ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПАРАМЕТРА НА ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ УПРУГОГО СЛОЯ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В. В. Глаголев, А. А. Маркин

Тульский государственный университет, Тула, Россия E-mails: vadim@tsu.tula.ru, markin-nikram@yandex.ru

Исследуется влияние радиуса отверстия в упругом слое на величину критической внешней нагрузки в момент начала разрушения, определяемый энергетическим критерием. Использование в качестве критерия разрушения потока свободной энергии через дугу взаимодействия позволяет описать зависимость критической внешней нагрузки от радиуса отверстия. Длина дуги взаимодействия, построенной в окрестности точки максимума свободной энергии, определяется через линейный параметр. Максимальное значение линейного параметра может быть принято в качестве материальной константы. С использованием известных экспериментальных данных получена оценка введенного линейного параметра для слоя из полиметилметакрилата.

Ключевые слова: разрушение материального объема, линейный параметр, критерий разрушения, задача Кирша, дуга взаимодействия

Введение. Изучение предельного состояния твердого тела с концентратором напряжений типа трещины или эллиптического отверстия основано на формулировке экспериментально апробированных критериев разрушения. В настоящее время в механике деформируемого твердого тела основной моделью трещины является математический разрез с сингулярным распределением поля напряжений в концевой области [1, 2]. В этом случае бесконечно малое приращение длины трещины обусловлено отличной от нуля работой сингулярных напряжений на перемещениях берегов математического разреза. В состоянии разрушения работа сингулярных напряжений ассоциируется с удельной поверхностной энергией [3–6]. В то же время прочность тел, ослабленных гладкими отверстиями, как правило, определяется условиями достижения критического значения характеристик напряженно-деформированного состояния в материальной точке [7]. В случае кругового отверстия данный классический подход приводит к независимости критерия прочности от радиуса отверстия. Очевидно, что это требование не может выполняться при малых значениях радиуса. В работах [8–10] приведены результаты экспериментов по ступенчатому сжатию гипсовых слоев, ослабленных отверстиями различного радиуса. Установлено, что критическая нагрузка, соответствующая началу разрушения, асимптотически убывает с увеличением радиуса отверстия от его нулевого значения. На основе подходов, развитых в работах [9–13], получены значения структурных параметров для двух видов гипса. В частности, в [10] используется модель механики конечных трещин [11]. Согласно данной модели началу разрушения соответствуют образование и развитие трещины в виде математического разреза конечной длины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-21-00017). (с) Глаголев В. В., Маркин А. А., 2023

В ряде работ развивается альтернативный подход, основанный на представлении трещины в виде физического разреза. В настоящее время широкое распространение получили модели с физическим разрезом, построенные на основе молекулярной динамики [14– 16] с различными потенциалами межмолекулярного взаимодействия. Так, в работе [16] на основе классической модели Гриффитса исследовалась трещина нормального отрыва. Основным недостатком данных моделей является необходимость использования большого объема вычислительных ресурсов, что не позволяет проводить расчеты для образцов с реальными геометрическими размерами. Кроме того, межмолекулярные потенциалы не учитывают такие механические свойства материалов, как пластичность и вязкость, для описания которых в механике деформируемого твердого тела имеется большое количество верифицированных моделей.

В работах [17, 18] предложена модель тела с физическим разрезом, на продолжении которого вводится слой упругих "пружин", работающих на растяжение-сжатие. При этом не определены связи жесткостей пружин с реальными механическими свойствами материала. В работе [19] описано движение трещины в виде физического разреза, напряженное состояние разрушаемого слоя в котором предлагается определять путем его граничных перемещений. Однако постановок задач механики разрушения в рамках данного подхода не предлагалось.

В работах [20, 21] предложен подход для описания трещинообразных дефектов с использованием понятия слоя взаимодействия. В этом случае предельное состояние трещиноподобного дефекта определяется на основе концепции *J*-интеграла в виде произведения [21] удельной свободной энергии и толщины слоя взаимодействия, рассматриваемого в качестве линейного параметра (ЛП). При этом, устремляя линейный параметр к нулю, можно получить асимптотическую сходимость указанного произведения к величине потока упругой энергии в вершину математического разреза. При этом возникает необходимость получения оценки соответствующего ЛП.

