченной выпуклой многоугольной области в $\mathbb{R}^2$. Анализируются как пространственно дискретные, так и полностью дискретные аппроксимации. Мы используем стандартную непрерывную дискретизацию методом конечных элементов для пространства, в то время как для дискретизации по времени используется неявная аппроксимация Эйлера. Ввиду низкой регулярности данных задачи решение имеет очень низкую регулярность во всей области. Априорные границы ошибки в $L^2(L^2(\Omega))$-норме как для пространственно дискретной, так и для полностью дискретной конечно-элементных аппроксимаций получаются при минимальной регулярности с помощью L^2-проекционного оператора и двойственности. Для подтверждения теоретических выводов были проведены численные эксперименты. Для нашей цели предполагается, что интерфейсы гладкие.

DOI: 10.15372/SJNM20230307

Ключевые слова: *параболические интерфейсные задачи, пространственно дискретная и полностью дискретная конечно-элементные аппроксимации, априорный анализ ошибок, данные измерений.*

Sen Gupta J. A priori error bounds for parabolic interface problems with measure data // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2023.— Vol. 26, № 3.— P. 313–330.

This article studies a priori error analysis for linear parabolic interface problems with measure data in time in a bounded convex polygonal domain in $\mathbb{R}^2$. Both the spatially discrete and the fully discrete approximations are analyzed. We have used the standard continuous fitted finite element discretization for the space while, the backward Euler approximation is used for the time discretization. Due to the low regularity of the data of the problem, the solution possesses very low regularity in the entire domain. A priori error bounds in the $L^2(L^2(\Omega))$-norm for both the spatially discrete and the fully discrete finite element approximations are derived under minimal regularity with the help of the L^2-projection operator and the duality argument. Numerical experiments are performed to underline the theoretical findings. The interfaces are assumed to be smooth for our purpose.

Keywords: *parabolic interface problems, spatially discrete and fully discrete finite element approximation, a priori error analysis, measure data.*

1. Введение

Цель данной статьи — априорный анализ ошибки пространственно дискретной и полностью дискретной неявных конечно-элементных аппроксимаций Эйлера для линейных

*Работа выполнена при поддержке DST-SERB, Индия (проект № CRG/2020/003227).

параболических интерфейсных задач с данными измерений во времени. Для начала введем следующую параболическую интерфейсную задачу.

Пусть Ω — ограниченная выпуклая многоугольная область в $\mathbb{R}^2$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, Ω_1 — подобласть Ω с C^2-границей $\partial\Omega_1 := \Gamma$. Граница Γ делит область Ω на две подобласти: Ω_1 и $\Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1$. Рассмотрим линейную параболическую интерфейсную задачу

$$\partial_t u(x,t) + \mathcal{L}u = \mu \quad \text{в} \quad \Omega_T := \Omega \times (0,T], \quad T > 0, \tag{1.1}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_T := \partial\Omega \times (0,T] \tag{1.2}$$

и условиями скачка на границе $\Gamma_T := \Gamma \times [0,T]$:

$$[u] = 0, \qquad \left[\beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right] = 0, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{L}$ — линейный эллиптический оператор второго порядка, определяемый как

$$\mathcal{L}(w) := -\mathrm{div}\big(\beta(x)\nabla w\big).$$

Символ $[v]$ обозначает скачок величины v на границе Γ, т. е. $[v](x) = v_1(x) - v_2(x)$, $x \in \Gamma$ при $v_i(x) = v(x) \mid_{\Omega_i}$, $i = 1,2$, и $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Коэффициент диффузии $\beta(x)$ предполагается положительным и кусочно-постоянным в каждой подобласти:

$$\beta(x) = \beta_i \quad \text{для} \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1,2.$$

Символ $\mathbf{n}$ обозначает единичную внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_1$.

Начальная функция $u_0(x) \in L^2(\Omega)$ и $\mu = f\sigma$ при $f \in \mathcal{C}\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$ и $\sigma \in \mathcal{M}[0,T]$, где $\mathcal{M}[0,T]$ — пространство вещественных и регулярных борелевских мер в $[0,T]$. Действительно, $\mathcal{M}[0,T]$ определяется как двойственное пространство $\mathcal{C}[0,T]$ со стандартной операторной нормой, задаваемой выражением

$$\|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]} = \sup\left\{\int_0^T g\,d\sigma \ : \ g \in \mathcal{C}[0,T], \ \sup_{t\in[0,T]} |g(t)| \le 1\right\}.$$

Далее предположим, что граница Γ произвольной формы, но принадлежит к классу C^2.

Параболические задачи с данными измерений во времени в основном возникают при изучении параболических задач оптимального управления с точечными ограничениями состояния (см. [7, 13, 20] и имеющиеся там ссылки). Параболические задачи с данными измерений используются в самых разных приложениях, например, при моделировании уравнений переноса сброса сточных вод в водные среды [2], при проектировании водоотведения морских сбросов, загрязненых стоками из канализационных систем [19], а также во многих других [11, 13, 21].

Существование и единственность решений как эллиптических, так и параболических задач с данными измерений исследовались Л. Боккардо и Т. Галлуэ [5], Е. Касасом [7]. Метод конечных элементов для эллиптических задач с данными измерений исследовался Р. Арайей [2], И. Бабушкой [3], Е. Касасом [6], Р. Скоттом [23], а затем, для параболических задач, В. Гонгом [13].

Метод конечных элементов для параболических интерфейсных задач подробно изучался многими авторами, например, З. Ченом и Дж. Цзоу [8], Р. Синхой и В. Декой [24], Дж. Хуангом и Дж. Цзоу [16]; для подробной информации см. [4, 14] и имеющиеся там ссылки. Насколько известно автору, метод конечных элементов для параболических интерфейсных задач с данными измерений во времени еще не исследовался. Поэтому в данной статье предпринята попытка получить априорные границы ошибки для параболических интерфейсных задач с данными измерений во времени.

Для интерфейсных задач известно, что вследствие разрыва коэффициентов вдоль границы Γ решение задачи имеет плохую общую регулярность в пространстве [17]. Кроме того, решение параболических задач с данными измерений во времени также имеет плохую регулярность [13]. Поэтому следует использовать технику двойственности, чтобы получить границу ошибки, которая, в свою очередь, зависит от априорной границы ошибки для соответствующей обратной параболической задачи с исходным членом в $L^2(\Omega)$ (см. [13]). Следует отметить, что автор точно использовал H^2-регулярность обратной параболической задачи [13, лемма 2.1] для получения границы ошибки оптимального порядка в $L^2(L^2(\Omega))$-норме. Однако для интерфейсных задач нельзя иметь H^2-регулярность оператора решения для интерфейсной задачи (2.4). Фактически мы использовали общую H^1-регулярность решения для получения априорной оценки (см. лемму 3.3) для обратной задачи (2.4). Для этого мы получили некоторые новые результаты аппроксимации (см. лемму 3.1) для проекционного оператора Ритца R_h, определенного в пункте 3.

