фазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц.— Новосибирск: Наука, 1980.

18. **Суров В. С., Агеев С. Г.** Численное моделирование взаимодействия сферической капли воды с сильной ударной волной // Моделирование в механике/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, ИТПМ.— 1990.— Т. 4(21), № 3.

г. Челябинск *Поступила 5/III 1990 г.,*
г. Новосибирск *в окончательном варианте — 15/I 1992 г.*

УДК 533.6.01

А. Н. Богданов, В. А. Куликовский

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА ОКОЛО ТОНКИХ ТЕЛ

Обычный приближенный метод решения задачи обтекания тела в классической газодинамике основан на том, что тело считается тонким и вводится малый параметр — относительная толщина тела δ [1—6].

Стационарному сверхзвуковому обтеканию тонких тел релаксирующим газом посвящены работы [7, 8], где основной (не возмущенный телом) поток предполагался равновесным, а его параметры — постоянными величинами. Наличие в потоке тонкого тела приводило в том числе и к возникновению слабой неравновесности, которую можно рассматривать как возмущение равновесного состояния.

В настоящей работе изучается обтекание тонких плоских тел и тел вращения стационарным сверхзвуковым потоком колебательно-возбужденного газа, релаксирующего вниз по течению к равновесию. Выделение энергии при релаксации колебательного возбуждения молекул вызывает торможение сверхзвукового потока, что может привести к «тепловому кризису» (нарушению стационарного режима течения) [9]. Во избежание «теплового кризиса» следует ограничить величину начальной относительной неравновесности. Таким образом, в данной задаче в дополнение к δ удается ввести еще один малый параметр — относительную неравновесность ε. Решение задачи представляется в виде асимптотического разложения по имеющимся малым параметрам.

1. Плоское или осесимметричное стационарное течение газа с учетом колебательной релаксации будем описывать системой уравнений

$$(1.1)\qquad \begin{gathered} (\rho u)_x + (\rho v)_y + \nu\rho v/y = 0,\ \rho(uu_x + vu_y) + p_x = 0,\\ \rho(uv_x + vv_y) + p_y = 0,\\ up_x + vp_y - a^2(u\rho_x + v\rho_y) = -\rho(\gamma - 1)(ue_{hx} + ve_{hy}),\\ ue_{hx} + ve_{hy} = \omega(e_h^* - e_h), \end{gathered}$$

где x, y — пространственные координаты; $\nu = 0$ и 1 для плоских и осесимметричных течений; ρ, p и a — плотность, давление и замороженная скорость звука; u, v — проекции скорости газа на оси x, y; γ — показатель адиабаты; ω — обратное время релаксации колебательных степеней свободы; e_h и e_h^* — энергия колебательных степеней свободы и ее равновесное значение; индексы x и y означают дифференцирование по соответствующей индексу координате.

Для величин e_h^* и ω примем соотношения [10]

$$\omega = k_1 p \exp\left(-k_2 T^{-1/3}\right),\quad e_h^* = \theta_h R/(\exp(\theta_h/T) - 1).$$

Здесь T — температура поступательных степеней свободы; θ_h — характеристическая колебательная температура; R — газовая постоянная; k_1, k_2 — положительные постоянные, зависящие от свойств газа. Конкретные значения k_i даны в [10].

Предположим, что основное (не возмущенное телом) течение газа есть одномерный стационарный сверхзвуковой поток в направлении оси x, имеющий при $x = 0$ скорость u_0, плотность ρ_0 и давление p_0. Пусть ось тела совпадает с осью x, а точка $x = 0$ — с носиком тела. Перейдем к безразмерным величинам в системе (1.1), положив

$$\rho = \rho_0 \bar{\rho}, \quad u = u_0 \bar{u}, \quad v = u_0 \bar{v}, \quad p = \gamma p_0 \bar{p},$$
$$e_k = a_0^2 \bar{e}_k, \quad e_k^* = a_0^2 \bar{e}_k^*, \quad \omega = \bar{\omega} u_0 / L, \quad x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}$$

(L — характерная длина тонкого тела). Ниже рассмотрены тела конечной длины, в точке $\bar{x} = 1$ будет располагаться конец тела.

