УДК 539.3:517.946

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ЗАКРУЧИВАЕМОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

В. В. Стружанов, С. В. Жижерин

Институт машиноведения УрО РАН, 620049 Екатеринбург

Исследуется устойчивость положений равновесия цилиндрического стержня, подвергнутого кручению по мягкой и жесткой схемам нагружения. Материал деформируется пластически, без континуального разрушения. Полагается, что после упрочнения материал становится физически неустойчивым (стадия разупрочнения). Используются два новых критерия для определения момента потери устойчивости и локализации деформаций.

Введение. Потеря устойчивости и локализация деформаций ограничивают деформации твердого тела и связаны с его разрушением. Эти сложные явления изучены недостаточно.

Как правило, физическая неустойчивость материала не учитывается при изучении неустойчивости тел [1, 2]. При учете физической неустойчивости изучаются лишь необходимые условия локализации деформаций при однородном напряженно-деформированном состоянии без учета геометрии тела, условий нагружения, а также области деформирования материала на стадиях упругости, упрочнения и разупрочнения (физической неустойчивости) [3].

В данной работе задача об устойчивости кручения цилиндрического стержня рассматривается с учетом всех факторов, влияющих на устойчивость и локализацию деформаций (длина и радиус цилиндра, условия нагружения, физическая неустойчивость материала, напряженно-деформированное состояние), в предположении, что материал обладает идеальными пластическими свойствами, т. е. повреждаемость (континуальное разрушение) не учитывается. Анализ проведен с использованием двух предложенных критериев для определения момента потери устойчивости и локализации деформаций.

1. Свойства материала. Рассмотрим кручение стержня, имеющего длину l и радиус поперечного сечения R. Деформирование будем осуществлять заданием величины крутящего момента M (мягкое нагружение) либо абсолютного угла закручивания ψ (жесткое нагружение). Полагаем, что свойства материала характеризует диаграмма деформирования в координатах касательное напряжение τ — сдвиг γ, состоящая из восходящей и нисходящей ветвей [4]. На стадии упругости поведение материала характеризуется модулем сдвига G, на стадиях упрочнения (восходящая после линейного участка упругости ветвь: $\gamma^{\text{т}} < \gamma \leqslant \gamma^{\text{в}}$) и разупрочнения (нисходящая ветвь: $\gamma^{\text{в}} < \gamma \leqslant \gamma^{z}$) — касательным (мгновенным) модулем сдвига $G^p = d\tau/d\gamma$. Здесь $\gamma^{\text{т}}$, $\gamma^{\text{в}}$, γ^{z} — сдвиговые деформации, соответствующие пределу текучести $\tau^{\text{т}}$, пределу прочности $\tau^{\text{в}}$ и разрушению.

В зависимости от процессов, происходящих в материале при деформировании, возможны три варианта разгрузки: 1) без образования остаточных деформаций с модулем $G^s = \tau/\gamma$, являющимся секущим модулем; 2) с образованием остаточных деформаций и модулем разгрузки, равным G; 3) с образованием остаточных деформаций и модулем разгрузки, равным G^u ($G^s < G^u < G$).

Выполаживание модуля разгрузки связано с континуальным разрушением, т. е. с поврежденностью материала микродефектами. Если этим явлением пренебречь, то получим модель пластического материала, обладающего свойствами как упрочнения, так и разупрочнения. В этом случае зависимость между напряжениями и деформациями можно записать в виде [4]

$$\tau = G\gamma^e = G(\gamma - \gamma^p), \tag{1.1}$$

где γ^e, γ^p — упругая и пластическая составляющие сдвига.

Далее, используя формулу (1.1), находим $d\tau = G(d\gamma - d\gamma^p)$. В то же время справедливо инкрементальное соотношение $d\tau = G^p d\gamma$. Приравнивая оба выражения, получим

$$d\gamma^p = (1 - G^p/G)\, d\gamma. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) определяет кинетику развития пластической деформации при отсутствии поврежденности.

