

УДК 622.7.01

**СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ
ЗАПАСОВ РАСХОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ ФЛОТАЦИОННОГО ЦИКЛА**

**П. Степанович¹, С. Вуйич¹,
М. Трумич², Ж. Праштало¹, М. Кузманович³**

¹Горный институт, E-mail: slobodan.vujic@ribeograd.ac.rs, г. Белград, Сербия

²Белградский университет, технический факультет, г. Бор, Сербия

³Белградский университет, факультет организационных наук, г. Белград, Сербия

Рассмотрены вопросы баланса между стабильностью горного производства и минимизацией расходов запасов. Приведены основные сведения о стохастической модели запасов, целевая функция ожидаемых затрат и информация о процедуре нахождения оптимального решения. Разработанная модель применяется к нахождению оптимального количества расходных материалов, необходимых для ведения флотационных работ на руднике, где ведется добыча свинца, цинка и меди.

Флотация, запасы, расходные материалы, стохастическая оптимизация

DOI: 10.15372/FTPRI20230314

Материально-технические запасы горных предприятий зависят от применяемой технологии ведения горных работ и технологии переработки (подготовки минерального сырья), от объема и условий производства и от других факторов. При этом для бесперебойной работы необходим достаточный объем расходных материалов. Обычно к расходным материалам относятся взрывчатые вещества и средства взрывания, нефть, смазка, резины, средства защиты, запасные части к оборудованию, флотационные реагенты, мелющие шары и стержни и др. Их использование можно оценить стохастической моделью, в основе которой изменение геологических особенностей и условий в рабочей среде, незапланированные остановки, рыночные воздействия, влияние сезонного спроса на минеральное сырье, метеорологические условия и т. д. [1 – 14].

Для стабильного производственного процесса расходные материалы должны быть в достаточном количестве, чтобы удовлетворить производственные потребности в любой момент времени. Следовательно, чем больше запасы расходных материалов, тем меньше вероятность прерывов или нарушений в производственном процессе. Однако хранение расходных материалов увеличивает эксплуатационные затраты (проценты на наемные средства, затраты на хранение, страхование и т. д.), что приводит к повышению себестоимости добываемого сырья. Возникает закономерный вопрос, как добиться равновесия между стабильностью горного производства и минимизацией расходов, связанных с запасом материально-технических ресурсов [2].

Нужно представлять, какой объем запасов при наименьших затратах обеспечивает стабильность производства рудника, принимая во внимание рыночные условия и возможность поставки расходных материалов. Важно знать, может ли заказанное количество расходных мате-

риалов быть доставлено сразу или это потребует времени. Возможна ситуация, при которой заказанный материал не будет доставлен до того, как будут израсходованы запасы, поэтому необходимо определить, являются ли затраты на экстренные закупки ниже или выше потерь из-за остановок производства [3, 9].

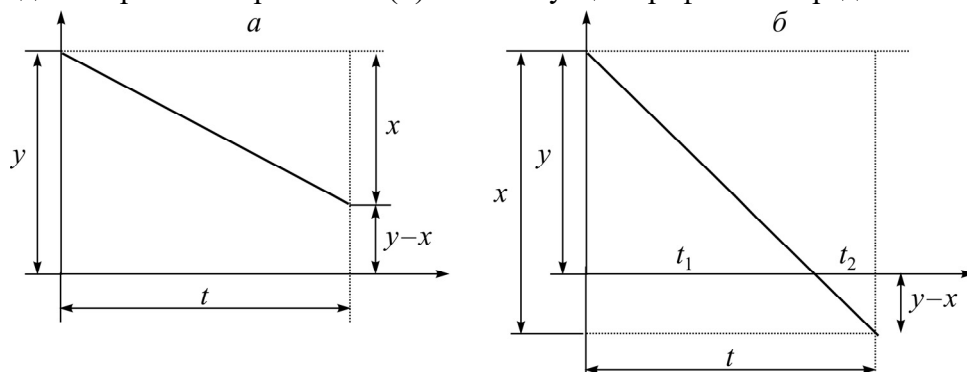
Количественные модели такого класса задач должны структурно содержать целевую функцию и набор ограничений. Критерий целевой функции — минимизация затрат, а ограничения связаны с потреблением, условиями поставки, пополнением запасов, их управлением и т. д. Основными являются затраты на организацию и хранение запасов, на использование расходных материалов в процессе потребления; на расходные материалы, обусловленные характером технологического процесса (постоянное или переменное потребление).