Основные результаты статьи представлены в теореме 3.18 для пространственно дискретного случая и в теореме 4.1 для полностью дискретной аппроксимации. Для размера временного шага k и пространственного размера сетки h мы получим следующие границы ошибки: для пространственно дискретного случая

$$\|u-u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le ch\,|\log h\,|\left\{\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]}\right\}, \tag{1.4}$$

где u_h — полудискретная аппроксимация точного решения u; для полностью дискретной границы ошибки

$$\|u-U_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le c\,(h\,|\log h\,| + k^{\frac{1}{2}})\left\{\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]}\right\}. \tag{1.5}$$

Следует отметить, что появление множителя $|\log h\,|$ в (1.4) и (1.5) является естественным вследствие дополнительной регулярности в пространстве, в отличие от параболических задач [13]. Подчеркнем, что регулярность решения сопряженной задачи (2.4) (см. лемму 2.2) использовалась для получения границ ошибки.

Статья построена следующим образом. В п. 2 мы кратко введем некоторые обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем, и конечно-элементную дискретизацию области и напомним некоторые результаты интерполяции, имеющиеся в литературе. Кроме того, мы также напомним результаты устойчивости для параболических интерфейсных задач и обсудим корректность параболических интерфейсных задач с данными измерений во времени. Пункт 3 посвящен обсуждению пространственно дискретной конечно-элементной аппроксимации для параболических интерфейсных задач с данными измерений, а также некоторых вспомогательных результатов и априорной оценке ошибки в $L^2(L^2)$-норме для интерфейсных задач. В п. 4 обсуждается априорный анализ ошибки для полностью дискретной неявной аппроксимации Эйлера. В п. 5 проводится численная проверка полученных оценок. Заключительные замечания представлены в п. 6. В этой статье мы используем c в качестве общей постоянной.

2. Предварительная информация

В этом пункте мы введем некоторые стандартные функциональные пространства, включая некоторые результаты вложения, и конечно-элементную дискретизацию области Ω. Вспомним также некоторые свойства аппроксимации интерполяционного оператора Лагранжа с условиями слабой регулярности из [8]. Кроме того, напомним результаты устойчивости для параболических интерфейсных задач. И, наконец, рассмотрим вопрос существования и единственности слабых решений интерфейсных задач с данными измерений во времени.

2.1. Функциональные пространства

Мы будем использовать стандартные обозначения функциональных пространств (см., например, [1]). При наличии измеримого по Лебегу множества $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^2$ и $1 \le p \le \infty$ $L^p(\mathcal{N})$ можно отнести к стандартным пространствам Лебега с нормой $\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{N})}$. В частности, $L^2(\mathcal{N})$ — гильбертово пространство по норме, индуцированной скалярным произведением $(v, w) = \int_{\mathcal{N}} v(x)w(x)\,dx$. Обозначим норму в $L^2(\mathcal{N})$ при помощи $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$. Для целого $m > 0$ $H^m(\mathcal{N})$ — обычное пространство Соболева со стандартной нормой $\|\cdot\|_{m,\mathcal{N}}$. Функциональное пространство $H_0^1(\mathcal{N})$ является подпространством $H^1(\mathcal{N})$, элементы которого имеют исчезающий след на границе $\partial\mathcal{N}$. Для простоты опустим индекс $\mathcal{N}$, когда $\mathcal{N} = \Omega$. Пусть $H^{-1}(\Omega)$ — двойственное пространство $H_0^1(\Omega)$. Обозначим соответствующую норму $\|\cdot\|_{-1}$.

Кроме того, пусть $\mathcal{D}(\Omega_T)$ обозначает пространство $\mathcal{C}_\infty(\Omega_T)$-функций с компактным носителем в Ω_T. Пусть $(v, w)_{\Omega_T}$ обозначает L^2-скалярное произведение на $L^2(\Omega_T)$, определяемое следующим образом:

$$(v, w)_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} vw\,dx\,dt \quad \forall\, v, w \in L^2(\Omega_T).$$

Для действительного банахова пространства $\mathbf{B}$ и $1 \le p < +\infty$ определим

$$L^p(0, T; \mathbf{B}) \;=\; \left\{ v : (0, T) \to \mathbf{B} \mid v \text{ измеримо и } \int_0^T \|v(t)\|_{\mathbf{B}}^p\,dt < +\infty \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{L^p(0,T;\mathbf{B})} \;:=\; \left(\int_0^T \|v(t)\|_{\mathbf{B}}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

и стандартной модификацией для $p = \infty$.

Мы также будем работать с пространством $X = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_2)$, имеющим норму

$$\|v\|_X := \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|_{H^2(\Omega_1)} + \|v\|_{H^2(\Omega_2)}.$$

Положим

$$\mathcal{X}(0, T) := L^2\big(0, T; H_0^1(\Omega)\big) \bigcap H^1\big(0, T; H^{-1}(\Omega)\big),$$

$$\mathcal{Y}(0, T) := L^2\big(0, T; X(\Omega)\big) \bigcap H^1\big(0, T; L^2(\Omega)\big).$$

Известно, что $\mathcal{X}(0, T) \hookrightarrow \mathcal{C}\big([0, T];\, L^2(\Omega)\big)$ и $\mathcal{Y}(0, T) \hookrightarrow \mathcal{C}\big([0, T];\, H_0^1(\Omega)\big)$ [13, 18].

Теперь введем билинейные формы $a(\cdot,\cdot)$, соответствующие линейному оператору $\mathcal{L}$ на Ω и Ω_T соответственно, следующим образом:

$$a(v,w) = \int_\Omega \beta \nabla v \nabla w \, dx \quad \forall\, v, w \in H_0^1(\Omega),$$

$$a_T(v,w) = \int_{\Omega_T} \beta \nabla v \nabla w \, dx\, dt \quad \forall\, v, w \in L^2\big(0,T; H_0^1(\Omega)\big).$$

Предположим, что билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ является ограниченной и коэрцитивной на $H_0^1(\Omega)$, т. е. $\exists\, \alpha, \gamma > 0$, такие что

$$|a(v,w)| \le \alpha\, \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \forall\, v, w \in H_0^1(\Omega), \tag{2.1}$$

$$a(v,v) \ge \ \gamma \|v\|_1^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

2.2. Конечно-элементная дискретизация области Ω

Для определения конечно-элементной аппроксимации опишем регулярную триангуляцию соответствующей формы $\mathcal{T}_h = \{K\}$ для $\bar{\Omega}$. Для начала аппроксимируем область Ω_1 многоугольником P_{Ω_1} с границей Γ_P, таким что все вершины многоугольника лежат на границе Γ. Таким образом, Γ_P делит область Ω на две подобласти P_{Ω_1} и P_{Ω_2}, где P_{Ω_2} — многоугольник, аппроксимирующий область Ω_2. Сделаем следующие предположения о триангуляции $\mathcal{T}_h$ [8]:

A1. Если $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ и $K_1 \ne K_2$, то либо $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, либо $K_1 \cap K_2$ имеют общее ребро или общую вершину. Также предположим, что каждый треугольник находится в P_{Ω_1} или в P_{Ω_2} или пересекает границу Γ самое большее на ребре.