В данной работе на примере задачи Кирша рассматриваются условия начала хрупкого разрушения слоя взаимодействия в зависимости от радиуса отверстия. На участке границы окружности вводится дуга взаимодействия (ДВ), длина которой определяется универсальным материальным параметром, характеризующим начальный ЛП трещиноподобного дефекта. В качестве условия начала хрупкого разрушения принимается достижение критического значения величины потока свободной энергии через ДВ. По сути, условие Гриффитса [3] справедливо для гладких поверхностей. Получено представление потока энергии через ДВ, зависящее от максимального вдоль дуги значения свободной энергии, радиуса окружности и линейного материального параметра. Из равенства потока энергии критическому значению (материальной константе) получена зависимость критической внешней нагрузки от радиуса отверстия. Проведена серия экспериментов, в которых определено значение ЛП для данного материала.

1. Определение потока энергии через дугу взаимодействия. Слой упругого материала с отверстием радиусом *a* нагружается на бесконечности однородной внешней нагрузкой *P*. На рис. 1 показана правая половина материала с дефектом в виде отверстия при рассматриваемом нагружении. В окрестности точки *A* выделяется ДВ длиной *s*:

$$s = a\alpha. \tag{1.1}$$

Здесь $\alpha = \arcsin(\delta_0/(2a)); \delta_0 - \Pi \Pi.$

Распределение окружных напряжений вдоль контура отверстия имеет вид [22]

$$\sigma_{\theta\theta} = P(1 + 2\cos 2\theta), \tag{1.2}$$

где θ — угол полярной системы координат.



Рис. 1. Схема нагружения кругового отверстия

Используя (1.2), находим распределение удельной свободной энергии вдоль контура отверстия

$$\Psi = \frac{P^2}{2\hat{E}} (1 + 2\cos 2\theta)^2, \tag{1.3}$$

где $\hat{E} = E$ в случае плоского напряженного состояния, $\hat{E} = E(1 - \nu^2)$ в случае плоской деформации; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Из выражения (1.3) следует, что максимальное значение свободной энергии достигается при $\alpha = 0$:

$$\Psi_m = 9P^2/(2\hat{E}). \tag{1.4}$$

С учетом (1.4) распределение (1.3) представим в следующей форме:

$$\Psi = \Psi_m (1 + 2\cos 2\theta)^2 / 9.$$
(1.5)

Определим поток свободной энергии через ДВ в направлении вектора e_1 в виде

$$2\gamma = -\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{n} \Psi a \, d\theta = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} a \Psi \cos \theta \, d\theta, \qquad (1.6)$$

где *n* — единичный вектор внешней нормали к ДВ.

Интегрируя (1.6) с учетом (1.5), получаем выражение для потока свободной энергии через ДВ в следующем виде:

$$2\gamma = \Psi_m \delta_0 \left(1 - \frac{2}{9} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^2 + \frac{1}{45} \left(\frac{\delta_0}{a} \right)^4 \right). \tag{1.7}$$

Из формулы (1.1) следует, что отношение ЛП к радиусу окружности удовлетворяет неравенству

$$0 < \delta_0/a \leq 2.$$

При $a \gg \delta_0$ из представления (1.7) получаем следующее выражение для потока:

$$2\gamma^{(a)} = \Psi_m \delta_0 = 9P^2 \delta_0 / (2\hat{E}). \tag{1.8}$$

При $a = \delta_0/2$ поток вычисляется по формуле

$$2\gamma^{(\delta)} = \frac{7}{15} \Psi_m \delta_0 = \frac{21}{5} \frac{P^2}{2\hat{E}} \delta_0.$$
(1.9)

Из представлений (1.8), (1.9) следует, что при одной и той же внешней нагрузке величина потока для отверстий с $a \gg \delta_0$ более чем в два раза превышает величину потока при $a = \delta_0/2$.

2. Условия прочности. В соответствии с классическими условиями прочности разрушение в материальной точке гладкой границы происходит в тот момент, когда какаялибо инвариантная характеристика напряженно-деформированного состояния в этой точке достигает критического значения [7]. В частности, предположим, что разрушение начинается в тот момент, когда свободная энергия достигает критического значения:

$$\Psi_m = \Psi_c \tag{2.1}$$

 $(\Psi_c -$ энергетический предел прочности). В данном случае критическая энергия достигается в точке A при критической внешней нагрузке, определяемой с учетом выражений (1.4) и (2.1) по формуле

$$P_c = \sqrt{2\hat{E}\Psi_c} / 3. \tag{2.2}$$

В отсутствие отверстия (однородное деформирование) выражение для критической внешней нагрузки имеет вид

$$P_c^{(0)} = \sqrt{2\hat{E}\Psi_c}.\tag{2.3}$$

Как и следовало ожидать, критическая нагрузка при наличии концентратора напряжений в три раза меньше нагрузки, соответствующей однородному деформированию.