Оптимизация методом динамического программирования — общепризнанный подход к решению проблемы материально-технических запасов, который основан не на строго определенной модели (или ее алгоритме), а подчинен применению адаптированного к характеру решаемой задачи принципа оптимальности Беллмана. Это свойство динамического программирования выявляет необходимость формирования для каждой группы связанных задач соответствующего вида рекуррентных функций [2, 15, 16], которые берут на себя роль алгоритма проведения процедуры оптимизации. В настоящей работе представлена специализированная модель стохастического динамического программирования [17–20].

ОСНОВЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАПАСОВ

Исходные допущения при формировании модели были следующие [2, 3]:

- количество расходных материалов для флотационного цикла зависит от производственной потребности и условий снабжения;
- имеющиеся запасы не всегда могут быть достаточными для процесса флотации в определенный период, в таких ситуациях необходимы срочные закупки;
- из-за стохастического характера производства на руднике, где флотация является частью производственной системы, соотношение между доступными и требуемыми запасами можно записать как: $y \geq x$ — запасов (y) достаточно для покрытия потребления (x); $y < x$ — запасов (y) недостаточно для покрытия потребления (x). Обе ситуации графически представлены на рисунке.



Соотношение запаса и расхода материалов с течением времени: запасов достаточно (а); запасов недостаточно (б)

При ($y \geq x$) соотношение запасов и потребления, согласно [2, 15, 17], можно выразить как

$$\frac{y + (y - x)}{2} = y - \frac{x}{2} . \quad (1)$$

Затраты на средний запас флотационного материала за определенный период составят

$$C_1 \sum_{x=0}^y \left(y - \frac{x}{2} \right) p(x), \quad (2)$$

где C_1 — затраты на хранение единицы материала; $p(x)$ — вероятность расхода.

В случае, когда $(y < x)$, для времени t_1 / t периода t средние запасы составляют $y / 2$, а затраты на запасы можно описать как

$$C_1 \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{y}{2} \frac{t_1}{t} p(x) = C_1 \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{y^2}{2x} p(x). \quad (3)$$

Для времени t_1 / t периода t средний дефицит запасов равен $(x - y) / 2$, затраты на срочные закупки недостающих флотационных материалов равны

$$C_2 \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{x - y}{2} \frac{t_2}{t} p(x) = C_2 \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{(x - y)^2}{2x} p(x), \quad (4)$$

где C_2 — затраты на срочные закупки единицы материала.

На основании подобия треугольников (рисунок) можно установить, что

$$\frac{t_1}{t} = \frac{y}{x} \quad (\text{временной коэффициент запасов от регулярной закупки}), \quad (5)$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{x - y}{x} \quad (\text{временной коэффициент запаса от срочной закупки}). \quad (6)$$

Включив все затраты и объединив уравнения (2)–(4) и соотношения (5), (6), получим функцию ожидаемых затрат, минимальное значение которой необходимо найти:

$$F(y) = C_1 \sum_{x=0}^y \left(y - \frac{x}{2} \right) p(x) + C_1 \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{y^2}{2x} p(x) + C_2 \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(x - y)^2}{x} p(x). \quad (7)$$

Для того чтобы вычислить минимальные ожидаемые затраты на запасы, необходимо определить минимум функции $F(y)$. Оптимальное решение y_0 находится путем формирования функций $F(y-1)$, $F(y+1)$ и установления связи с функцией $F(y)$. Детали математического преобразования в выражение, подходящее для нахождения оптимального решения, известны и представлены в литературе по операционным исследованиям и здесь не приводятся. Оптимальное решение y_0 определяется соотношением

$$G(y_0 - 1) < \frac{C_2}{C_1 + C_2} < G(y_0), \quad (8)$$

а минимальное значение функции ожидаемых затрат равно $F(y_0)$ [2].