A2. Пусть $h := \max\{h_K \mid h_K = \operatorname{diam}(K),\, K \in \mathcal{T}_h\}$. Предполагается, что семейство регулярных триангуляций соответствующей формы $\mathcal{T}_h$ является квазиоднородным, т. е. существуют постоянные C_0, $C_1 > 0$, не зависящие от h, такие что

$$C_0 r_K \le h \le C_1 \bar{r}_K \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h,$$

где r_K и $\bar{r}_K$ — диаметры вписанной и описанной окружностей треугольника K соответственно.

Для регулярной триангуляции $\mathcal{T}_h$ области Ω рассмотрим следующее конечно-элементное пространство:

$$\mathbb{V}_h := \left\{ \chi \in H_0^1(\Omega) \mid \ \chi\,|_K \in \mathbb{P}_1(K) \ \text{ для всех } \ K \in \mathcal{T}_h \right\},$$

где $\mathbb{P}_1(K)$ — пространство многочленов степени не выше 1 по K.

2.3. Оценки интерполяции

В априорном анализе ошибки для параболических задач используются аппроксимационные свойства стандартного интерполяционного оператора Лагранжа. Известно, что для аппроксимации $O(h^2)$ с использованием кусочно-линейных конечных элементов необходима общая H^2-регулярность функции [10]. Однако из-за разрыва коэффициента вдоль границы Γ решение параболической интерфейсной задачи глобально только в $H^1(\Omega)$. Следовательно, стандартные свойства аппроксимации не применимы к интерфейсным задачам. Фактически имеются следующее результаты [8].

Лемма 2.1 [8]. *Пусть* $\Pi_h : C(\bar{\Omega}) \longrightarrow V_h$ — *стандартный интерполяционный оператор Лагранжа* [10]. *Тогда верны следующие оценки интерполяции*:

$$\|v - \Pi_h v\| + h\|\nabla(v - \Pi_h v)\| \le ch^2 |\log h|^{\frac{1}{2}} \|v\|_X \quad \forall\, v \in X.$$

Отметим, что результаты аппроксимации, полученные в [8], используют общую $H^1(\Omega)$-регулярность, и оценки имеют почти оптимальный порядок с точностью до множителя $|\log h|$.

2.4. Результаты устойчивости для параболических интерфейсных задач

Для обсуждения решения (1.1)–(1.3) в слабом смысле рассмотрим прямые и обратные во времени параболические интерфейсные задачи следующего вида: для $g \in L^2(\Omega_T)$ пусть ϕ и ψ — это решения систем

$$\begin{cases} \partial_t \phi(x,t) + \mathcal{L}\phi = g \ \text{ в } \ \Omega_T, \\ \phi(x,0) = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \qquad \phi = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_T, \\ [\phi] = 0, \ \left[\beta \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}\right] = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_T \end{cases} \tag{2.3}$$

и

$$\begin{cases} -\partial_t \psi(x,t) + \mathcal{L}^*\psi = g \ \text{ в } \ \Omega_T, \\ \psi(x,T) = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \qquad \psi = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega_T, \\ [\psi] = 0, \ \left[\beta \dfrac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\right] = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_T \end{cases} \tag{2.4}$$

соответственно, где $\mathcal{L}^*$ — сопряженный оператор эллиптического оператора $\mathcal{L}$, задаваемый следующим образом:

$$\mathcal{L}^* w = -\sum_{i,j=1}^{2} \partial_{x_j}\big(\beta(x)\partial x_i w\big).$$

Представим результаты устойчивости для параболических интерфейсных задач (см. [8, 17, 24]).

Лемма 2.2. *Пусть* $g \in H^1\big(0,T; L^2(\Omega)\big)$. *Тогда задачи* (2.3) *и* (2.4) *имеют единственное решение* v ($v = \phi$ *или* $v = \psi$), *такое что* $v \in L^2(0,T;X) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$. *Кроме того,* $L^2(0,T;X) \cap H^1\big(0,T;L^2(\Omega)\big) \hookrightarrow \mathcal{C}\big([0,T];H^1(\Omega)\big)$ *и* v *удовлетворяет следующим априорным оценкам*:

$$\|v\|_{L^2(0,T;X)} + \|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le c\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{2.5}$$

$$\|\phi(T)\|_1 \le c\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \quad \|\psi(0)\|_1 \le c\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

2.5. Существование и единственность слабого решения интерфейсной задачи с данными измерений

В этом пункте мы обсудим существование и единственность решения параболической интерфейсной задачи (1.1)–(1.3) с данными измерений во времени.

Понятие решения задачи (1.1)–(1.3) в слабом смысле можно обобщить с использованием известного метода транспозиции, который, в свою очередь, основан на решениях прямой и обратной во времени параболических задач [13, 18]. Следующий результат дает существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.3) с использованием техники транспозиции.

Лемма 2.3. *Пусть $f \in \mathcal{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$ и $\sigma \in \mathcal{M}[0,T]$. Тогда при предположении, что $v(x,T)=0$, задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, такое что*

$$-(u,\partial_t v)_{\Omega_T} + a_T(u,v) = \langle \mu, v\rangle_{\Omega_T} + (u_0, v(x,0)) \quad \forall\, v \in \mathcal{X}(0,T), \tag{2.6}$$

где

$$\langle \mu, v\rangle_{\Omega_T} = \int_{\bar{\Omega}_T} v\,d\mu = \int_0^T \left(\int_\Omega f(x,t)v(x,t)\,dx\right) d\sigma(t) \quad \forall\, v \in \mathcal{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\big). \tag{2.7}$$

Кроме того, мы имеем следующий результат по регулярности:

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le c\left(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]} + \|u_0\|\right). \tag{2.8}$$

Используя рассуждения из [13], мы имеем доказательство леммы.

3. Анализ ошибки для пространственно дискретной аппроксимации

Для априорного анализа ошибки сначала определим пространственно дискретную аппроксимацию для задачи (1.1)–(1.3), которая, в свою очередь, зависит от слабой постановки задачи (2.6).

Пространственно дискретную аппроксимацию задачи (1.1)–(1.3) можно сформулировать следующим образом: требуется найти $u_h \in L^2(0,T;\mathbb{V}_h)$ при $v_h(x,T)=0$, так что

$$-(u_h,\partial_t v_h)_{\Omega_T} + a_T(u_h,v_h) = \langle \mu, v_h\rangle_{\Omega_T} + \big(\pi_0 u_0, v_h(x,0)\big) \quad \forall\, v_h \in H^1(0,T;\mathbb{V}_h), \tag{3.1}$$

где π_0 — соответствующий выбранный проекционный оператор из $L^2(\Omega)$ в $\mathbb{V}_h$. Здесь

$$\langle \mu, v_h\rangle_{\Omega_T} = \int_{\bar{\Omega}_T} v_h\,d\mu = \int_0^T \left(\int_\Omega f(x,t)v_h(x,t)\,dx\right) d\sigma(t) \quad \forall\, v_h \in \mathcal{C}\big([0,T];\mathbb{V}_h\big).$$

3.1. Некоторые вспомогательные результаты

Для получения априорной границы ошибки сначала мы введем некоторые проекционные операторы:

L^2-проекционный оператор — это оператор $L_h : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{V}_h$, такой что для $w \in L^2(\Omega)$ выполняется

$$(L_h w, v_h) = (w, v_h) \quad \forall\, v_h \in \mathbb{V}_h; \tag{3.2}$$

проекционный оператор Ритца — это оператор $R_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{V}_h$, такой что для $w \in H_0^1(\Omega)$ выполняется

$$a(R_h w, v_h) = a(w, v_h) \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h. \tag{3.3}$$

В следующей лемме представлены результаты аппроксимации как для L^2-проекционного оператора, так и для проекционного оператора Ритца.