2. Основная и корректирующая задачи. Исходную задачу определения напряженно-деформированного состояния стержня при заданном крутящем моменте разобьем на основную и корректирующую [4]. Основная задача — это задача кручения упругого стержня заданным моментом. Ее решение определяют выражения

$$\gamma' = \alpha M r, \quad \tau' = G\alpha M r, \quad \psi' = \alpha M l, \quad \alpha = (0{,}5\pi G R^4)^{-1},$$

где ψ' — абсолютный угол закручивания, соответствующий моменту M. Корректирующая задача — это задача определения собственных (остаточных) напряжений в стержне при заданной величине остаточной пластической деформации γ^p и свободной границе. Решение этой задачи имеет вид

$$\eta = \alpha m r, \quad \tau'' = G(\eta - \gamma^p), \quad \psi'' = \alpha m l, \quad m = 2\pi \int\limits_0^R G\gamma^p r^2\, dr,$$

где ψ'' — абсолютный угол закручивания при свободных от усилий торцах стержня; m — фиктивный крутящий момент; η — деформация сдвига, удовлетворяющая условиям совместности; τ'' — остаточные напряжения.

Введем оператор P_1, который определяется выражением

$$P_1 e(r) = \frac{4r}{R^4} \int\limits_0^R e(r) r^2\, dr$$

и преобразует функции $e(r)$ произвольного вида в линейные функции. Очевидно, что $\eta = P_1 G\gamma^p/G$, $\tau'' = P_1 G\gamma^p - G\gamma^p$. Следовательно, оператор P_1 фактически определяет решение корректирующей задачи.

В случае жесткого нагружения решение основной задачи имеет вид

$$\gamma' = \psi r/l, \qquad \tau' = G\psi r/l, \qquad M' = 2\pi G\psi R^4/(4l),$$

где M' — крутящий момент, соответствующий углу закручивания ψ. В этом случае корректирующая задача — это задача расчета остаточных напряжений в стержне с закрепленными торцами. Ее решение определяют выражения

$$\eta = 0, \qquad \tau'' = -G\gamma^p, \qquad m' = -m,$$

где m' — крутящий момент, удерживающий торцы стержня. Очевидно, что оператор Q_1, определяющий решение корректирующей задачи, является нулевым, причем $\tau'' = Q_1 G\gamma^p - G\gamma^p = -G\gamma^p$.

Решением исходной задачи при заданном значении γ^p в случаях мягкого и жесткого нагружения является сумма решений основной и корректирующей задач.

3. S_t-критерий для мягкого нагружения. Дадим определение устойчивости положения равновесия стержня в смысле Ляпунова, аналогичное определению, данному в работе [5].

Определение 1. Положение равновесия стержня при мягком нагружении называется устойчивым, если для любого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что при увеличении крутящего момента на малую величину dM из неравенства $dM < \delta$ следуют неравенства $|d\gamma| < \varepsilon_1$, $|d\gamma^p| < \varepsilon_2$ для каждого r, где $d\gamma$ и $d\gamma^p$ связаны между собой равенством (1.2) и с dM условиями равновесия.

Из данного определения следует, что при возмущении положения равновесия посредством увеличения крутящего момента на dM функции $d\gamma$ и $d\gamma^p$ должны удовлетворять исходной задаче при $d\tau = G(d\gamma - d\gamma^p)$ и граничным условиям для dM.

Из решения основной и корректирующей задач находим

$$d\gamma = d\gamma' + d\eta = \alpha r\, dM + G^{-1} P_1 G\, d\gamma^p.$$

Подставляя в последнее соотношение выражение для $d\gamma^p$ из формулы (1.2), после простых преобразований получим равенство

$$S_t\, d\gamma = G\alpha r\, dM, \tag{3.1}$$

где

$$S_t = G - P_1 G + P_1 G^p. \tag{3.2}$$

Отсюда $d\gamma = S_t^{-1} G\alpha r\, dM$. Из определения 1 следует, что устойчивость стержня связана со свойствами оператора S_t, который будем называть оператором устойчивости. Если этот оператор имеет обратный, то решение уравнения (3.1) единственное и положение равновесия устойчивое. Если $S_t^{-1} = \infty$ и, следовательно,

$$S_t = 0, \tag{3.3}$$

то рассматриваемое положение равновесия неустойчивое.

Если оператор P_1 имеет обратный, то, применяя оператор P_1^{-1} к равенству (3.3) с учетом (3.2), находим, что критерий неустойчивости (3.3) выполняется, если распределение касательного модуля сдвига по сечению стержня определяется выражением

$$G^p = G - P_1^{-1} G. \tag{3.4}$$

Предположим, что при деформировании стержня отсутствует локализация деформаций, т. е. в каждом сечении $d\gamma = (r/l)\, d\psi$. Тогда, используя равенство (3.2), получим

$$S_t\, d\gamma = \frac{d\psi}{l} \frac{4r}{R^4} \int_0^R G^p(r) r^3\, dr.$$

Отсюда следует, что условие (3.3) выполняется, если

$$\int_0^R G^p r^3\, dr = 0. \tag{3.5}$$

В этом случае малое увеличение крутящего момента приводит к неограниченному росту угла закручивания.