В качестве условия начала разрушения гладкой границы примем условие типа условия Гриффитса [3]. Предположим, что разрушение происходит на ДВ, когда поток свободной энергии через нее достигает критического значения

$$2\gamma = 2\gamma_c. \tag{2.4}$$

Из выражений (1.4), (1.7), (2.4) находим критическую внешнюю нагрузку

$$P_{c} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma_{c} \hat{E}}{\delta_{0}}} \left(1 - \frac{2}{9} \left(\frac{\delta_{0}}{a}\right)^{2} + \frac{1}{45} \left(\frac{\delta_{0}}{a}\right)^{4}\right)^{-1}.$$
(2.5)

В отличие от условия (2.2) условие (2.5) учитывает зависимость критической нагрузки от радиуса отверстия. Однако при $a \gg \delta_0$ выражение (2.5) принимает вид

$$P_c = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma_c \hat{E}}{\delta_0}}, \qquad (2.6)$$

т. е. критическая нагрузка не зависит от радиуса отверстия. Потребуем совпадения критических внешних нагрузок, определяемых из выражений (2.2), (2.6) при $a \gg \delta_0$. В результате получаем связь между критериями прочности в следующем виде:

$$2\gamma_c = \delta_0 \Psi_c. \tag{2.7}$$



Рис. 2. Типичная зависимость критической нагрузки от диаметра кругового отверстия

Из (2.7) следует, что ЛП δ_0 является материальной константой, связывающей локальный и нелокальный критерии прочности. Возникает необходимость экспериментального определения параметра δ_0 . Для этого проведем серию экспериментов по разрушению образцов с увеличивающимися радиусами отверстий, начиная со сплошного образца с критической нагрузкой $P_c^{(0)}$. Для образцов с $a \gg \delta_0$ критические внешние нагрузки асимптотически стремятся к значению $P_c^{(a)} = P_c^{(0)}/3$.

В результате получаем зависимость внешней нагрузки от радиуса отверстия

$$P_c = P_c(2a). \tag{2.8}$$

Из условия (2.4), (1.8), (1.9) следует, что в критическом состоянии

$$2\gamma = 2\gamma_c^{(a)} = 2\gamma_c^{(\delta)}.$$
(2.9)

Из условия (2.9) с учетом (1.8), (1.9) находим связь между характерными критическими нагрузками

$$P_c^{(\delta)} = \sqrt{15/7} P_c^{(a)} = \sqrt{5/21} P_c^{(0)},$$

где $P_c^{(\delta)} = P_c(\delta_0).$

Представим внешние нагрузки в зависимости (2.8) в безразмерном виде, отнеся их к $P_c^{(0)}$, тогда $\hat{P}_c^{(0)} = 1$, $\hat{P}_c^{(a)} = 1/3$, $\hat{P}_c^{(\delta)} = \sqrt{5/21}$. На рис. 2 показана типичная зависимость критической нагрузки от диаметра отверстия.

Для определения ЛП по известной величине $\hat{P}_c^{(\delta)}$ находим точку M, абсцисса которой совпадает с δ_0 . Зная значение ЛП, по формуле (2.7) находим критическое значение потока свободной энергии.

В работе [23] приведены результаты экспериментов по растяжению пластин из полиметилметакрилата с круговыми отверстиями различного радиуса (0,3, 0,6, 1,0, 1,5 мм) и пластин без отверстий. Материал имеет следующие механические характеристики: $E = 3 \Gamma \Pi a, \nu = 0,36$, предел прочности $P_c^{(0)} = 72$ МПа. На рис. 3 представлена аппроксимирующая кривая, полученная на основе квадратичной зависимости методом наименьших квадратов с использованием экспериментальных данных (сплошная линия), а также осредненные методом наименьших квадратов экспериментальные данные [23] (точки). Пунктирной линией показана прямая $\hat{P}_c = 1/3$.

Точка пересечения аппроксимирующей кривой и прямой $\hat{P}_c = \sqrt{5/21} \approx 0.49$ позволяет получить оценку ЛП $\delta_0 \approx 2.3$ мм. Из (1.8) следует, что данный результат определяет



Рис. 3. Зависимость критической нагрузки от диаметра кругового отверстия: точки — экспериментальные данные, сплошная линия — аппроксимация экспериментальных данных, штриховая — график функции (2.10) для найденного ЛП, пунктирная — $\hat{P}_c = 1/3$