Лемма 3.1. *Пусть* L_h — L^2*-проекционный оператор, а* R_h — *проекционный оператор Ритца, определяемые путем* (3.2) *и* (3.3) *соответственно. Тогда мы имеем следующие результаты аппроксимации*:

$$\|w - L_h w\|_{-1} + h\|w - L_h w\| \le ch^2\|w\|_1, \tag{3.4}$$

$$\|w - R_h w\| + h|\log h|^{\frac{1}{2}}\|w - R_h w\|_1 \le ch^2|\log h|\,\|w\|_X. \tag{3.5}$$

Доказательство. Обратимся к [13, 22], где имеются доказательства оценки (3.4). При доказательстве оценки (3.5) используется стандартный прием. Однако для ясности приведем краткое пояснение.

Хорошо известно, что проекция Ритца устойчива в H^1-норме [22], т. е.

$$\|R_h w\|_1 \le c\|w\|_1. \tag{3.6}$$

Используем неравенство треугольника и обратим внимание, что $R_h(\Pi_h w) = \Pi_h w$. Тогда мы получим

$$\|w - R_h w\|_1 \le \|w - \Pi_h w\|_1 + \|R_h w - \Pi_h w\|_1 \le \|w - \Pi_h w\|_1 + c\|w - \Pi_h w\|_1, \tag{3.7}$$

где мы использовали уравнение (3.6). Доказательство оценки (3.5) в H^1-норме следует из леммы 2.1.

Для получения оценки L^2-нормы используем обычный прием дуальности. Для любого $w \in X$ пусть $v \in H_0^1(\Omega)$ — единственное решение следующей эллиптической интерфейсной задачи:

$$\begin{aligned} a(v, z) &= (w - R_h w, z) \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega), \\ v &= 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \\ [v] = 0, &\quad \left[\beta\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right] = 0 \ \text{ на } \ \Gamma. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Решение v удовлетворяет следующему результату по регулярности [8]:

$$\|v\|_X \le c\,\|w - R_h w\|. \tag{3.9}$$

С использованием уравнений (3.8), (3.9), а также (3.3) и леммы 2.1 мы имеем

$$\begin{aligned} \|w - R_h w\|^2 &= a(v - R_h v, w - R_h w) + a(R_h v, w - R_h w) \\ &\le c\|v - R_h v\|_1\|w - R_h w\|_1 \\ &\le ch|\log h|^{\frac{1}{2}}\|v\|_X\|w - R_h w\|_1 \\ &\le ch|\log h|^{\frac{1}{2}}\|w - R_h w\|\|w - R_h w\|_1. \end{aligned}$$

Используя (3.7), мы получим искомую оценку. Это завершает доказательство. □

Теперь определим пространственно дискретную конечно-элементную аппроксимацию для обратной параболической интерфейсной задачи (2.4), которая необходима для нашего последующего анализа. Для ее определения сначала запишем слабую формулировку интерфейсной задачи (2.4) следующим образом: найти $\psi \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega))$, такую что

$$-(\partial_t\psi, v)_{\Omega_T} + a_T(\psi, v) = (g, v)_{\Omega_T} \quad \forall\, v \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.10}$$

при $\psi(\cdot, T) = 0$. Тогда пространственно дискретную конечно-элементную аппроксимацию (2.4) можно представить следующим образом: найти $\psi_h \in H^1(0, T; \mathbb{V}_h)$, такую что

$$-(\partial_t \psi_h, v_h)_{\Omega_T} + a_T(\psi_h, v_h) = (g, v_h)_{\Omega_T} \quad \forall v_h \in H^1(0, T; \mathbb{V}_h) \tag{3.11}$$

при $\psi_h(\cdot, T) = 0$.

В следующей лемме представлена априорная оценка ошибки для обратной параболической интерфейсной задачи (2.4).

Лемма 3.2. *Пусть $\psi \in \mathcal{Y}(0, T) \hookrightarrow \mathcal{C}\big([0, T]; H_0^1(\Omega)\big)$ и ψ_h — решения задач* (2.4) *и* (3.11) *соответственно. Если $\psi_h(0) = L_h \psi(0)$, мы имеем*

$$\begin{aligned} &\|\psi(t) - \psi_h(t)\|^2 + \gamma \int_0^t \|\psi(s) - \psi_h(s)\|_1^2 \, ds \\ &\qquad \leq ch^2 |\log h| \left(\|\partial_t \psi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\psi\|^2_{L^2(0,T;X)} \right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Поскольку нам необходимо получить границу ошибки при предположении низкой регулярности, сформулированном в приведенной выше лемме, мы используем L^2-проекционный оператор, а не проекционный оператор Ритца, что противоречит обычному априорному анализу ошибки для параболических задач (см. [25] для более подробной информации). Мы будем следовать подходу, изложенному в [9], для получения границы ошибки (3.12).

Доказательство. Вычитая (3.11) из (3.10), получим

$$-\big(\partial_t \psi(t) - \partial_t \psi_h(t), v_h\big) + a\big(\psi(t) - \psi_h(t), v_h\big) = 0 \quad \forall\, v_h \in \mathbb{V}_h, \tag{3.13}$$
$$\text{для почти всех } t \in (0, T].$$

Положим $v_h(t) = L_h \psi(t)$ в (3.13). Тогда мы имеем для почти всех $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} &\|\psi(t) - \psi_h(t)\|^2 + a\big(\psi(t) - \psi_h(t), \psi(t) - \psi_h(t)\big) \\ &= \big(\partial_t \psi(t) - \partial_t \psi_h(t), \psi(t) - v_h(t)\big) + a\big(\psi(t) - \psi_h(t), \psi(t) - v_h(t)\big) \\ &= \big(\partial_t \psi(t) - \partial_t L_h \psi(t), \psi(t) - L_h \psi(t)\big) + \\ &\quad \big(\partial_t L_h \psi(t) - \partial_t \psi_h(t), \psi(t) - L_h \psi(t)\big) + a\big(\psi(t) - \psi_h(t), \psi(t) - L_h \psi(t)\big) \\ &= \big(\partial_t \psi(t) - \partial_t L_h \psi(t), \psi(t) - L_h \psi(t)\big) + a\big(\psi(t) - \psi_h(t), \psi(t) - L_h \psi(t)\big) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi(t) - L_h \psi(t)\|^2 + a\big(\psi(t) - \psi_h(t), \psi(t) - L_h \psi(t)\big), \end{aligned} \tag{3.14}$$

где мы использовали определение (3.2) и тот факт, что $\partial_t(L_h \psi(t) - \psi_h(t)) \in \mathbb{V}_h$.