Следует отметить, что полученное условие потери устойчивости (3.5) совпадает с условием расхождения итерационного процесса расчета напряженно-деформированного состояния в стержне при мягком нагружении, исследованным в работе [4].

Рассмотрим следующий пример. Пусть в поперечном сечении стержня в некотором положении равновесия имеются зоны упругости V_e $(0 \leqslant r \leqslant R_{\text{т}})$, упрочнения V_h $(R_{\text{т}} < r \leqslant R_{\text{в}})$ и разупрочнения V_s $(R_{\text{в}} < r \leqslant R)$. Считаем, что касательные модули на стадиях упрочнения G_h^p и разупрочнения G_s^p постоянные. Найдем такое значение G_s^p, при котором положение равновесия является неустойчивым. Используя условие (3.5), получим

$$\int\limits_0^{R_{\text{т}}} Gr^3\,dr + \int\limits_{R_{\text{т}}}^{R_{\text{в}}} G_h^p r^3\,dr + \int\limits_{R_{\text{в}}}^{R} G_s^p r^3\,dr = 0.$$

Отсюда

$$G_s^p = -\frac{GR_{\text{т}}^4 + G_h^p(R_{\text{в}}^4 - R_{\text{т}}^4)}{R^4 - R_{\text{в}}^4}. \tag{3.6}$$

Здесь $R_{\text{т}}$, $R_{\text{в}}$ — радиусы окружностей, ограничивающих области упругости и упрочнения.

Рассмотрим подход, основанный на использовании формулы (3.4). Из выражения (3.1) следует, что областью определения и областью значений оператора S_t является множество Y линейных функций вида βr $(\beta = \overline{0,\infty})$. Оператор P_1 представим в виде суммы $P_1 = P_1\chi_e + P_1\chi_h + P_1\chi_s = P_{1e} + P_{1h} + P_{1s}$. Здесь

$$\chi_e = \begin{cases} 1, & r \in V_e, \\ 0, & r \notin V_e, \end{cases} \qquad \chi_h = \begin{cases} 1, & r \in V_h, \\ 0, & r \notin V_h, \end{cases} \qquad \chi_s = \begin{cases} 1, & r \in V_s, \\ 0, & r \notin V_s. \end{cases}$$

Таким образом, областями определения этих операторов являются соответственно множества $\chi_e Y$, $\chi_h Y$, $\chi_s Y$, а областью значений — множество Y. Тогда

$$S_t = G - (P_{1e} + P_{1h} + P_{1s})G + (P_{1e} + P_{1h} + P_{1s})G^p. \tag{3.7}$$

Здесь $P_{1e} = R_{\text{т}}^4/R^4$, $P_{1h} = (R_{\text{в}}^4 - R_{\text{т}}^4)/R^4$, $P_{1s} = (R^4 - R_{\text{в}}^4)/R^4$, а обратные им операторы определяются выражениями $P_{1e}^{-1} = \chi_e R^4/R_{\text{т}}^4$, $P_{1h}^{-1} = \chi_h R^4/(R_{\text{в}}^4 - R_{\text{т}}^4)$, $P_{1s}^{-1} = \chi_s R^4/(R^4 - R_{\text{в}}^4)$. Для определения модуля G_s^p, при котором происходит потеря устойчивости, выражение (3.7) следует приравнять к нулю и применить оператор P_{1s}^{-1}. Произведя необходимые преобразования с учетом того, что $\chi_e G^p = G$, $\chi_h G^p = G_h^p$, $\chi_s G^p = G_s^p$, получим значение G_s^p, определенное выше по формуле (3.6).

