

УДК 519.2; 539.3

ПОСТРОЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ф. Бучуча, М. Н. Иччу*, М. Хаддар

Национальная инженерная школа, W3038 Сфакс, Тунис

* Центральная школа г. Лиона, 69130 Лион, Франция

E-mails: fakersbouchoucha@yahoo.fr, Mohamed.lchchou@ec-lyon.fr,
mohamed.haddar@enis.rnu.tn

С использованием метода возмущений второго порядка для неопределенных сред разработан стохастический метод конечных волновых элементов, являющийся обобщением метода конечных волновых элементов для стохастических сред. С использованием метода конечных элементов рассмотрен параметрический подход к изучению неопределенностей. Исследована модель стохастического пространства состояний. Изучены возмущения второго порядка. С использованием неопределенности второго порядка, содержащейся в параметрах конструкции, определена погрешность метода конечных волновых элементов. Исследованы статистические характеристики волновых чисел и волновых мод. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода конечных волновых элементов и метода Монте-Карло.

Ключевые слова: стохастический метод конечных волновых элементов, дисперсия, неопределенность, возмущения второго порядка.

DOI: 10.15372/PMTF20170222

Введение. Для проведения контроля и диагностики рисков разрушения конструкций предлагаются различные методы мониторинга их целостности [1, 2]. В последнее время интенсивно изучаются свойства направленных волн, в том числе характеристики дисперсионной кривой, определяющей связь скорости и частоты для всех мод, которые могут распространяться в заданной конструкции. Метод конечных волновых элементов (МКВЭ) позволяет вычислять дисперсионные кривые волноводов, а также исследовать их характеристики [3]. При использовании МКВЭ конструкция волновода рассматривается в качестве периодической системы, составленной из одинаковых подструктур [4, 5].

Большинство имеющихся методов моделирования распространения направленных волн применимы для детерминированной среды. В настоящей работе рассматриваются численные методы изучения направленных волн в случайной пространственно-однородной среде. Исследованию конструкций с неопределенностями посвящены многие работы (см., например, [6, 7]). Такие неопределенности содержатся в геометрических характеристиках, характеристиках материала и граничных условиях. Задачи с неопределенностями

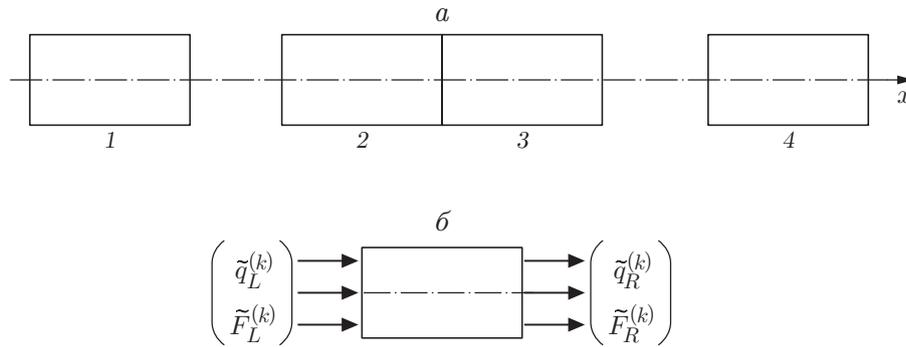


Рис. 1. Схема периодического волновода (а) и степени свободы подсистемы k на левой и правой границах (б):

1 — подсистема 1, 2 — подсистема k , 3 — подсистема $k + 1$, 4 — подсистема N

решаются с использованием параметрического [8] и непараметрического [9, 10] подходов. В работе [11] исследовалось распространение направленных волн в случайной упругой среде и сформулирован стохастический метод конечных волновых элементов (СМКВЭ), допускающий стохастическое определение волновых характеристик. Пространственно однородные свойства изучаются с помощью параметрических вероятностных методов. В [12] предложен численный подход к изучению распространения упругих направленных волн в неопределенной упругой среде. Для вероятностного анализа конструкций сформулирован СМКВЭ, учитывающий зависимость свойств материала и геометрических свойств от пространственных координат. В [13] с помощью СМКВЭ исследована матрица диффузии и получены диффузионные соотношения, позволяющие оценить коэффициенты фильтрации и отражения в конструкциях с неопределенностями.