Проинтегрируем (3.14) от 0 до t, и с помощью неравенства Коши–Шварца путем простого расчета получим

$$\begin{aligned} &\|\psi(t) - \psi_h(t)\|^2 + \gamma \int_0^t \|\psi(s) - \psi_h(s)\|_1^2 \, ds \\ &\qquad \leq c \bigg(\|\psi(t) - L_h \psi(t)\|^2 + \|\psi(0) - \psi_h(0)\|^2 - \|\psi(0) - L_h \psi(0)\|^2 + \\ &\qquad\qquad \int_0^t \|\psi(s) - L_h \psi(s)\|_1^2 \, ds \bigg). \end{aligned}$$

Если $\psi_h(0) = L_h\psi(0)$, то, используя тот факта, что $\|w - L_h w\|_1 \leq c\|w - R_h w\|_1$ $\forall\, w \in H_0^1(\Omega)$ [9], получим

$$\begin{aligned}\|\psi(t) - \psi_h(t)\|^2 + \gamma \int_0^t \|\psi(s) - \psi_h(s)\|_1^2\, ds \\ &\leq c\Big(\|\psi(t) - L_h\psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(s) - R_h\psi(s)\|_1^2\, ds\Big) \\ &\leq c\Big(\max_{t\in[0,T]} \|\psi(t) - L_h\psi(t)\|^2 + \int_0^t \|\psi(s) - R_h\psi(s)\|_1^2\, ds\Big). \qquad (3.15)\end{aligned}$$

Снова, с использованием результата вложения $\mathcal{X}(0,T) \hookrightarrow \mathcal{C}\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$ [9, 12], имеем

$$\max_{t\in[0,T]} \|w(t)\| \leq c\left(\|w\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t w\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right). \qquad (3.16)$$

Использовав лемму 3.1, а также (3.15) и (3.16), получим

$$\|\psi(t)-\psi_h(t)\|^2+\gamma\int_0^t\|\psi(s)-\psi_h(s)\|_1^2\, ds \leq ch^2|\log h|\left(\|\partial_t\psi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\psi\|^2_{L^2(0,T;X)}\right). \ \square$$

Итак, мы получили следующий результат.

Лемма 3.3. *Пусть* $\psi \in \mathcal{Y}(0,T) \hookrightarrow \mathcal{C}\big([0,T]; H_0^1(\Omega)\big)$ *и* ψ_h *— решения задач* (2.4) *и* (3.11) *соответственно. Если* $\psi_h(0) = L_h\psi(0)$, *то*

$$\|\psi - \psi_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq ch|\log h|^{\frac{1}{2}}\left(\|\partial_t\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\psi\|_{L^2(0,T;X)}\right). \qquad (3.17)$$

Теперь мы готовы представить основную теорему этой статьи, которая дает априорную границу ошибки в $L^2(L^2)$-норме для параболической интерфейсной задачи вида (1.1)–(1.3).

Теорема 3.1. *Пусть* u *и* u_h *— решения задач* (2.6) *и* (3.1) *соответственно. Тогда для* $f \in \mathcal{C}\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $\sigma \in \mathcal{M}[0,T]$ *и* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *мы имеем следующую оценку*:

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq ch|\log h|\left\{\|u_0\| + \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]}\right\}. \qquad (3.18)$$

Мы следуем подходу [13] для доказательства априорной границы ошибки (3.18). Основная идея доказательства состоит в использовании двойственности.

Доказательство. Вычитая (2.6) из (3.1) и используя (3.2), получим отношение ортогональности следующего вида:

$$\big((u - u_h), -\partial_t v_h\big)_{\Omega_T} + a_T(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall\, v_h \in H_1(0,T,\mathbb{V}_h). \qquad (3.19)$$

Чтобы получить границу ошибки вида (3.18), вычислим ошибку $u - u_h$ в $L^2(L^2)$-норме с использованием двойственной нормы:

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \sup\left\{\frac{(g, u - u_h)_{\Omega_T}}{\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} \ : \ g(\neq 0) \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)\right\}. \qquad (3.20)$$

Поэтому, для $g \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ использование уравнения (2.6), а также (3.1) и (3.19) приводит к

$$\begin{aligned}
(g, u-u_h)_{\Omega_T} &= (-\partial_t \psi + \mathcal{L}^* \psi, u-u_h)_{\Omega_T} \\
&= (u, -\partial_t \psi)_{\Omega_T} + a_T(u,\psi) + (u_h, \partial_t \psi)_{\Omega_T} - a_T(u_h, \psi) \\
&= (u, -\partial_t \psi)_{\Omega_T} + a_T(u,\psi) + (u_h, \partial_t \psi_h)_{\Omega_T} - a_T(u_h, \psi_h) \\
&= \langle \mu, \psi \rangle_{\Omega_T} + (u_0, \psi(x,0)) - \langle \mu, \psi_h \rangle_{\Omega_T} - (L_h u_0, \psi_h(x,0)) \\
&= \langle \mu, \psi - \psi_h \rangle_{\Omega_T} + (u_0, \psi(0) - \psi_h(0)) \\
&= \int_0^T \left(\int_\Omega f(x,t)(\psi - \psi_h) dx \right) d\sigma(t) + (u_0, \psi(0) - \psi_h(0)) \\
&\le c \left\{ \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]} + \|u_0\| \right\} \|\psi - \psi_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Применение лемм 3.3 и 2.2 дает

$$(g, u-u_h)_{\Omega_T} \le ch|\log h|^{\frac{1}{2}} \left(\|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]} + \|u_0\| \right) \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Остальная часть доказательства следует из (3.20). □

Замечание (Сравнение с параболическими задачами). Отметим, что априорная граница ошибки (4.4) является оптимальной с точностью до множителя $|\log h|$. Для параболических задач [13] эта граница имеет порядок $O(h)$, который является оптимальным в $L^2(0,T;H^1(\Omega))$-норме. В [13] автор использовал регулярность H^2-обратной параболической задачи для получения границ ошибки. Однако в данном случае соответствующие обратные интерфейсные задачи имеют только общую $H^1(\Omega)$-регулярность (см. лемму 2.2). Поэтому появление множителя $|\log h|$ в (4.4) вполне естественно, так как разрыв коэффициента уменьшает регулярность решения.

4. Полностью дискретный анализ ошибки

В этом пункте обсудим априорный анализ ошибки для полностью дискретной неявной эйлеровой аппроксимации задачи (1.1)–(1.3). Точнее, мы будем использовать неявную эйлерову аппроксимацию по времени и кусочно-линейные конечные элементы по пространству. В анализе мы будем использовать тот же символ, что и в пространственно дискретной аппроксимации, с заменой индекса “h” на “n”.