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ

Исследования о потреблении материалов при флотации полиметаллических рудников свинца, цинка, меди и серебра проводились на одном из предприятий в Сербии. Рассматривалась оптимизация флотационных запасов расходных материалов, включающих амилксантогенат, этилксантогенат, цианид натрия, бихромат, сульфат железа, сульфат цинка, сульфат меди, гидроксид кальция, масла (шесть видов), графитовую смазку, смазку для осей, Dowfroth 200 (флотационная пена), Ivasol (обезжиривающее и чистящее средство), соляную кислоту и мелющие шары.

Статистический анализ данных показал, что месячные колебания добычи руды составляют до 21.63 %. Расход отдельных материалов, например сульфата меди, равен 22.05 – 58.8 %, что подтверждает гипотезу стохастичности.

Затраты на хранение C_1 и затраты на последующие срочные закупки C_2 выражены в денежных единицах у. е. во избежание недоразумений из-за изменения стоимости и обменных курсов валют и нарушения реального соотношения основных стоимостных параметров.

Рассмотрим часть результатов исследования, характеризующих оптимизацию расходных материалов на флотационных предприятиях. Ниже приводится стандартный расход амилового ксантогената:

Расход за месяц, 10^3 кг	< 1.43	1.43 – 1.75	1.75 – 2.07	2.07 – 2.39	2.39 – 2.71	> 2.71
Вероятность потребления	0	0.208	0.458	0.292	0.042	0
Интервал потребления (x, y)	0	1	2	3	4	5

В табл. 1 представлена оптимизация расхода амилового ксантогената. Для $C_1 = 11.57$ у. е./кг, $C_2 = 57.7$ у. е./кг, $k = C_2 / (C_1 + C_2) = 0.833$, согласно (8) оптимальные ежемесячные запасы амилового ксантогената (y_0) в интервале 2 с вероятностью 66.6 % составят 1 750 – 2 070 кг.

ТАБЛИЦА 1. Оптимизация ежемесячного расхода амилового ксантогената

y	x	$p(x)$	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$\left(y + \frac{1}{2}\right) \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$p(x < y)$	$G(y)$
0	0	0	0	0.545	0.2725	0	0.2725
1	1	0.208	0.208	0.337	0.5055	0.208	0.7135
2	2	0.458	0.229	0.108	0.2700	0.666	0.9360
3	3	0.292	0.097	0.011	0.0385	0.958	0.9965
4	4	0.042	0.011	0	0	1	1
5	5	0	0	0	0	0	0

Действительный расход мелющих шаров на предприятии следующий:

Расход за месяц, 10^3 кг	< 16.25	16.25 – 18.25	18.25 – 20.25	20.25 – 22.25	22.25 – 24.25	24.25 – 26.25	> 26.25
Вероятность потребления	0	0.125	0.333	0.167	0.250	0.125	0
Интервал потребления (x, y)	0	1	2	3	4	5	6

По данным табл. 2 для $C_1 = 3.09$ у. е./кг, $C_2 = 25.87$ у. е./кг, $k = C_2 / (C_1 + C_2) = 0.893$, согласно соотношению (8) оптимальные ежемесячные запасы мелющих шаров (y_0) в интервале 3 с вероятностью 62.5 % составят 20 250 – 22 250 кг.