В настоящей работе с использованием возмущений второго порядка МКВЭ обобщен на случай стохастической среды. С помощью параметрического подхода и МКВЭ изучены неопределенности, с использованием модели пространства состояний сформулирован СМКВЭ. С использованием неопределенности второго порядка, содержащейся в параметрах конструкции, определена погрешность СМКВЭ. Исследованы статистические характеристики волновых чисел и волновых мод. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью СМКВЭ, и результатов аналитического решения.

1. Формулировка СМКВЭ с использованием пространства состояний. Введение неопределенностей и особых преобразований позволяет получить модель пространства состояний для изучения стохастических закономерностей. Предполагается, что рассматриваемая среда является неопределенной, система состоит из множества одинаковых подсистем, связанных между собой по главному направлению, для определенности по оси x . Длина каждой подсистемы в направлении оси x равна d . Модель строится на основе метода конечных элементов стандартной подсистемы (рис. 1). Предполагается, что на левой (индекс L) и правой (индекс R) совместных границах подсистемы содержится одинаковое число степеней свободы n . Тогда стохастическое уравнение движения для каждой подсистемы имеет вид

$$\tilde{D}\tilde{q} = \tilde{F},$$

где

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{LL} & \tilde{D}_{LR} \\ \tilde{D}_{RL} & \tilde{D}_{RR} \end{pmatrix} = \tilde{K} - \omega^2 \tilde{M},$$

ω , \tilde{D}_{LL} , \tilde{D}_{LR} , \tilde{D}_{RL} , \tilde{D}_{RR} — элементы динамической матрицы размерности $n \times n$; \tilde{K} — матрица жесткости размерности $2n \times 2n$; \tilde{M} — матрица масс размерности $2n \times 2n$; ω — волновое число; $\tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix}$, $\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_L \\ \tilde{F}_R \end{pmatrix}$ — векторы перемещений и усилий размерности $2n \times 1$; \tilde{q}_L , \tilde{q}_R , \tilde{F}_L , \tilde{F}_R — векторы перемещений и усилий размерности $n \times 1$ на левых и правых границах соответственно. Кинематические стохастические переменные \tilde{q} , \tilde{F} можно представить с помощью следующих стохастических векторов состояний:

$$\tilde{u}_L^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_L^{(k)} \\ -\tilde{F}_L^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_R^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_R^{(k)} \\ \tilde{F}_R^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, можно показать, что векторы состояний $\tilde{u}_L^{(k)}$ и $\tilde{u}_R^{(k)}$ связаны со стохастической матрицей перехода \tilde{S} :

$$\tilde{u}_R = \tilde{S}\tilde{u}_L.$$

Поскольку неопределенности в основном содержатся в характеристиках материала и полагаются пространственно однородными, принятая периодичность будет соблюдаться в стохастическом случае так же, как и в детерминированном. Случайные величины моделируются гауссовыми переменными с помощью возмущений второго порядка: $\tilde{v} = \bar{v} + \nu_1\varepsilon + \nu_2\varepsilon^2$, где \tilde{v} — случайная величина; \bar{v} — средняя; ν_1 — возмущение первого порядка; ν_2 — возмущение второго порядка; ε — стандартное нормальное распределение. Полиномиальный хаос $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$ используется в качестве дополнительной характеристики задачи. Случайные величины \tilde{u}_L , \tilde{u}_R , \tilde{S} , моделируемые гауссовыми переменными с помощью возмущений второго порядка, принимают вид

$$\tilde{u}_L = \begin{pmatrix} q_{0L} + q_{1L}\varepsilon + q_{2L}\varepsilon^2 \\ -F_{0L} - F_{1L}\varepsilon - F_{2L}\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_R = \begin{pmatrix} q_{0R} + q_{1R}\varepsilon + q_{2R}\varepsilon^2 \\ F_{0R} + F_{1R}\varepsilon + F_{2R}\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = S_0 + S_1\varepsilon + S_2\varepsilon^2,$$

где S_0 — матрица детерминированного перехода; S_1 , S_2 — матрицы перехода первого и второго порядков соответственно. Используя определения S_0 , S_1 [11] и проведя некоторые преобразования, получаем

$$S_0 = \begin{pmatrix} -D_{0LR}^{-1}D_{0LL} & D_{0LR}^{-1} \\ D_{0RR}D_{0LR}^{-1}D_{0RR} - D_{0RL} & D_{0RR}D_{0LR}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{1LL} & S_{1LR} \\ S_{1RL} & S_{1RR} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} S_{2LL} & S_{2LR} \\ S_{2RL} & S_{2RR} \end{pmatrix},$$