Исследуем возможность локализации деформаций в некотором объеме стержня V_a — цилиндре высотой a $(0 < a < l)$. В объеме V_a зададим пластические деформации $d\gamma_a^p(r)$ и найдем решение корректирующей задачи. Оно определяется равенством

$$d\eta = \begin{cases} \alpha m_a r & \text{в } V_a, \\ 0 & \text{в } V_b. \end{cases}$$

Здесь V_b — цилиндр высотой $l - a$; $m_a = 2\pi \int\limits_0^R G d\gamma_a^p r^2\,dr$. Тогда

$$P_1 G\,d\gamma_a^p = P_{1a} G\,d\gamma_a^p = \begin{cases} \dfrac{4r}{R^4} \displaystyle\int\limits_0^R G d\gamma_a^p r^2\,dr & \text{в } V_a, \\ 0 & \text{в } V_b. \end{cases}$$

В этом случае оператор устойчивости определяется выражением

$$S_t\,d\gamma_a = G\,d\gamma_a - P_{1a}G\,d\gamma_a + P_{1a}G_a^p\,d\gamma_a = \frac{d\psi_a}{a}\,\frac{4r}{R^4}\int\limits_0^R G_a^p r^3\,dr.$$

Здесь ψ_a — абсолютный угол закручивания цилиндра V_a; $d\gamma_a = (d\psi_a/a)r$; $G_a^p(r)$ — распределение касательного модуля сдвига по сечениям цилиндра V_a. Условие неустойчивости (3.3) удовлетворяется, когда $\displaystyle\int\limits_0^R G_a^p r^3\,dr = 0$. При выполнении данного равенства угол закручивания цилиндра V_a неограниченно возрастает. Следовательно, в рассматриваемом объеме происходит локализация деформаций. Сравнение с условием (3.5) показывает, что потеря устойчивости деформирования стержня сопровождается локализацией деформаций в некотором объеме.

4. S_t-критерий для жесткого нагружения. Дадим определение устойчивости положения равновесия стержня.

Определение 2. Положение равновесия стержня при жестком нагружении называется устойчивым, если для любого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что при увеличении абсолютного угла закручивания на малую величину $d\psi$ из неравенства $d\psi < \delta$ следуют неравенства $|d\gamma| < \varepsilon_1$, $|d\gamma^p| < \varepsilon_2$ для каждого r, где $d\gamma$ и $d\gamma^p$ связаны между собой соотношением (1.2) и с $d\psi$ условиями равновесия.

Увеличим абсолютный угол закручивания на $d\psi$. Используя решения основной и корректирующей задач, находим, что в равновесии

$$d\gamma = d\gamma' + d\eta = (d\psi/l)r + G^{-1}Q_1G\,d\gamma^p. \tag{4.1}$$

Аналогично выражениям (3.1) и (3.2) данное равенство можно записать в виде $S_t\,d\gamma = (d\psi/l)Gr$, где $S_t = G - Q_1G + Q_1G^p$. Тогда $d\gamma = S_t^{-1}(d\psi/l)Gr$. Из определения 2 следует, что устойчивость положения равновесия нарушается, если $S_t^{-1} = \infty$ ($S_t = 0$). Аналогично (3.4) получаем, что в момент потери устойчивости должно выполняться равенство $G^p = G - Q_1^{-1}G$. При отсутствии локализации $Q_1^{-1} = \infty$ ($Q_1 = 0$). Следовательно, потеря устойчивости происходит, если $G^p = -\infty$.

Найдем условия локализации деформаций в некотором объеме V_a. Зададим в нем пластические деформации $d\gamma_a^p(r)$ и решим корректирующую задачу. Получим

$$d\eta = \begin{cases} (1-a/l)\alpha m_a r & \text{в } V_a, \\ -(a/l)\alpha m_a r & \text{в } V_b. \end{cases}$$

Тогда

$$Q_1G\,d\gamma_a^p = Q_{1a}G\,d\gamma_a^p = \begin{cases} (1-a/l)G\alpha m_a r & \text{в } V_a, \\ -(a/l)G\alpha m_a r & \text{в } V_b. \end{cases}$$

Запишем равенство (4.1) для области V_a. С учетом соотношения (1.2) получим

$$d\gamma_a - \Big(1-\frac{a}{l}\Big)\frac{4r}{GR^4}\int\limits_0^R (G-G_a^p)d\gamma_a r^2\,dr = \frac{r\,d\psi}{l}.$$

Подставляя в данное выражение $d\gamma_a = (d\psi_a/a)r$, после несложных преобразований находим

$$\Big[\frac{a}{l} + \Big(1-\frac{a}{l}\Big)\frac{4}{R^4G}\int\limits_0^R G_a^p r^3\,dr\Big]\frac{d\psi_a}{a} = \frac{d\psi}{l}. \tag{4.2}$$

Таким образом, оператор устойчивости в области V_a имеет вид

$$S_t = \frac{a}{l} + \Big(1 - \frac{a}{l}\Big)\frac{4}{R^4 G}\int\limits_0^R G_a^p r^3\,dr.$$

Отсюда $S_t = 0$, если

$$\int\limits_0^R G_a^p r^3\,dr = -\frac{GR^4 a}{4(l-a)}. \tag{4.3}$$

При выполнении равенства (4.3) абсолютный угол закручивания цилиндра V_a неограниченно возрастает, т. е. происходит локализация деформаций в области V_a. Так как абсолютный угол закручивания всего стержня фиксирован, то угол закручивания цилиндра V_b стремится к нулю и цилиндр V_b разгружается.

