Выражая сигма-функцию через тэта-функцию [11] и учитывая (3.18), (3.19), получаем для случая нагружения пластины сосредоточенной силой

$$\Delta\varphi_0(x, y) = -\frac{P}{D} K(x, y; \xi, \eta) = \frac{P}{2\pi D} \operatorname{Re} \ln \frac{\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a}\right)\theta_1\left(\frac{z+\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar\zeta}{2a}\right)\theta_1\left(\frac{z+\bar\zeta}{2a}\right)},$$

где P — интенсивность сосредоточенной силы; (ξ, η) — точка приложения сосредоточенной силы.

Из (3.14) выражение для перерезывающей силы имеет вид

$$N_1 = -\frac{P}{4\pi a} \operatorname{Re}\left[\frac{\theta_1'\left(\frac{z-\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a}\right)} + \frac{\theta_1'\left(\frac{z+\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z+\zeta}{2a}\right)} - \frac{\theta_1'\left(\frac{z-\bar\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar\zeta}{2a}\right)} - \frac{\theta_1'\left(\frac{z+\bar\zeta}{2a}\right)}{\theta_1\left(\frac{z+\bar\zeta}{2a}\right)}\right]. \tag{3.20}$$

Функция $\theta_1(v)$ имеет нули в точках $v = m + nbi/a$, где m и n — целые числа. Следовательно, функции, входящие в знаменатели (3.20), будут иметь нули в точках

$$z = +\zeta + 2am + 2bni, \; z = +\bar\zeta + 2am + 2bni.$$

Но в прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant a$. $0 \leqslant y \leqslant b$ попадает лишь одна точка $z = \zeta$ — точка приложения сосредоточенной силы. Таким образом, выражение для перерезывающей силы (3.20) будет везде ограничено, за исключением точки приложения сосредоточенной силы.

Поступила 18 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кильчевский Н. А., Нздебская Г. А., Киселевская Л. М.** Лекции по аналитической механике оболочек. Киев: Вища школа, 1974.
2. **Zhilin P. A.** Mechanics of deformable directed surfaces.— Int. J. Solids and Structures, 1976, vol. 12, p. 635.
3. **Жилин П. А.** Теория упругих простых оболочек.— В кн.: V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике. Аннот. докл. Алма-Ата: Наука, 1981.
4. **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек.— Труды Ленингр. политехн. ин-та, 1982, № 386.
5. **Галеркин Б. Г.** Упругие прямоугольные и треугольные свободно опертые толстые плиты, подверженные изгибу.— ДАН СССР, 1931, № 10.
6. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
7. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. Л.: Судостроение, 1962.
8. **Гольденвейзер А. Л.** Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.
9. **Джанелидзе Г. Ю.** Определение перерезывающих сил при изгибе опертых тонких пластин.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
10. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М.: Наука, 1974.
11. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.

УДК 539.374

ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ ПРАНДТЛЯ О СЖАТИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

С. И. СЕНАШОВ

(*Красноярск*)

В работе найдены новые поля скоростей для известного решения Прандтля.

Система уравнений плоской задачи теории идеальной пластичности с условием текучести Мизеса имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4k^2; \tag{2}$$

$$2\tau\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - (\sigma_x - \sigma_y)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

где σ_x, σ_y, τ — компоненты тензора напряжений; (u, v) — вектор скорости; k — предел текучести при чистом сдвиге.

Если известно решение уравнений (1), (2), то система (3), (4) определяет возможное поле скоростей, как правило, неоднозначно. Система (1), (2) хорошо изучена, обзор известных инвариантных решений дан в [1].

Одно из наиболее известных и практически важных решений системы (1), (2) найдено Прандтлем:

$$\sigma_x = -p - k(x/h - 2\sqrt{1 - y^2/h^2}),\ \sigma_y = -p - kx/h,\ \tau = ky/h, \tag{5}$$

где p, h — постоянные. Это решение описывает напряженное состояние в пластическом слое толщиной $2h$, сжимаемом двумя жесткими шероховатыми плитами.

Для поля напряжений (5) система (3), (4) запишется в виде

$$y\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \sqrt{h^2 - y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Найдем инвариантные решения системы (6). Группа непрерывных преобразований, допускаемая системой (6), найденная согласно [2], порождается операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial v} - y\frac{\partial}{\partial u},\quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u},\quad X_4 = \frac{\partial}{\partial v},\quad X_5 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Оптимальная система однопараметрических подгрупп, необходимая для построения всех существенно различных инвариантных решений [2], имеет вид

$$X_4,\ X_1 + \alpha X_5,\ X_2 + \alpha X_3,\ X_3 + \alpha X_4,\ X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3,$$

где α, β — произвольные постоянные. В силу критерия инвариантности [2] инвариантные решения можно построить только на подгруппах $X_1 + \alpha X_5$, $X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3$. Приведем эти решения.

Решение на подгруппе $X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3$ ищем в виде

$$u = -\alpha xy + \beta x + g(y),\quad v = \frac{\alpha}{2}x^2 + f(y), \tag{7}$$

где f, g — функции, подлежащие определению из системы (6). Подставляя (7) в (6) и решая полученную систему, имеем

$$\begin{gathered} u = -\alpha xy + \beta x - \alpha h^2 \arcsin(y/h) - \alpha y\sqrt{h^2 - y^2} - 2\beta\sqrt{h^2 - y^2} + C_1, \\ v = \alpha x^2/2 + \alpha y^2/2 - \beta y + C_2, \end{gathered} \tag{8}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Заметим, что при $\alpha = 0$ (8) переходит в известное решение Надаи [3], при $\alpha \neq 0$ получаем новое поле скоростей.

Замечание. Условие положительности диссипации энергии накладывает следующее ограничение на значение параметров: $\beta - \alpha y > 0$, если $y \in [-h, h]$.

Построим возможные инвариантные решения на подгруппе $X_1 + \alpha X_5$. Решение, инвариантное относительно этой подгруппы, ищем в виде

$$u = f(y)e^{\alpha x},\ v = g(y)e^{\alpha x}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y(\alpha f - g') = (f' + \alpha g)\sqrt{h^2 - y^2},\ \alpha f + g' = 0.$$

Отсюда имеем

$$\sqrt{h^2 - y^2}g'' + 2\alpha^2 g' y - \alpha^2\sqrt{h^2 - y^2}g = 0.$$

Последнее уравнение подстановкой $g' = gu$ сводится к уравнению Риккати

$$u' + u^2 + 2\alpha^2\frac{y}{\sqrt{h^2 - y^2}}u + \alpha^2 = 0.$$

Поступила 13 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Annin B. D.** A new exact solution of equations of the plane problem of ideal plasticity with von Mises conditions.— In: Euromech 111 symposium, Czechoslovakia, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. **Соколовский В. В.** Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969.