где

$$S_{1LL} = D_{0LR}^{-1}D_{1LL} - D_{0LR}^{-1}D_{1LR}D_{0LR}^{-1}D_{0LL}, \quad S_{1LR} = -D_{0LR}^{-1}D_{1LR}D_{0LR}^{-1},$$

$$S_{1RL} = D_{0RR}D_{0LR}^{-1}D_{1LL} - D_{0RR}D_{0LR}^{-1}D_{1LR}D_{0LR}^{-1}D_{0LL} - D_{1RL} + D_{1RR}D_{0LR}^{-1}D_{0LL},$$

$$S_{1RR} = -D_{0RR}D_{0LR}^{-1}D_{1LR}D_{0LR}^{-1} + D_{0LR}^{-1},$$

$$S_{2LL} = -D_{0LR}^{-1}D_{2LL} - D_{0LR}^{-1}D_{1LR}D_{1LL} - D_{0LR}^{-1}D_{2LR}S_{0LL},$$

$$S_{2LR} = -D_{0LR}^{-1}D_{1LR}S_{1LR} - D_{0LR}^{-1}D_{2LR}S_{0LL},$$

$$S_{2RL} = D_{0RR}D_{0LR}^{-1}(D_{2LL} + D_{1LR}S_{1LL} + D_{2LR}S_{0LL}) + D_{2RL} + D_{1RR}S_{1LL} + D_{2RR}S_{0LL},$$

$$S_{2RR} = -D_{0RR}D_{0LR}^{-1}(D_{1LR}S_{1LR} + D_{2LR}S_{0LR}) + D_{1RR}S_{1LR} + D_{2RR}S_{0LR}.$$

Поставим следующую стохастическую задачу на собственные значения:

$$\tilde{S}\tilde{\varphi} = \tilde{\mu}\tilde{\varphi},$$

где $\tilde{\mu} = \mu_0 + \mu_1\varepsilon + \mu_2\varepsilon^2$ — собственные значения, связанные с собственным вектором $\tilde{\varphi} = \varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2$.

Проекция полиномиального хаоса задачи на собственные значения приводит к уравнению для определения статистических характеристик

$$(S_0 + S_1\varepsilon + S_2\varepsilon^2)(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2) = (\mu_0 + \mu_1\varepsilon + \mu_2\varepsilon^2)(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2).$$

Детерминированная задача и задача на собственные значения первого порядка приведены в [11]. Разрешение детерминированных уравнений приводит к задаче о вычислении средних собственных значений μ_0 и собственного вектора φ_0 . В свою очередь, разрешение уравнения первого порядка приводит к задаче о вычислении стандартного отклонения собственного значения μ_1 и собственного вектора φ_1 .

Уравнения имеют следующий вид:

— детерминированное —

$$S_0\varphi_0 = \mu_0\varphi_0;$$

— уравнение первого порядка —

$$S_0\varphi_2 + S_1\varphi_1 + S_2\varphi_0 = \mu_0\varphi_2 + \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_0;$$

— уравнение второго порядка —

$$S_0\varphi_2 + S_1\varphi_1 + S_2\varphi_0 = \mu_0\varphi_2 + \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_0.$$

Для того чтобы выделить возмущение второго порядка собственного значения μ_2 и собственного вектора φ_2 , используем левые коэффициенты распространения. В качестве вектора $\tilde{\varphi}_i^T J_n$ можно выбрать левый собственный вектор \tilde{S} , соответствующий собственному значению $\tilde{\mu}_i^{-1}$, где $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ [14]. Соответствующая стохастическая задача на собственные значения формулируется следующим образом:

$$(\tilde{\varphi}_i^T J_n)\tilde{S} = \tilde{\mu}_i^{-1}(\tilde{\varphi}_i^T J_n).$$

Проекция полиномиального хаоса задачи на собственные значения позволяет записать уравнения для определения статистических характеристик. В частности, левое уравнение второго порядка имеет вид

$$\varphi_2^T J_n S_0 + \varphi_1^T J_n S_1 + \varphi_0^T J_n S_2 = \mu_0^{-1} \varphi_2^T J_n + \mu_1^* \varphi_1^T J_n + \mu_2^* \varphi_0^T J_n,$$

где $\mu_1^* = -\mu_1/\mu_0^2$; $\mu_2^* = -\mu_2/\mu_0^2 + \mu_1^2/\mu_0^3$.