минимальный диаметр кругового отверстия $2a = \delta_0 \approx 2,3$ мм в образце из рассмотренного материала, предельная нагрузка которого может быть определена на основе (2.5):

$$P_c = \frac{P_c^{(0)}}{3} \left(1 - \frac{2}{9} \left(\frac{\delta_0}{a}\right)^2 + \frac{1}{45} \left(\frac{\delta_0}{a}\right)^4\right)^{-1/2}.$$
(2.10)

На рис. 3 штриховой линией показан график функции (2.10) для найденного ЛП. С увеличением радиуса влияние ЛП на критическую нагрузку уменьшается, стремясь к нулю. При этом участок кривой левее точки M не имеет физического смысла в силу условия (1.8) и связи (2.9). Для диаметра кругового отверстия $2a \ge 1$ см значения функции (2.10) практически совпадают со значением ее горизонтальной асимптоты $\hat{P}_c = 1/3$.

Заключение. При фиксированном ЛП исследовано влияние радиуса отверстия на поток свободной энергии через ДВ. Показано, что минимальное значение радиуса отверстия ограничено половиной величины ЛП. При нулевом значении радиуса поток свободной энергии также нулевой. При увеличении радиуса отверстия величина потока стремится к произведению максимальной свободной энергии и ЛП.

Обобщенное условие разрушения позволяет выделить область изменения радиуса отверстия, в которой его влияние на критическое внешнее нагружение существенно, и область, где это влияние незначительно.

Показано, что результаты экспериментов, в которых определялась зависимость критической внешней нагрузки от радиуса отверстия до выхода внешней нагрузки на стационарное значение, позволяют вычислить ЛП данного материала.

ЛИТЕРАТУРА

- Inglis C. E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners // Trans. Roy. Inst. Naval Architects. 1913. V. 55. P. 219–230.
- Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 109–114.
- Griffith A. A. The theory of rupture // Proc. of the 1st Intern. congress for applied mechanics. Delft: Tech. Boekhandel en Drukerij Waltman J. Jr, 1924. P. 55–63.

- Griffith A. A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163–198.
- Irwin G. R., Kies J. A. Critical energy rate analysis of fracture strength // Welding J. Res. Suppl. 1954. V. 33. P. 193–198.
- Irvin G. R. Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control // Engng Fracture Mech. 1968. V. 1. P. 241–257.
- Левин В. А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В. А. Левин, В. М. Морозов, Ю. Г. Матвиенко. М.: Физматлит, 2004.
- 8. Сукнев С. В. Нелокальные и градиентные критерии разрушения квазихрупких материалов при сжатии // Физ. мезомеханика. 2018. Т. 21, № 4. С. 22–32.
- 9. Сукнев С. В. Разрушение хрупкого геоматериала с круговым отверстием при двухосном нагружении // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 6. С. 166–172.
- 10. Сукнев С. В. Применение подхода механики конечных трещин для оценки разрушения квазихрупкого материала с круговым отверстием // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2021. № 3. С. 13–25.
- Taylor D. The theory of critical distances applied to multiscale toughening mechanisms // Engng Fracture Mech. 2019. V. 209. P. 392–403.
- 12. Корнев В. М. Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов // Физ. мезомеханика. 2013. Т. 16, № 5. С. 25–34.
- 13. Кургузов В. Д., Астапов Н. С., Астапов И. С. Модель разрушения квазихрупких структурированных материалов // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 6. С. 173–185.
- 14. Li S., Urat S. An atomistic-to-continuum molecular dynamics: Theory, algorithm, and applications // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2016. V. 306. P. 452–478.
- Holland D., Marder M. Ideal brittle fracture of silicon studied with molecular dynamics // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 746–749.
- Huang K., Shimada T., Ozaki N., et al. A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture // Intern. J. Solids Structures. 2017. V. 128, N 1. P. 67–72.
- Prandtl L., Knauss W. G. A thought model for the fracture of brittle solids // Intern. J. Fracture. 2011. V. 171, N 2. P. 105–109.
- 18. Ентов В. М., Салганик Р. Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 6. С. 87–99.
- Макклинток Ф. Пластические аспекты разрушения // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 3. С. 67–262.
- Glagolev V. V., Markin A. A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // Intern. J. Solids Structures. 2019. V. 158. P. 141–149.
- Berto F., Glagolev V. V., Markin A. A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // Intern. J. Fracture. 2020. V. 224, N 2. P. 277–284.
- 22. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
- Li J., Zhang X. B. A criterion study for non-singular stress concentrations in brittle or quasibrittle materials // Engng Fracture Mech. 2006. V. 73. P. 505–523.

Поступила в редакцию 31/I 2023 г., после доработки — 27/III 2023 г. Принята к публикации 24/IV 2023 г.