ТАБЛИЦА 2. Оптимизация ежемесячного расхода мелющих шаров

y	x	$p(x)$	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$\left(y + \frac{1}{2}\right) \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$p(x < y)$	$G(y)$
0	0	0	0	0.4347	0.21735	0	0.21735
1	1	0.125	0.1250	0.3097	0.46455	0.125	0.58955
2	2	0.333	0.1665	0.1432	0.35800	0.458	0.81600
3	3	0.167	0.0557	0.0875	0.30625	0.625	0.93125
4	4	0.250	0.0625	0.0250	0.11250	0.875	0.98750
5	5	0.125	0.0250	0	0	1	1
6	6	0	0	0	0	0	0

Приведем объем ежемесячного расхода гидрата извести:

Расход за месяц, 10^3 кг	< 15	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31	> 31
Вероятность потребления	0	0.0416	0.0416	0.2500	0.2916	0.2083	0.0416	0.0833	0.0420	0
Интервал потребления (x, y)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

При оптимизации расхода гидроксида кальция для $C_1 = 1.05$ у. е./кг, $C_2 = 13.92$ у. е./кг, $k = C_2 / (C_1 + C_2) = 0.93$. Согласно соотношению (8) оптимальные ежемесячные запасы (y_0) в интервале 5 с вероятностью 83.34 % составят 23 000–25 000 кг (табл. 3).

ТАБЛИЦА 3. Оптимизация потребления гидроксида кальция

y	x	$p(x)$	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$\left(y + \frac{1}{2}\right) \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$p(x < y)$	$G(y)$
0	0	0	0	0.2844	0.14220	0	0.14220
1	1	0.0417	0.0417	0.2427	0.36405	0.0417	0.40575
2	2	0.0417	0.0208	0.2219	0.55475	0.0834	0.63825
3	3	0.2500	0.0833	0.1386	0.48510	0.3334	0.81910
4	4	0.2917	0.0729	0.0657	0.29565	0.6251	0.92075
5	5	0.2083	0.0417	0.0240	0.13200	0.8334	0.96540
6	6	0.0417	0.0069	0.0171	0.11115	0.8751	0.98625
7	7	0.0833	0.0119	0.0052	0.03900	0.9580	0.99700
8	8	0.0420	0.0052	0	0	1.0000	1.00000
9	9	0	0	0	0	0	0

Объем расхода сульфата меди в среднем составляет:

Расход за месяц, $\cdot 10^3$ кг	< 17	17–22	22–27	27–32	32–37	37–42	42–47	> 47
Вероятность потребления	0	0.227	0.182	0.136	0.227	0.136	0.091	0
Интервал потребления (x, y)	0	1	2	3	4	5	6	7

Основываясь на данных табл. 4, установлено, что $C_1 = 1.98$ у. е./кг, $C_2 = 22.76$ у. е./кг, $k = C_2 / (C_1 + C_2) = 0.95$. Согласно соотношению (8) оптимальные ежемесячные запасы сульфата меди (y_0) в интервале 4 с вероятностью 77.2 % составят 32 000–37 000 кг.

ТАБЛИЦА 4. Оптимизация расхода сульфата меди

y	x	$p(x)$	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$\left(y + \frac{1}{2}\right) \sum_{x=y+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$p(x < y)$	$G(y)$
0	0	0	0	0.462	0.231	0	0.231
1	1	0.227	0.227	0.235	0.353	0.227	0.580
2	2	0.182	0.091	0.144	0.360	0.409	0.769
3	3	0.136	0.045	0.099	0.346	0.545	0.891
4	4	0.227	0.057	0.042	0.189	0.772	0.961
5	5	0.136	0.027	0.015	0.083	0.908	0.991
6	6	0.092	0.015	0	0	1	1
7	7	0	0	0	0	0	0