После некоторых преобразований статистические волновые характеристики можно выразить через возмущение второго порядка коэффициента распространения:

$$\begin{aligned} \mu_2 = & -[(S_0 - \mu_0 I)(S_0^T J_n - \mu_0^{-1} J_n) J_n \varphi_0 \mu_0^{-2} - \varphi_0]^+ \times \\ & \times [(S_0 - \mu_0 I)(S_0^T J_n - \mu_0^{-1} J_n)(-J_n \varphi_0 \mu_1^2 \mu_0^{-3} + S_1^T J_n \varphi_1 + S_2^T J_n \varphi_0 + \mu_1 \mu_0^{-2} J_n \varphi_1) - \\ & - S_1 \varphi_1 - S_2 \varphi_0 + \mu_1 \varphi_1] \end{aligned}$$

и возмущение второго порядка собственного вектора:

$$\varphi_2 = [S_0^T J_n - \mu_0^{-1} J_n]^+ [\mu_2^{-1} J_n \varphi_0 - S_1^T J_n \varphi_1 - S_2^T J_n \varphi_0 - \mu_1 \mu_0^{-2} J_n \varphi_1]$$

(индекс “+” соответствует оператору псевдообращения).

Рассмотрим статистические характеристики волновых чисел

$$\tilde{k} = (i/d) \log \tilde{\mu},$$

представляющие интерес в ряде прикладных случаев. Зная возмущения нулевого, первого и второго порядков собственного значения $\tilde{\mu}$ и учитывая представление волнового числа в виде $\tilde{k} = k_0 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2$, можно определить статистические характеристики \tilde{k} . В [11] среднее волнового числа задается формулой $k_0 = (i/d) \log \mu_0$, его значение первого порядка — формулой $k_1 = (i/d)\mu_0^{-1}\mu_1$. После некоторых математических преобразований член второго порядка волнового числа можно представить в виде

$$k_2 = (i/d)(\mu_0^{-2}\mu_1^2 + \mu_0^{-1}\mu_2).$$

2. Результаты численных расчетов. Для проверки СМКВЭ проведем сравнение результатов аналитических расчетов и результатов, полученных с использованием метода Монте-Карло при моделировании системы, состоящей из 5000 образцов. Исследуем распространение продольной волны (волны сжатия) и поперечной волны.

2.1. *Случай продольной волны.* Рассмотрим случай продольной волны сжатия-растяжения. Волновод представляет собой балку с двумя узлами, каждый узел имеет одну степень свободы. В качестве материала использовалась сталь ($\rho = 7800$ кг/м³, $\nu = 0,3$, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па). При численном моделировании возмущения второго порядка уровень неопределенности выбирался приблизительно равным 0,5 %. Матрицы массы и жесткости в случае волны сжатия-растяжения имеют вид

$$M_{tc} = \frac{\rho s d}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_{tc} = \frac{E s}{d} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где E — модуль Юнга; s — площадь поперечного сечения; ρ — плотность; d — длина рассматриваемого элемента.

В случае стохастической среды имеется возможность сравнить статистические характеристики волнового числа и коэффициентов распространения для неопределенного волновода. При этом полагается, что модуль Юнга и плотность являются случайными.

Случайный модуль Юнга \tilde{E} моделируется гауссовой переменной: $\tilde{E} = E_0 + E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2$ ($E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $E_1 = 5 \% \cdot E_0 = 10^{10}$ Па, $E_2 = 0,5 \% \cdot E_0 = 10^9$ Па). Для проверки точности СМКВЭ использовалось аналитическое выражение для волнового числа для продольной моды

$$\tilde{k}_{tc} = \omega \sqrt{\rho/E}.$$

Проекция полиномиального хаоса аналитического волнового числа для моды сжатия-растяжения имеет вид $\tilde{k}_{tc} = k_{0tc} + k_{1tc}\varepsilon + k_{2tc}\varepsilon^2$, где $k_{0tc} = \omega \sqrt{\rho/E}$ — детерминированное волновое число; $k_{1tc} = -(1/2)\omega \sqrt{\rho} E_1 E_0^{-3/2}$ — возмущение первого порядка. Возмущение второго порядка можно представить в виде (рис. 2, а):

$$k_{2tc} = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\rho} \left(\frac{3}{4} E_1^2 E_0^{-5/2} - E_2 E_0^{-3/2} \right).$$