Пусть в сечении $x = 0$ газ имеет заданную неравновесность $\bar{e}_{k0} - \bar{e}_{k0}^* > 0$. При течении газа его параметры изменятся вследствие выделения тепла из-за релаксации колебательных степеней свободы к равновесному состоянию. Для определения параметров основного течения как функций координаты $\bar{x}$ нужно решить систему уравнений, вытекающих из (1.1), если положить

$$\bar{v} = 0, \quad \bar{p}_{\bar{y}} = \bar{\rho}_{\bar{y}} = \bar{u}_{\bar{y}} = \bar{v}_{\bar{y}} = \bar{e}_{k\bar{y}} = 0,$$

что соответствует предположению об основном потоке газа как одномерном течении вдоль оси x. Можно получить (индексом нуль вверху отмечены параметры не возмущенного телом течения)

$$\bar{u}_{\bar{x}}^0 = \frac{\bar{\omega}\left(\bar{e}_k^{*0} - \bar{e}_k^0\right)(\gamma - 1)}{\bar{u}^0\left(\bar{u}^0 M_0^2 (\gamma + 1) - 1 - \gamma M_0^2\right)}. \tag{1.2}$$

Согласно (1.2), в сверхзвуковом $\left(M_0^2 > 1\right)$ потоке колебательно-возбужденного $\left(\bar{e}_k^0 > \bar{e}_k^{*0}\right)$ газа, релаксирующего к равновесию вниз по течению, $\bar{u}^0$ с увеличением $\bar{x}$ убывает от 1 до значения $u_{\min}$, отвечающего корню правой части (1.2). При этом $\bar{p}^0$ и $\bar{\rho}^0$ возрастают соответственно от $1/\gamma$ и 1 до своих максимальных значений, определяемых по найденному из (1.2) значению $\bar{u}^0$. Изменение параметров основного течения сопровождается уменьшением числа Маха M^0, зависящего от $\bar{u}^0$. Определим значение $\bar{u}^0 = \bar{u}^*$, при котором будет выполнено $M^0 = 1$. Имеем

$$M^{02} - 1 = \frac{M_0^2 \bar{u}^{02} \bar{\rho}^0}{\gamma \bar{p}^0} - 1 = \frac{(\gamma + 1) M_0^2 \bar{u}^0 - 1 - \gamma M_0^2}{\gamma M_0^2 - \gamma M_0^2 \bar{u}^0 + 1}, \tag{1.3}$$

откуда видно, что $M^0 = 1$ при $M_0^2 (\gamma + 1) \bar{u}^0 - 1 - \gamma M_0^2 = 0$. Но тогда из (1.2) следует, что $\bar{u}_{\bar{x}}^0 = \infty$, и стационарного решения задачи не существует. Это явление известно как «тепловой кризис» [9]. Соответствующее тепловому кризису значение $\bar{u}^0 = \bar{u}^*$ находится из (1.3):

$$\bar{u}^* = \frac{1 + \gamma M_0^2}{(\gamma + 1) M_0^2}. \tag{1.4}$$

В зависимости от M_0 значение $\bar{u}^*$, определяемое по (1.4), может изменяться от единицы при $M_0 = 1$ до $\gamma/(\gamma + 1) \approx 0{,}58$ при $\gamma = 1{,}4$, если $M_0 \to \infty$. Таким образом, изменение безразмерной скорости во всем поле течения во избежание «теплового кризиса» должно удовлетворять неравенству $0{,}58 \leqslant \bar{u}^* < \bar{u}^0 \leqslant 1$, что позволяет говорить о малости относительного изменения параметров стационарного сверхзвукового одномерного потока колебательно-возбужденного газа. Поскольку эти изменения определяются выделившейся при релаксации энергией, а следовательно, начальной (взятой при $\bar{x} = 0$) неравновесностью газа $\bar{e}_{k0}^* - \bar{e}_{k0}$, естественно ввести малый параметр — относительную начальную неравновесность

$$\varepsilon = \frac{\bar{e}_{k0} - \bar{e}_{k0}^*}{\gamma \bar{e}_{k0}^{*2} \exp\left(\theta_k/T_0\right)\left(\gamma M_0^2 - 1\right) + \left(M_0^2 - 1\right)/(\gamma - 1)} > 0 \tag{1.5}$$

(вид знаменателя дроби определяется удобством дальнейших вычислений).