Очевидно, что локализация деформаций сопровождается потерей устойчивости деформирования всего стержня.

Следует отметить, что при $l = a$ (локализация отсутствует) из равенства (4.3) следует $G^p = -\infty$. Если $l \gg a$, то характер нагружения (мягкое или жесткое) слабо влияет на устойчивость деформирования закручиваемого стержня. Кроме того, при $a = 0$ условие (4.3) совпадает с условием локализации деформаций при мягком нагружении. Так как интеграл, стоящий в левой части формулы (4.3), достигает нулевого значения независимо от способа нагружения в один и тот же момент, можно сделать вывод о том, что потеря устойчивости деформирования закручиваемого стержня из пластического материала всегда связана с локализацией деформаций в узкой полосе практически нулевой ширины.

5. R-критерий для мягкого нагружения. Рассмотрим сначала единичный объем материала, подвергнутый чистому сдвигу, и введем функционал $\rho = d\gamma\, G\, d\gamma - d\gamma^p\, G\, d\gamma^p$, где $d\gamma^p$ — приращение пластической деформации, соответствующее приращению полного сдвига $d\gamma$. Используя очевидные равенства $d\gamma = d\gamma^e + d\gamma^p$, $d\tau = G\,d\gamma^e$, где $d\gamma^e$ — приращение упругой составляющей сдвига, получим соотношение $d\tau\, d\gamma + d\tau\, d\gamma^p = d\gamma\, G\, d\gamma - d\gamma^p\, G\, d\gamma + d\gamma\, G\, d\gamma^p - d\gamma^p\, G\, d\gamma^p = d\gamma\, G\, d\gamma - d\gamma^p\, G\, d\gamma^p = \rho$. Из критерия физической устойчивости материала Друккера [6] следует, что при устойчивом состоянии ($d\tau\, d\gamma > 0$, $d\tau\, d\gamma^p > 0$) выполняется неравенство $\rho > 0$, а при неустойчивом — $\rho < 0$.

Если $\rho > 0$, то $d\tau(d\gamma + d\gamma^p) = d\tau(2d\gamma - d\gamma^e) = 2d\tau\, d\gamma - d\gamma^e\, G\, d\gamma^e > 0$. Так как $d\gamma^e\, G\, d\gamma^e > 0$, то $d\tau\, d\gamma > 0$. Если $\rho < 0$, то $d\tau(d\gamma + d\gamma^p) = d\tau(d\gamma^e + 2d\gamma^p) = d\gamma^e\, G\, d\gamma^e + 2d\tau\, d\gamma^p < 0$. Отсюда $d\tau\, d\gamma^p < 0$.

Таким образом, знак функционала ρ (как и постулат Друккера) определяет физическую устойчивость материала. Следует отметить, что неравенство $\rho > 0$ соответствует деформированию, при котором потенциальная энергия упругих деформаций возрастает, а $\rho < 0$ — деформированию, при котором эта энергия в единичном объеме уменьшается.

Физически неустойчивое состояние материала необязательно приводит к потере устойчивости положения равновесия.

Определение 3. Положение равновесия единичного объема при чистом сдвиге называется устойчивым, если для любого $\delta > 0$ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что из неравенства $d\gamma\, G\, d\gamma < \delta$ следует неравенство $d\gamma^p\, G\, d\gamma^p < \varepsilon$, где $d\gamma$ и $d\gamma^p$ связаны соотношением (1.2).

Следовательно, потеря устойчивости происходит, когда бесконечно малое приращение полных деформаций приводит к появлению конечных или бесконечных пластических деформаций, т. е. $d\gamma^p\, G\, d\gamma^p/(d\gamma\, G\, d\gamma) = \infty$ или $\rho = -\infty$. Таким образом, для единичного объема, в котором при жестком нагружении деформация однородна, это условие выполняется при $G^p = -\infty$. В данном случае имеет место так называемая неустранимая физическая неустойчивость материала.