Сначала разделим интервал $[0,T]$ на N равных подынтервалов вида

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

при $I_n = (t_{n-1}, t_n]$ и $k = t_n - t_{n-1}$, которые являются равными временными шагами. Пусть $\mathcal{T}_n$ $(0 \le n \le N)$ — триангуляции $\bar{\Omega}$ на временном уровне t_n с такими же предположениями A1 и A2 (как описано в пространственно дискретном случае).

Пусть $\mathbb{V}_n$ $(0 \le n \le N)$ — семейство кусочно-линейных конечно-элементных пространств, которое соответствует триангуляции $\mathcal{T}_n$ и определяется так же, как в п. 2.2. Но для простоты мы будем использовать одно и то же конечно-элементное пространство на каждом временном шаге и один и тот же символ $\mathbb{V}_h$, как в пространственно дискретном случае. При анализе ошибки мы используем $k = O(h^2)$.

Введем разностное отношение “назад” следующего вида: для $1 \le n \le N$

$$\partial\varphi^n := \frac{\varphi^n - \varphi^{n-1}}{k}.$$

Для непрерывной функции $\omega : [0,T] \to L^2(\Omega)$ определим $\omega^n := \omega(\cdot, t_n)$ для $1 \le n \le N$. Кроме того, положим $\bar{\phi}^n := k^{-1} \int_{I_n} \phi(\cdot, \tau) d\tau$.

Используя приведенные выше обозначения, определим полностью дискретную неявную конечно-элементную эйлерову аппроксимацию задачи (3.1) следующим образом: при $U_h^0 = \pi_0 u_0$ необходимо найти $U_h^n \in \mathbb{V}_h (1 \le n \le N)$, так что

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{k}, \chi_h\right) + a(U_h^n, \chi_h) = \langle \mu, \chi_h \rangle_{I_n} \quad \forall\, \chi_h \in \mathbb{V}_h, \tag{4.1}$$

где

$$\langle \mu, w_h \rangle_{I_n} = \frac{1}{k} \int_{\Omega \times I_n} w_h \, d\mu = \frac{1}{k} \int_{I_n} \left(\int_\Omega f(x,t) w_h(x) \, dx \right) d\sigma(t) \quad \forall\, w_h \in \mathbb{V}_h. \tag{4.2}$$

Теперь определим кусочно-постоянную во времени функцию U_h по формуле

$$U_h(x,t) = U_h^n(x) \quad \forall\, t \in (t_{n-1}, t_n),\ n = 1, 2, \ldots, N.$$

Сформулируем результат устойчивости для полностью дискретного решения U_h^n, удовлетворяющего (4.1). Доказательство результата можно найти в [13].

Лемма 4.1. *Пусть U_h^n $(1 \le n \le N)$ — решения полностью дискретной аппроксимации* (4.1), *и пусть $k = O(h^2)$. Тогда существует постоянная C, не зависящая от h и k, такая что*

$$\sum_{n=1}^{N} \|U_h^n - U_h^{n-1}\|^2 + k\|U_h^N\|_1^2 \le C \left(\|u_0\|^2 + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\sigma\|^2_{\mathcal{M}[0,T]} \right). \tag{4.3}$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат этого пункта для полностью дискретной неявной эйлеровой аппроксимации — априорные оценки ошибки в $L^2(L^2)$-норме для параболической интерфейсной задачи (1.1). Как и в случае пространственной дискретности, мы используем прием дуальности вместе с оценками интерполяции и результатом устойчивости для получения границы ошибки.

Теорема 4.1. *Пусть u — точное решение задачи* (1.1)–(1.3), *а U_h — ее приближенные решения, полученные при помощи неявной эйлеровой аппроксимации* (4.1). *Предположим, что $f \in \mathcal{C}\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$, $\sigma \in \mathcal{M}[0,T]$ и $u_0 \in L^2(\Omega)$. Тогда мы имеем следующую априорную границу ошибки*:

$$\|u - U_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le c\Big(h|\log h\,| + k^{\frac{1}{2}}\Big)\big\{\|u_0\| + \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]}\big\}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Отметим, что

$$\|u - U_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \sup\left\{ \frac{(g, u - U_h)_{\Omega_T}}{\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}} \ :\ g \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)\big),\ g \ne 0 \right\}. \tag{4.5}$$

Для доказательства результата обратимся к двойственности. Для $g \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, используя уравнение (2.4) вместе с (2.6), после перестановки членов получим

$$
\begin{aligned}
(g, u-U_h)_{\Omega_T} &= (-\partial_t\psi + \mathcal{L}^*\psi, u-U_h)_{\Omega_T} \\
&= -(\partial_t\psi, u)_{\Omega_T} + a_T(\psi, u) + (\partial_t\psi, U_h)_{\Omega_T} - a_T(\psi, U_h) \\
&= \langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T} + (u_0, \psi(x,0)) + \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big[(U_h^n, \partial_t\psi) - a(U_h^n,\psi)\big]dt \\
&= \langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T} + (u_0, \psi(x,0)) + \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left[\left(U_h^n, \frac{\psi^n-\psi^{n-1}}{k}\right) - a(U_h^n,\psi)\right]dt \\
&= \langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T} + (u_0 - U_h^0, \psi(x,0)) - \\
&\quad \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left[k^{-1}(U_h^n - U_h^{n-1}, \psi^{n-1}) + a(U_h^n,\psi)\right]dt. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Поскольку мы имеем полностью дискретную аппроксимацию (4.1), отсюда следует, что

$$
\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left[k^{-1}\big(U_h^n - U_h^{n-1}, R_h\bar\psi^n\big) + a\big(U_h^n, R_h\bar\psi^n\big) - \big\langle\mu, R_h\bar\psi^n\big\rangle_{I_n}\right]dt = 0.
$$

Поэтому уравнение (4.6) приводит к

$$
\begin{aligned}
(g, u-U_h)_{\Omega_T} &= \big(u_0 - U_h^0, \psi(x,0)\big) + \langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T} - \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big\langle\mu, R_h\bar\psi^n\big\rangle_{I_n}dt - \\
&\quad \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left[k^{-1}\big(U_h^n - U_h^{n-1}, \psi^{n-1} - R_h\bar\psi^n\big) + a\big(U_h^n, \psi - R_h\bar\psi^n\big)\right]dt \\
&= \big(u_0 - U_h^0, \psi(x,0)\big) + \langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T} - \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big\langle\mu, R_h\bar\psi^n\big\rangle_{I_n}dt - \\
&\quad \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left[k^{-1}\big(U_h^n - U_h^{n-1}, \psi^{n-1} - R_h\bar\psi^n\big) + a\big(U_h^n, \bar\psi^n - R_h\bar\psi^n\big)\right]dt,
\end{aligned}
$$