Будем искать решение в виде асимптотических разложений по ε и δ (δ — обычный в теории тонкого тела малый параметр — отнесенная к характерной длине L толщина тонкого тела):

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 1 + \varepsilon u_{10} + \delta u_{01} + \varepsilon^2 u_{20} + \varepsilon\delta u_{11} + \ldots, \\ \bar{\rho} &= 1 - \varepsilon\rho_{10} + \delta\rho_{01} - \varepsilon^2\rho_{20} - \varepsilon\delta\rho_{11} + \ldots, \\ \bar{p} &= 1/\gamma - \varepsilon p_{10} + \delta p_{01} - \varepsilon^2 p_{20} - \varepsilon\delta p_{11} + \ldots, \\ \bar{v} &= \delta v_{01} - \varepsilon\delta v_{11} + \ldots, \\ \bar{e}_k &= \bar{e}_{k0} + \varepsilon e_{k10} + \delta e_{k01} + \varepsilon^2 e_{k20} + \varepsilon\delta e_{k11} + \ldots \end{aligned} \tag{1.6}$$

Отметим, что опущенные члены вообще нерегулярны (в обычной газовой динамике см. пример в [1]).

Перейдем к нахождению коэффициентов в разложениях (1.6). Для величин порядка ε имеют место соотношения

$$u_{10} = \rho_{10} = p_{10}/M_0^2 = e_{k10}(\gamma - 1)/\left(M_0^2 - 1\right), \tag{1.7}$$

$$u_{10} = \exp(-\sigma\bar{x}) - 1, \quad \sigma = \bar{\omega}_0\left(\frac{\gamma(\gamma-1)\bar{e}_{k0}^{*2}\exp(\theta_k/T_0)\left(\gamma M_0^2 - 1\right)}{M_0^2 - 1} + 1\right).$$

Отношение L/σ в данной задаче представляет собой характерную длину релаксации. Для величин порядка ε^2 соответственно

$$u_{20} = \rho_{20} + u_{10}^2 = p_{20}/M_0^2 = (\gamma-1)/\left(M_0^2 - 1\right)e_{k20} - \frac{1}{2}u_{10}^2\left(M_0^2 - 1\right),$$

$$u_{20} = -(E_1 + 2E_2)\bar{x}\exp(-\sigma\bar{x}) + \frac{1 - \exp(-\sigma\bar{x})}{\sigma}(E_1 + E_2(1 + \exp(-\sigma\bar{x}))).$$

Здесь

$$E_1 = \sigma\left(\gamma M_0^2 + \frac{M_0^2}{M_0^2 - 1} + \frac{k_2}{3T_0^{1/3}}\left(\gamma M_0^2 - 1\right)\right);$$

$$E_2 = \left[M_0^2\sigma + \frac{1}{2}\bar{\omega}_0\left(-1 + \gamma(\gamma-1)\bar{e}_{k0}^{*2}\exp\frac{\theta_k}{T_0}\left(\gamma M_0^2 - {}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.{} - 1\right)^2\left(\gamma\bar{e}_{k0}^{*}\exp\frac{\theta_k}{T_0} - \frac{\theta_k}{2T_0} - 1\right)\right)\right].$$

Далее удобно ввести новую неизвестную функцию Φ так, что

$$v_{01} = -\Phi_{\bar{x}\bar{y}}, \quad u_{01} = -\Phi_{\bar{x}\bar{x}}, \quad \rho_{01} = \Phi_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{\bar{y}^\nu}\left(\Phi_{\bar{y}}\bar{y}^\nu\right)_{\bar{y}},$$

$$p_{01} = M_0^2\Phi_{\bar{x}\bar{x}}, \; e_{k01} = \frac{1}{(\gamma-1)}\left(\left(1 - M_0^2\right)\Phi_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1}{\bar{y}^\nu}\left(\Phi_{\bar{y}}\bar{y}^\nu\right)_{\bar{y}}\right).$$