Ниже приведены результаты расчетов, в которых в качестве случайной величины выбирается плотность $\tilde{\rho}$, моделируемая гауссовыми переменными:

$$\tilde{\rho} = \rho_0 + \rho_1\varepsilon + \rho_2\varepsilon^2$$

($\rho_0 = 7800$ кг/м³, $\rho_1 = 5 \% \cdot \rho_0 = 390$ кг/м³, $\rho_2 = 0,5 \% \cdot \rho_0 = 39$ кг/м³). Выражение для аналитического волнового числа первого порядка имеет вид

$$k_{1tc} = \frac{\omega}{2\sqrt{E}} \rho_0^{-1/2} \rho_1,$$

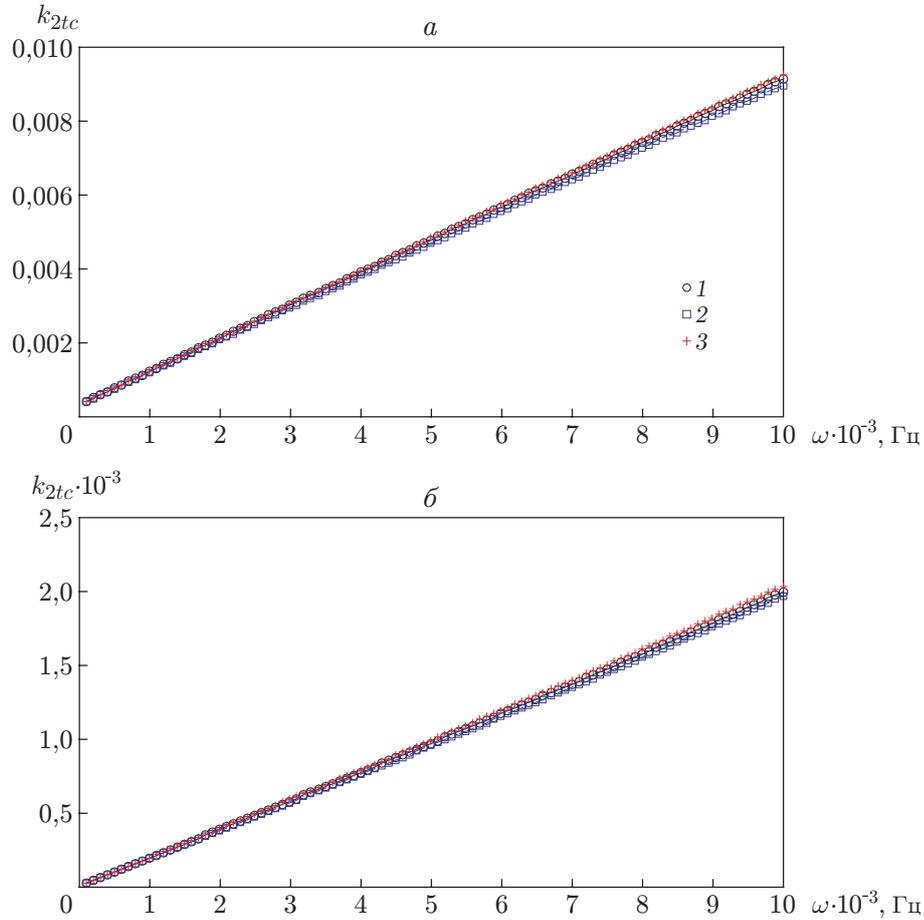


Рис. 2. Зависимости возмущения второго порядка волнового числа от частоты в случае продольной моды, полученные различными методами:
 а — E — случайная величина, б — ρ — случайная величина; 1 — СМКВЭ, 2 — аналитическое решение, 3 — метод Монте-Карло

второго порядка (рис. 2,б) —

$$k_{2tc} = \frac{\omega}{2\sqrt{E}} \left(\rho_2 \rho_0^{-1/2} - \frac{1}{4} \rho_1^2 \rho_0^{-3/2} \right).$$

2.2. *Случай поперечной волны.* Рассмотрим простую дисперсионную среду и в качестве элемента выберем балку с двумя узлами. Матрицы массы и жесткости для балки имеют вид

$$M_{fl} = \frac{\rho s d}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22d & 54 & -13d \\ 22d & 4d^2 & 13d & -3d \\ 54 & 13d & 156 & -22d \\ -13d & -3d & -22d & 4d^2 \end{bmatrix}, \quad K_{fl} = \frac{EI}{d^3} \begin{bmatrix} 12 & 6d & -12 & 6d \\ 6d & 4d^2 & -6d & 2d^2 \\ -12 & -6d & 12 & -6d \\ 6d & 2d^2 & -6d & 4d^2 \end{bmatrix},$$

где EI — жесткость на изгиб.