где на последнем шаге мы использовали тот факт, что $\displaystyle\int_{I_n}\big(\psi - \bar\psi^n\big)\,dt = 0$. Отметим, что использование определения проекции Ритца означает, что

$$
a\big(\bar\psi^n - R_h\bar\psi^n, U_h^n\big) = 0.
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
(g, u-U_h)_{\Omega_T} &\le \big|\big(u_0 - U_h^0, \psi(x,0)\big)\big| + \left|\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}k^{-1}\big(U_h^n - U_h^{n-1}, \psi^{n-1} - R_h\bar\psi^n\big)\,dt\right| + \\
&\quad \left|\langle\mu,\psi\rangle_{\Omega_T} - \sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\big\langle\mu, R_h\bar\psi^n\big\rangle_{I_n}dt\right| =: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Теперь ограничим каждый член в правой части (4.7) отдельно. Используя результат стандартной аппроксимации и лемму 2.2, получим

$$\mathrm{I} := \left|(u_0 - U_h^0, \psi(x,0))\right| \le \|u_0 - U_h^0\|_{-1} \|\psi(x,0)\|_1 \le ch\|u_0\|\, \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{4.8}$$

С помощью неравенства Коши–Шварца получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &:= \left| \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} k^{-1}\bigl(U_h^n - U_h^{n-1}, \psi^{n-1} - R_h\bar{\psi}^n\bigr)\, dt \right| \\ &\le k^{-1} \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\|U_h^n - U_h^{n-1}\right\| \left\|\psi^{n-1} - R_h\bar{\psi}^n\right\| dt \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{N} \|U_h^n - U_h^{n-1}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \left\|\psi^{n-1} - R_h\bar{\psi}^n\right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = E_1E_2, \end{aligned}$$

где

$$E_1 := \left(\sum_{n=1}^{N} \left\|U_h^n - U_h^{n-1}\right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad E_2 := \left(\sum_{n=1}^{N} \left\|\psi^{n-1} - R_h\bar{\psi}^n\right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Применение леммы 4.1 дает

$$E_1 \le c\left(\|u_0\| + \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]}\right).$$

С использованием результатов аппроксимации для проекционного оператора Ритца получаем

$$\begin{aligned} \left\|\psi^{n-1} - R_h\bar{\psi}^n\right\| &\le \left\|\psi^{n-1} - \bar{\psi}^n\right\| + \left\|\bar{\psi}^n - R_h\bar{\psi}^n\right\| \\ &\le \left\|\psi^{n-1} - \bar{\psi}^n\right\| + ch^2|\log h| \left\|\bar{\psi}^n\right\|_X. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Легко заметить, что

$$\left\|\bar{\psi}^n\right\|_X \le k^{-\frac{1}{2}}\|\psi\|_{L^2(t_{n-1},t_n;X)}. \tag{4.11}$$

Простые вычисления показывают, что

$$\left\|\psi^{n-1} - \bar{\psi}^n\right\| = \frac{1}{k}\left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (s - t_n)\partial_t\psi(s)\, ds \right\| \le k^{\frac{1}{2}}\, \|\partial_t\psi\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))}.$$

Объединение (4.10), (4.11) и леммы 2.2 приводит к следующему:

$$\begin{aligned} E_2 &\le c\left[\sum_{n=1}^{N} \left(h^4|\log h\,|^2 k^{-1}\|\psi\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;X)} + k\|\psi_t\|^2_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\Omega))} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le c\left(h|\log h\,| + k^{\frac{1}{2}}\right) \left(\|\psi\|^2_{L^2(0,T;X)} + \|\psi_t\|^2_{L^2(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le c\left(h|\log h\,| + k^{\frac{1}{2}}\right) \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\mathrm{II} \le c\Bigl(h|\log h\,| + k^{\frac{1}{2}}\Bigr)\Bigl[\|u_0\| + \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\, \|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]}\Bigr]\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{4.12}$$

С использованием (2.7) и (4.2) получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{III} &:= \left| \langle \mu, \psi \rangle_{\Omega_T} - \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\langle \mu, R_h \bar{\psi}^n \right\rangle_{I_n} dt \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\int_{\Omega} f(x,t) \big(\psi - R_h \bar{\psi}^n \, dx \big) \, d\sigma(t) \right) \right| \\
&\leq c \, \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \left\| \psi - R_h \bar{\psi}^n \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\sigma\|_{\mathcal{M}[0,T]}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Используя стандартный результат аппроксимации для проекционного оператора Ритца, получаем

$$\begin{aligned}
\left\| \psi - R_h \bar{\psi}^n \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \left\| \psi - \bar{\psi}^n \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \left\| \bar{\psi}^n - R_h \bar{\psi}^n \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq c \left(k^{\frac{1}{2}} \, \|\psi_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + h^2 |\log h \,| \left\| \bar{\psi}^n \right\|_{L^\infty(0,T;X)} \right),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где на последнем шаге стандартные результаты аппроксимации используются по временной переменной.

Из леммы 2.1 и (4.11) имеем

$$\left\| \psi - R_h \bar{\psi}^n \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \Big(h |\log h| + k^{\frac{1}{2}} \Big) \, \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{4.15}$$

В целом, (4.5), (4.7), (4.12)–(4.15) завершают остальную часть доказательства. □

5. Численные эксперименты

В этом пункте мы представим численные результаты для двумерной тестовой задачи, подтверждающие теоретические выводы. Все расчеты выполняются с помощью программы FreeFEM++ [15]. Для проверки порядка сходимости численные тесты выполняются с разделением ошибок дискретизации. Точнее, для фиксированных временных шагов сначала рассмотрим поведение пространственной ошибки для последовательности дискретизаций с различными размерами ячеек. Затем исследуем поведение временной ошибки для различных временных шагов при фиксированной пространственной триангуляции.

Для вычисления экспериментального порядка сходимости (EOC), используем следующую формулу:

$$\mathrm{EOC} \ = \frac{\log E(h_1) - \log E(h_2)}{\log h_1 - \log h_2},$$

где $E(h)$ — ошибка в $L^2(L^2)$-норме с размером сетки h или временным шагом k.

Также отметим, что для каждого прогона размер пространственной сетки становится вдвое меньше предыдущего размера сетки. Исследуем поведение ошибки с использованием полностью дискретной неявной эйлеровой аппроксимации в $L^2(L^2)$-норме, представленной в теореме 4.1.

Пример. Пусть $\Omega_T = \Omega \times [0,1]$, где $\Omega := (0,2) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ с границей при $x = 1$, т. е. $\Omega_1 = (0,1) \times (0,1)$ и $\Omega_2 = (1,2) \times (0,1)$. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) в Ω с источником Дирака в правой части во времени и

$$\beta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in \Omega_1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } (x,y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Возьмем μ такое, что точное решение задается выражением

$$u(x,y,t) = \begin{cases} T(t)\sin(\pi x)\sin(\pi y) & \text{в} \quad \Omega_1 \times [0,1], \\ -T(t)\sin(2\pi x)\sin(\pi y) & \text{в} \quad \Omega_2 \times [0,1] \end{cases}$$

при

$$T(t) = \begin{cases} t^2 & \text{если} \quad t < 0.5, \\ t^2 + 2t & \text{если} \quad t \geq 0.5. \end{cases}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\mu(x,t) = \begin{cases} \sin(\pi x)\sin(\pi y)\left[\delta_t\left(\dfrac{1}{2}\right) + \gamma(t) + 2\pi^2 T(t)\right] & \text{в } \Omega_1, \\ -\sin(2\pi x)\sin(\pi y)\left[\delta_t\left(\dfrac{1}{2}\right) + \gamma(t) + 5\pi^2 T(t)\right] & \text{в } \Omega_2, \end{cases}$$

где $\delta_t(z)$ — мера Дирака по переменной t, сосредоточенная в точке $t = z$, и

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2t, & \text{если } t < 0.5, \\ 2t + 2, & \text{если } t \geq 0.5. \end{cases}$$

Для проверки теоретических скоростей сходимости сначала исследуем EOC в зависимости от пространственной дискретизации, фиксируя временную дискретизацию при $N = 2048$. Затем вычислим EOC в зависимости от временной дискретизации при фиксированной пространственной дискретизации с 6488 степенями свободы. Таблица показывает, что EOC как по пространственной, так и по временной дискретизации согласуется с теоретическими результатами.