Возмущая равновесие стержня посредством малого увеличения крутящего момента на dM и суммируя функционалы ρ по объему, получим

$$R = \int_V \rho\, dV = 2\pi l \int_0^R \rho r\, dr. \qquad (5.1)$$

Для исследования устойчивости положения равновесия необходимо в R-интеграле (5.1) величину $d\gamma^p$ выразить через $d\gamma$, используя равенство (1.2), а сдвиг $d\gamma$ связать с условием равновесия

$$dM = 2\pi \int_0^R d\tau\, r^2\, dr = 2\pi \int_0^R G^p\, d\gamma\, r^2 dr.$$

Выполняя преобразования с учетом равенства $d\gamma = (d\psi/l)r$, получим

$$R = l(dM)^2 \int_0^R [2GG^p - (G^p)^2] r^3\, dr \Big/ 2\pi G \Big(\int_0^R G^p r^3\, dr\Big)^2. \qquad (5.2)$$

Проводя аналогию с деформированием единичного объема, можно утверждать, что при $R > 0$ энергия упругих деформаций в стержне растет, при $R < 0$ убывает. Тогда неравенство $R < 0$ является необходимым условием потери устойчивости, которая происходит при $R = -\infty$. Отсюда и из выражения (5.2) следует, что равенство (3.5) и в этом случае определяет момент потери устойчивости.

Исследуем возможность локализации деформаций в некотором объеме V_a. Представим R-интеграл в виде суммы

$$R = 2\pi a \int_0^R \rho_a r\, dr + 2\pi(l - a) \int_0^R \rho_b r\, dr, \qquad (5.3)$$

где $\rho_a = d\gamma_a\, G\, d\gamma_a - d\gamma_a^p\, G\, d\gamma_a^p$; функционал $\rho_b = d\gamma_b\, G\, d\gamma_b - d\gamma_b^p\, G\, d\gamma_b^p$ определен в области V_b. В силу равенств (1.2) и $d\gamma_a = (d\psi_a/a)r$, а также условия равновесия $dM = 2\pi \int_0^R G_a^p\, d\gamma_a r^2\, dr$ первый интеграл в (5.3) приводится к виду, аналогичному (5.2), с заменой G^p на G_a^p. Тогда $R = -\infty$ при $\int_0^R G_a^p r^3\, dr = 0$. В этом случае при потере устойчивости деформирования стержня произойдет локализация деформаций в объеме V_a. Следует отметить, что данное условие совпадает с условием, полученным выше.

6. R-критерий для жесткого нагружения. Пусть положение равновесия стержня возмущается увеличением абсолютного угла закручивания на $d\psi$. Запишем выражение для R-интеграла (5.1), используя равенство (1.2) и условия равновесия и выражая все величины через $d\psi$. Получим

$$R = \frac{2\pi d\psi^2}{Gl} \int_0^R [2GG^p - (G^p)^2] r^3\, dr.$$

Потеря устойчивости равновесия стержня происходит при $R = -\infty$. В случае отсутствия локализации это условие выполняется при $G^p = -\infty$.

Для исследования возможности локализации деформаций в области V_a выражение (5.3) запишем в виде

$$R = \frac{2\pi d\psi_a^2}{Ga} \int\limits_0^R [2GG_a^p - (G_a^p)^2] r^3\, dr + 2\pi(l-a) \int\limits_0^R \rho_b r\, dr.$$

Величину $d\psi_a$ необходимо выразить через $d\psi$ в силу условий равновесия, используя формулу (4.2). В результате находим, что $R = -\infty$, если выполняется равенство (4.3). Таким образом, и в данном случае имеем результат, полученный выше с помощью S_t-критерия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Георгиевский Д. В.** Устойчивость процессов деформирования по наборам мер относительно заданных классов возмущения // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1997. № 2. С. 69–92.
2. **Hill B. R.** Bifurcation phenomena in the plane tension test // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. P. 239–264.
3. **Райс Д. Р.** Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Междунар. конгр., Делфт, Нидерланды, 30 авг. — 4 сент. 1976 г. М.: Мир, 1979. С. 439–471.
4. **Стружанов В. В., Жижерин С. В.** Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчета напряженного состояния при кручении // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 2. С. 92–104.
5. **Барбашин Е. А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
6. **Drucker D. C.** Introduction to mechanics of deformable solids. N. Y.: McGraw-Hill, 1967.

Поступила в редакцию 1/II 2001 г.