Аналитическое выражение для волнового числа в случае поперечной моды имеет вид

$$\tilde{k}_{fl} = (\rho s \omega^2 / (EI))^{1/4}.$$

Проекция полиномиального хаоса аналитического волнового числа для поперечной моды имеет вид $\tilde{k}_{fl} = k_{0fl} + k_{1fl}\varepsilon + k_{2fl}\varepsilon^2$, где $k_{0fl} = (\rho s \omega^2 / (E_0 I))^{1/4}$ — аналитическое детерминированное волновое число поперечной моды.

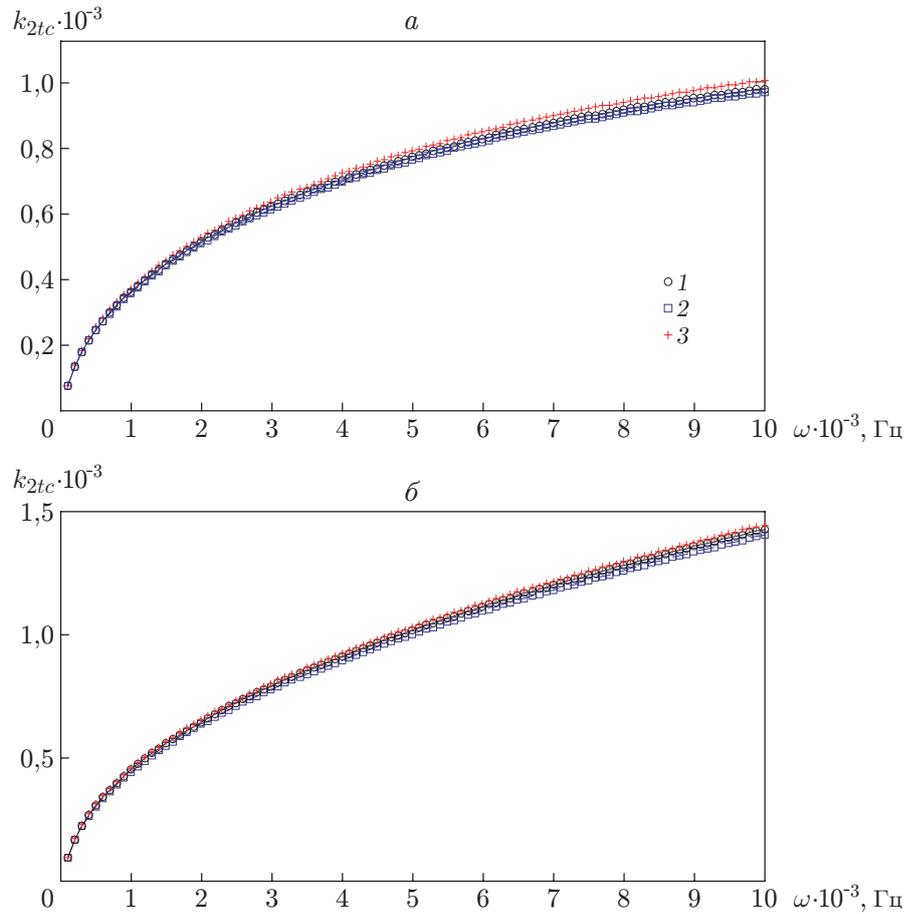


Рис. 3. Зависимости возмущения второго порядка волнового числа от частоты в случае поперечной моды, полученные различными методами:
a — E — случайная величина, *б* — ρ — случайная величина (обозначения те же, что на рис. 2)

В случае стохастической среды, если модуль Юнга считается случайным параметром, аналитическое волновое число первого порядка для поперечной моды имеет вид

$$k_{1fl} = -\left(\frac{\rho s \omega^2}{I}\right)^{1/4} \frac{1}{4} E_1 E_0^{-5/4}.$$

Член второго порядка записывается следующим образом (рис. 3, *a*):

$$k_{2fl} = \left(\frac{\rho s \omega^2}{I}\right)^{1/4} \left(\frac{5}{32} E_1^2 E_0^{-9/4} - \frac{1}{4} E_2 E_0^{-5/4}\right).$$