ВЫВОДЫ

При использовании оптимальных решений эксплуатационные затраты на запасы амиллового ксантогената снижаются на 13.73 %, мелющих шаров на 15.51 %, гидроксида кальция на 11.59 %, сульфата железа на 10.98 %. Суммарные инвентаризационные затраты на все расходные материалы флотационного передела снижаются на 12.77 %. Данные показатели — достаточный аргумент и ценностное подтверждение важности практического применения стохастического моделирования в управлении запасами материалов флотационного цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Boševski S.** Dynamic models of production and consumption supplies management in non-metallic mineral raw materials exploitation. Doctoral diss., University of Belgrade, Faculty of Mining and Geology, Belgrade, 2010. — 105 p.
2. **Vujić S.** Quantitative models for decision-making support in mining planning and design. Belgrade, Mining Institute, 2023. — 254 p.
3. **Vujić S. and Zdravev S.** Managing supplies of material resources at mines, Proc. Symp. Operational Research, Belgrade, 1993. — P. 291–294.
4. **Vujić S., Miljanovic I., Maksimovic S., Milutinovic A., Benovic T., Hudej M., Dimitrijevic B., Cebasek V., and Gajic G.** Optimal dynamic management of exploitation life of the mining machinery: models with undefined interval, J. Min. Sci., 2010, Vol. 46, No. 4. — P. 425–430.
5. **Vujić S., Miljanovic I., Boshevski S., Kasas K., Milutinovic A., Gojkovic N., Pejovic M. J., Dimitrijevic B., Gajic G., and Cebasek V.** Optimal dynamic management of exploitation life of the mining machinery: models with limited interval, J. Min. Sci., 2010, Vol. 46, No. 5. — P. 554–560.
6. **Gorai A. K. and Chatterjee S.** Optimization techniques and their applications to mine systems, UK, CRC Press, 2022. — 387 p.
7. **Грейз Г. М.** Управление запасами в логистических системах: методические указания по самостоятельной работе. — Челябинск: Южно-уральский государственный университет, 2006. — 50 с.
8. **Ипатьева И. А.** Особенности управления запасами скоропортящегося сырья на производственном предприятии // Российский журнал менеджмента. — 2021. — № 19. — С. 572–591.
9. **Krčevinac S., Čangalović M., Kovačević V., Martić M., and Vujošević V.** Operational research, Belgrade, Faculty of Organizational Sciences, 2004. — 586 p.
10. **Lu X., Kiumarsi B., Chai T., Jiang Y., and Lewis F.** Operational Control of Mineral Grinding Processes Using Adaptive Dynamic Programming and Reference Governor, IEEE Transactions on industrial informatics, 2019, Vol. 15, No. 4. — P. 2210–2221.
11. **Maldonado M., Sbarbaro D., and Lizama E.** Optimal control of a rougher flotation process based on dynamic programming, Min. Eng., 2007, Vol. 20, No 3. — P. 221–232.
12. **Подрезова В. А.** Теоретические подходы к управлению запасами // Общество, экономика, менеджмент. — 2019. — Т. 4. — № 2. — С. 50–53.
13. **Polanecký L. and Lukoszová X.** Inventory management theory: a critical review, Littera Scripta, 2016, Vol. 9, No. 2. — P. 79–89.
14. **Рубальский Г. Б.** Стохастическая теория управления запасами // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 175–186.

15. **Stanojević R.** Introduction to operations research, Belgrade, Institute Industrial Economics, 1970. — 239 p.
16. **Stanojević R.** Application of the raw material supplies model in batch production, Industry, Economic Institute, Belgrade, 1994, Vol. 21, No. 1–2. — P. 41–63.
17. **Stanojević R.** Optimization of raw material supplies in batch production, Industry, Economic Institute, Belgrade, 1995, Vol. 22, No. 4. — P. 181–184.
18. **Stanojević R.** Dynamic programming. Economic Institute, Belgrade, 2004. — 958 p.
19. **Widodo L. E.** A review of soft computing application in mineral resources engineering, IOP Conf. Series: Earth Env. Sci., 2018, Vol. 212. — P. 1–16.
20. **Zhen S.** Determination of inventory for mining production with a real options approach and comparison with other classic methods, Int. J. Min., Reclamation and Environment, Online, 2016. — P. 346–363.

Поступила в редакцию 03/IV 2023

После доработки 16/V 2023

Принята к публикации 18/V 2023