Таблица. Ошибки в $L^2(\Omega_T)$-норме при EOC

Dof	$\|u - U_h\|_{L^2(L^2)}$	EOC	N	$\|u - U_h\|_{L^2(L^2)}$	EOC
31	0.6452876	–	3	0.1654967	–
107	0.3627416	0.831	9	0.0601673	0.921
377	0.1958762	0.889	27	0.0221158	0.911
1396	0.1025937	0.933	81	0.0083006	0.892
5434	0.0538098	0.931	243	0.0031986	0.868
21518	0.0281448	0.935	729	0.0012258	0.873

6. Заключительные замечания

В данной статье рассматривался априорный анализ ошибок для линейных параболических интерфейсных задач с данными измерений во времени в ограниченной выпуклой области в $\mathbb{R}^2$. При анализе ошибок рассматривались как пространственно дискретные, так и полностью дискретные аппроксимации. Почти оптимальные по порядку априорные границы ошибки были получены в $L^2(L^2(\Omega))$-норме с точностью до множителя $|\log h|$ для обеих аппроксимаций. Мы также провели численные эксперименты для подтверждения теоретических результатов. Предложенную схему анализа ошибки легко использовать для решения более общих интерфейсных задач самосопряженного параболического типа, включая задачи с переменными коэффициентами в каждой из подобластей. Однако интересно было бы использовать эти результаты для параболических интерфейсных задач с данными измерений в трехмерном пространстве. Заметим, что такое обобщение не может быть простым, поскольку лемма 2.1 из [8] требует некоторого результата по вложению Соболева, который действителен только в двух измерениях. Кроме того, важно распространить эти результаты на параболические интерфейсные задачи с данными измерений в пространстве. Этот вопрос требует дальнейшего изучения ввиду низкой глобальной регулярности решения интерфейсных задач.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам за ценные замечания и предложения, которые помогли улучшить качество статьи. Автор признателен профессору Раджену Кумару Синху за ценные советы и предложения во время подготовки рукописи.

Литература

1. **Adams R.A., Fournier J.J.F.** Sobolev Spaces. 2nd ed. — Amsterdam: Elsevier, 2003. — (Pure Appl. Math.; 140).
2. **Araya R., Behrens E., Rodríguez R.** A posteriori error estimates for elliptic problems with Dirac delta source terms // Numer. Math. — 2006. — Vol. 105. — P. 193–216.
3. **Babuška I.** Error-bounds for finite element method // Numer. Math. — 1971. — Vol. 16. — P. 322–333.
4. **Bernardi C., Verfürth R.** Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients // Numer. Math. — 2000. — Vol. 85. — P. 579–608.
5. **Boccardo L., Gallouët T.** Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. — 1989. — Vol. 87. — P. 149–169.
6. **Casas E.** L2 estimates for the finite element method for the Dirichlet problem with singular data // Numer. Math. — 1985. — Vol. 47. — P. 627–632.
7. **Casas E.** Pontryagin's principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. — 1997. — Vol. 35, № 4. — P. 1297–1327.
8. **Chen Z., Zou J.** Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems // Numer. Math. — 1998. — Vol. 79. — P. 175–202.
9. **Chrysafinos K., Hou L.S.** Error estimates for semidiscrete finite element approximations of linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 40. — P. 282–306.
10. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems. Classics in Applied Mathematics. — Philadelphia: SIAM, 2002. — (Classics in Applied Mathematics; 40).
11. **Droniou J., Raymond J.-P.** Optimal pointwise control of semilinear parabolic equations // Nonlinear Anal. — 2000. — Vol. 39, iss. 2. — P. 135–156. — DOI:10.1016/S0362-546X(98)00170-9.
12. **Evans L.C.** Partial Differential Equations. 2nd ed. — Providence, RI: AMS, 2010. — (Graduate Studies in Mathematics; 19).
13. **Gong W.** Error estimates for finite element approximations of parabolic equations with measure data // Math. Comp. — 2013. — Vol. 82. — P. 69–98.
14. **Gupta J.S., Sinha R.K., Reddy G.M.M., Jain J.** A posteriori error analysis of two-step backward differentiation formula finite element approximation for parabolic interface problems // J. Sci. Comput. — 2016. — Vol. 69. — P. 406–429.
15. **Hecht F.** New development in freefem++ // J. Numer. Math. — 2012. — Vol. 20. — P. 251–265.

16. **Huang J., Zou J.** Some new a priori estimates for second-order elliptic and parabolic interface problems // J. Differential Equations. — 2002. — Vol. 184. — P. 570–586.

17. **Ladyženskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N.** Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. — Providence, RI: AMS, 1968. — (Translations of Mathematical; 23).

18. **Lions J.L., Magenes E.** Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. I. — Springer-Verlag, 1972. — (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 181).

19. **Martínez A., Rodríguez C., Vázquez-Méndez M.E.** Theoretical and numerical analysis of an optimal control problem related to wastewater treatment // SIAM J. Control Optim. — 2000. — Vol. 38. — P. 1534–1553.

20. **Meidner D., Rannacher R., Vexler B.** A priori error estimates for finite element discretizations of parabolic optimization problems with pointwise state constraints in time // SIAM J. Control Optim. — 2011. — Vol. 49. — P. 1961–1997.

21. **Ramos A. M., Glowinski R., Periaux J.** Pointwise control of the Burgers equation and related Nash equilibrium problems: computational approach // J. Optim. Theory Appl. — 2002. — Vol. 112. — P. 499–516.

22. **Rannacher R., Scott R.** Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations // Math. Comp. — 1982. — Vol. 38. — P. 437–445.

23. **Scott R.** Finite element convergence for singular data // Numer. Math. — 1973. — Vol. 21. — P. 317–327.

24. **Sinha R.K., Deka B.** Optimal error estimates for linear parabolic problems with discontinuous coefficients // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — Vol. 43. — P. 733–749.

25. **Thomée V.** Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. 2nd ed. — Berlin: Springer, 2006. — (Springer Series in Computational Mathematics; 25).

Поступила в редакцию 13 октября 2022 г.
После исправления 23 декабря 2022 г.
Принята к печати 10 апреля 2023 г.