Аналитическое выражение для волнового числа в случае поперечной моды имеет вид

$$k_{1fl} = \left(\frac{s \omega^2}{EI}\right)^{1/4} \frac{1}{4} \rho_0^{-3/4} \rho_1.$$

После некоторых преобразований член второго порядка аналитического волнового числа можно представить следующим образом (рис. 3,б):

$$k_{2fl} = \left(\frac{s\omega^2}{EI}\right)^{1/4} \left(-\frac{3}{32}\rho_0^{-7/4}\rho_1 + \frac{1}{4}\rho_0^{-3/4}\rho_2\right).$$

2.3. *Результаты расчетов с учетом возмущений первого и второго порядков.* Пусть длина d является стохастическим параметром:

$$\tilde{d} = d_0 + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2.$$

Проекция полиномиального хаоса матрицы массы для продольной моды имеет вид

$$\tilde{M} = M_0 + M_1\varepsilon + M_2\varepsilon^2,$$

где $M_0 = \frac{\rho s d_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — детерминированная матрица массы; $M_1 = \frac{\rho s d_1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ — ее возмущение первого порядка. Тогда член второго порядка записывается следующим образом:

$$M_2 = \frac{\rho s d_2}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Проекция полиномиального хаоса матрицы жесткости для продольной моды имеет вид

$$\tilde{K} = K_0 + K_1\varepsilon + K_2\varepsilon^2,$$

где $K_0 = \frac{Es}{d_0} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ — детерминированная матрица жесткости; $K_1 = -\frac{Es d_1}{d_0^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ — ее возмущение первого порядка. Тогда член второго порядка записывается следующим образом:

$$K_2 = Es \left(\frac{d_1^2}{d_0^3} - \frac{d_2}{d_0^2}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы исследовать применимость СМКВЭ при больших возмущениях (относительно среднего случайной величины), в численных расчетах для возмущения первого порядка уровень неопределенности выбирался приблизительно равным 10 %, для возмущения второго порядка — 0,5 %. Данные вычисления выполнены для продольных волн в предположении, что случайный элемент имеет длину $d_0 = 0,02$ м, $d_1 = 0,1d_0 = 0,002$ м, $d_2 = 0,005d_0 = 0,0001$ м.

На рис. 4 видно, что в случае больших неопределенностей возмущений первого порядка недостаточно. Результаты, полученные с использованием СМКВЭ и метода Монте-Карло, близки. В случае больших неопределенностей необходимо учитывать возмущения второго порядка.

Закключение. В работе с использованием СМКВЭ и с учетом возмущений второго порядка исследовано распространение волн с неопределенностями. Рассмотренный метод представлен в спектральной формулировке и формулировке с использованием пространства состояний. Вычислены возмущения второго порядка собственных значений и собственных векторов в задаче с неопределенностями, содержащимися в физических и геометрических характеристиках волновода. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием СМКВЭ, и результатов аналитических решений для случаев продольного и поперечного распространения волн по упругой балке со случайными модулем Юнга

