

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Л. М. Плешакова, В. Г. Пряжинская (Новосибирск)

Изучается краевая задача в области D ($0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq a$),

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(h \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) \right\} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

$$h(x_1, x_2, 0) = H_0, \quad h(0, x_2, t) = h(x_1, 0, t) = H_1, \quad h(x_1, a, t) = h(a, x_2, t) = H_0 \quad (2)$$

Задача (1), (2) описывает неустановившееся движение грунтовых вод со свободной поверхностью в слое конечной глубины над горизонтальным непроницаемым основанием без учета инфильтрации или испарения со свободной поверхности; через k и m в формуле (1) обозначены коэффициенты фильтрации и водоотдачи грунта, $h(x_1, x_2, t)$ — напор грунтовых вод в точке (x_1, x_2) в момент времени t . Для этой задачи со слабой нелинейностью проведено исследование двух неявных разностных схем.

1-я схема известна как локально-одномерный метод переменных направлений [1], теория его разработана достаточно полно. Для задачи (1), (2) эта схема такова. В каждый момент времени $t_{j+1/2}$, $i = 1, 2$, $j = 0, 1, \dots, K$, $\tau = T/K$, решается уравнение

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_i^*} \right) \quad \left(h_1 = \frac{h}{H_0}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{A}, \quad t_1 = \frac{t}{B}, \quad B = \frac{mA^2}{k \langle h \rangle}, \quad A = 10^3 \right) \quad (3)$$

($\langle h \rangle$ — некоторое среднее значение напора).

В качестве граничных условий используются значения краевых функций в точках пересечения прямых, параллельных оси Ox_i , с границей области интегрирования, а в качестве начальных значений берутся величины, полученные при счете предыдущего слоя. Вторая переменная x_j ($j \neq i$) входит в уравнение в качестве параметра. Решение конечно-разностного аналога уравнения (3) обозначим через $z = z(x_1, x_2, t)$, при этом

$$z(x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, t_j) = z_{i_1 i_2}^j = z_{i_1 i_2 j}$$

Локально-одномерная трехточечная разностная схема второго порядка точности [1] для уравнения (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (z_{i_1 i_2}^{j+1/2} - z_{i_1 i_2}^j) &= \Lambda_1 z_{i_1 i_2}^{j+1/2} \\ \frac{1}{\tau} (z_{i_1 i_2}^{j+1} - z_{i_1 i_2}^{j+1/2}) &= \Lambda_2 z_{i_1 i_2}^{j+1} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Λ_i — оператор, аппроксимирующий исходный дифференциальный оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \rightarrow \Lambda_i z = \frac{z^{+1}_i (z^{+1}_i - z) - z (z - z^{-1}_i)}{h_i^2}, \quad \begin{aligned} x^{\pm mi}_i &= x_i \pm mh_i \\ z^{\pm mi} &= z(x^{\pm mi}_i) \end{aligned}$$

h_i — шаг по пространственной переменной.

2-я схема разработана на основе метода, предложенного в [2] для уравнения теплопроводности. Уравнение (1) приводится к виду

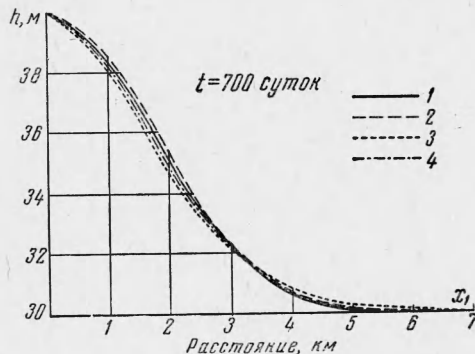
$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = \frac{kh}{m} \left[\frac{\partial^2 h^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial x_2^2} \right] \quad (5)$$

В схеме 2, наряду со значениями аппроксимирующей функции z , на j -м и $(j+1)$ -м слоях по времени, согласно [2], вводится некоторое промежуточное решение $Z_{i_1 i_2}$, $i+1$ задачи (что соответствует введению промежуточного слоя $j+1/2$ в схеме 1). Уравнение (5) заменяется следующей системой конечно-разностных соотношений:

$$\frac{1}{\tau} (Z_{j+1}^{2*} - z_j^2) = \frac{k}{m} z_j (\Delta_{x_1}^2 Z_{j+1}^2 + \Delta_{x_2}^2 z_j) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\tau} (z_{j+1}^2 - Z_{j+1}^{2*}) = \frac{k}{m} Z_j (\Delta_{x_2}^2 z_{j+1}^2 - \Delta_{x_2}^2 z_j^2), \quad \Delta_{x_i}^2 z_j = \frac{z_{i+1, j} - 2z_{i, j} + z_{i-1, j}}{h_i^2}$$

Сходимость и устойчивость соответствующей линейной схемы доказана в [2]. Устойчивость нелинейной схемы (6) проверялась практически.