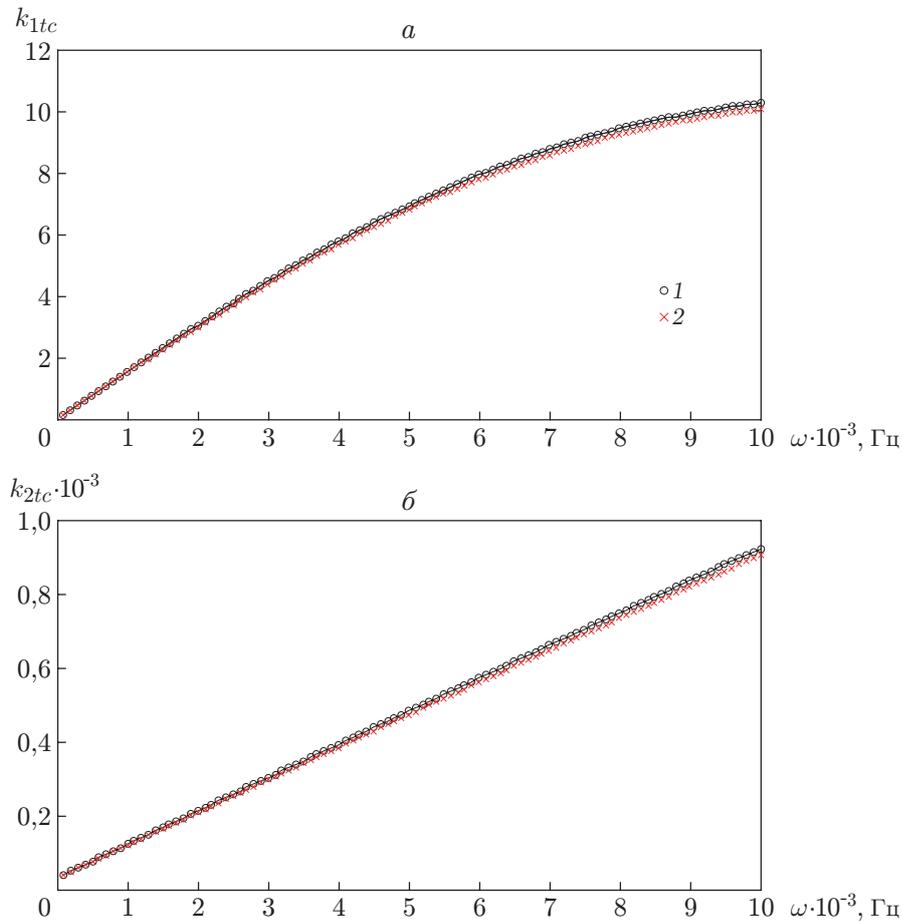


Рис. 4. Зависимости возмущений первого (*a*) и второго (*б*) порядков волнового числа от частоты в случае продольной моды (*d* — случайная величина), полученные различными методами:
 1 — СМКВЭ, 2 — метод Монте-Карло

и плотностью. Показано, что при больших неопределенностях следует учитывать возмущения второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alleyne D. N., Lowe M. J. S., Cawley P.** The reflection of guided waves from circumferential notches in pipes // *J. Appl. Mech.* 1998. V. 65. P. 635–641.
2. **Bouchoucha F., Akrouf M., Fakhfakh T., et al.** Detection of the defects in cylindrical pipes: Application to the wave finite element method // *Intern. J. Modeling, Identificat. Control.* 2010. V. 9, N 4. P. 336–349.
3. **Duhamel D.** A recursive approach for the finite element computation of waveguides // *J. Sound Vibrat.* 2009. V. 323. P. 163–172.
4. **Mencik J. M., Ichchou M. N.** Multi mode propagation and diffusion in structures through finite element // *Europ. J. Mech. A. Solid.* 2005. V. 24, N 5. P. 877–898.
5. **Duhamel D., Mace B. R., Brennan M. J.** Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures // *J. Sound Vibrat.* 2006. V. 294. P. 205–220.

6. **Spanos P., Ghanem R.** Stochastic finite element expansion for random media // J. Engng Mech. 1989. V. 115, N 5. P. 1035–1053.
7. **Schueller G. I., Pradlwafner H. J.** Uncertain linear systems in dynamics: retrospective and recent developments by stochastic approaches // Engng Struct. 2009. V. 31. P. 2507–2517.
8. **Pellisetti M., Capiez-Lernout E., Pradlwafner H., et al.** Reliability analysis of a satellite structure with a parametric and a non-parametric probabilistic model // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2008. V. 198. P. 344–357.
9. **Soize C.** A non-parametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics // Probab. Engng Mech. 2000. V. 15, N 3. P. 277–294.
10. **Soize C.** A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics // J. Sound Vibrat. 2005. V. 288, N 3. P. 623–652.
11. **Ichchou M. N., Bouchoucha F., Ben Souf M. A., et al.** Stochastic wave finite element for random periodic media through first-order perturbation // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2011. V. 200. P. 2805–2813.
12. **Bouchoucha F., Ichchou M. N., Haddar M.** Guided wave propagation in uncertain elastic media // Ultrasonics. 2013. V. 53. P. 303–312.
13. **Bouchoucha F., Ichchou M. N., Haddar M.** Diffusion matrix through stochastic wave finite element method // Finite Elements Analysis Design. 2013. V. 64. P. 97–107.
14. **Houillon L., Ichchou M. N., Jezequel L.** Dispersion curves of fluid filled elastic pipes by standard models and eigenpath analysis // J. Sound Vibrat. 2005. V. 281. P. 483–507.

*Поступила в редакцию 5/II 2015 г.,
в окончательном варианте — 12/VIII 2015 г.*