Фиг. 1

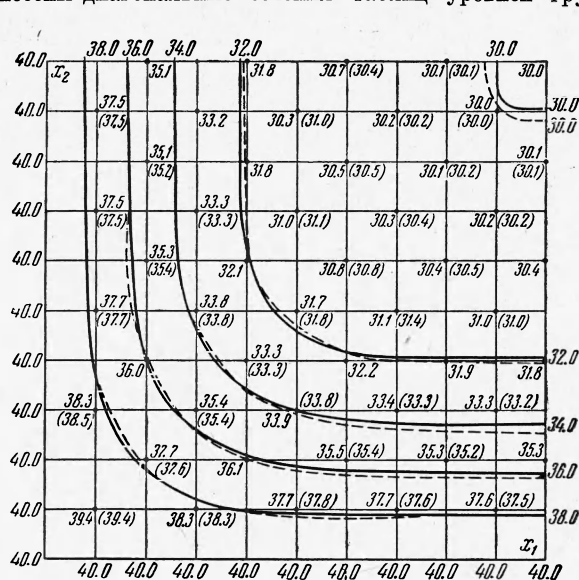
Поведение схем 1 и 2 изучено на линеаризованном уравнении (1) вида

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial X_2^2} \quad (7)$$

для которого известно точное решение [3], при начальных и граничных условиях, заданных в [4], где задача (7), (2) решена в качестве примера по явной разностной схеме при $k = 5 \text{ м/сутки}$, $m = 0.06$, $\langle h \rangle = H_0 = 30 \text{ м}$, $H_1 = 40 \text{ м}$, $\tau = 100 \text{ суток}$, $h_1 = h_2 = 1000 \text{ м}$, $a = 10\,000 \text{ м}$. Точное решение задачи (7), (2) выражается формулой

$$h(x_1, x_2, t) = H_1 - (H_1 - H_0) \Phi(x_1/2a\sqrt{t}) \Phi(x_2/2a\sqrt{t})$$

Здесь Φ — интеграл вероятности. Приведены расчеты по этой формуле, а также по схемам (4) и (6) при указанных начальном и граничных условиях. На фиг. 1 на несены диагональные сечения таблиц уровней грунтовых вод в момент времени



Фиг. 2

$t = 700 \text{ суток}$, при этом для сравнения приведены расчеты по явной схеме [4]; на фиг. 1 кривая 1 — соответствует точному решению, 2 — явной схеме, 3 — второй схеме, 4 — первой схеме. Наиболее близкое совпадение с точным решением дают расчеты по первой схеме. Явный метод можно было бы предпочесть в силу простоты расчетов, однако он имеет, как известно, существенный недостаток, а именно — необходимость сильных ограничений на сетку. В [4], например, $\tau / h_1^2 = 10^{-4}$. Между тем, в задачах рассмотренного типа требуется рассчитывать поведение свободной поверхности грунтового потока за длительные промежутки времени, поэтому ограничение на шаг по времени особенно стеснительно. Неявные методы свободны от этого недостатка и удобны для точки зрения программирования. Обе схемы применимы при условии $h(x_1, x_2, t) \geq c_0 > 0$.

Нелинейные уравнения (4), (6) при начальном и граничных условиях (2) решались итерациями следующего вида. За начальное приближение в коэффициентах выбирались значения функции с предыдущего слоя, и методом прогонки вычислялось первое приближение искомой функции. Значение ее вновь засылалось в коэффициенты, и производилось вычисление второй итерации, и так далее до достижения заданной точности счета.

На фиг. 2 нанесены линии уровней поверхности грунтовых вод, вычисленные по схемам 1 и 2 (сплошной и пунктирной линиями соответственно), выписаны также отметки уровней в отдельных узлах сетки (значения в скобках соответствуют схеме 2).

Расхождения значений вычислений по обеим схемам невелики и убывают со временем. Это обосновывает возможность применения схемы 2, которая при решении задачи (7), (2) оказалась более экономичной в отношении счета.

Поступила 20 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5, стр. 787—811.
2. Douglas J., Rachford H. H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 82, No. 2, p. 421—439.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Госиздат, 1952, гл. 14, § 10.
4. Каменский Г. Н. Методика прогноза изменений режима грунтовых вод. Сб. статей по гидрогеологии. Изд-во АН СССР, 1958, т. 20, стр. 29—55.