Уравнение для определения Φ запишем в форме

$$\left(M_0^2 - 1\right)\Phi_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \bar{\omega}_0\left(M_0^2 - 1 + \gamma(\gamma-1)\left(\gamma M_0^2 - 1\right)\bar{e}_{k0}^{*2}\exp\frac{\theta_k}{T_0}\right)\Phi_{\bar{x}\bar{x}} -$$
$$- \frac{\left(\Phi_{\bar{x}\bar{y}}\bar{y}^\nu\right)_{\bar{y}}}{\bar{y}^\nu} - \bar{\omega}_0\left(1 + \gamma(\gamma-1)\bar{e}_{k0}^{*2}\exp\frac{\theta_k}{T_0}\right)\frac{\left(\Phi_{\bar{y}}\bar{y}^\nu\right)_{\bar{y}}}{\bar{y}^\nu} = 0.$$

Как обычно в газовой динамике, здесь удобно перейти к новым независимым переменным ξ, ζ так, что $\xi = \bar{x} - \sqrt{M_0^2 - 1}\,\bar{y}$, $\zeta = \sqrt{M_0^2 - 1}\,\bar{y}$.

Уравнение для Φ примет вид

(1.8)

$$A\Phi_{\xi\xi}+\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)\left[\Phi_{\xi\xi\zeta}+\frac{\left((\Phi_\xi-\Phi_\zeta)_\xi\zeta^\nu\right)_\zeta}{\zeta^\nu}\right]+B\left(\frac{\left((\Phi_\zeta-\Phi_\xi)\,\zeta^\nu\right)_\zeta}{\zeta^\nu}-\Phi_{\xi\zeta}\right)=0,$$

где

$$A=\bar\omega_0\,(\gamma-1)^2\gamma\mathrm{M}_0^2\bar{e}_{k0}^{*2}\exp\frac{\theta_k}{T_0};\quad B=-\bar\omega_0\left(1+\gamma\,(\gamma-1)\,\bar{e}_{k0}^{*2}\exp\frac{\theta_k}{T_0}\right)\left(\mathrm{M}_0^2-1\right).$$

Уравнение типа (1.8) можно решать, используя преобразование Лапласа по переменной ξ [7, 11]. Согласно общим правилам проведения этого преобразования [12], имеем

$$\Phi(\xi,\ \zeta)\to\widetilde\Phi(s,\ \zeta),\ \Phi_\xi(\xi,\ \zeta)\to s\widetilde\Phi(s,\ \zeta)-\Phi(0,\ \zeta),$$
$$\Phi_{\xi\xi}(\xi,\ \zeta)\to s^2\widetilde\Phi(s,\ \zeta)-s\Phi(0,\ \zeta)-\Phi_\xi(0,\ \zeta).$$

Примем, что начальные данные нулевые:

$$\Phi(0,\ \zeta)=\Phi_\xi(0,\ \zeta)=0. \tag{1.9}$$

Принятое условие не означает, что на первой характеристике, идущей от носика тела, возмущений в рассматриваемом приближении нет, так как

$$u_{01}(0,\ \zeta),\ p_{01}(0,\ \zeta)\sim\Phi_{\xi\xi}(0,\ \zeta),\ \text{а}\ v_{01}(0,\ \zeta)\sim\Phi_{\xi\zeta}(0,\ \zeta)-\\-\Phi_{\xi\xi}(0,\ \zeta).$$

В результате вместо (1.8) запишем

$$\zeta\widetilde\Phi_{\zeta\zeta}+(\nu-2\zeta s)\,\widetilde\Phi_\zeta+s\left(-\nu+\frac{As\zeta}{B-\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)s}\right)\widetilde\Phi=0. \tag{1.10}$$

Таким образом, задача свелась к решению обыкновенного дифференциального уравнения (1.10).

2. При рассмотрении обтекания плоского тела в уравнении (1.10) следует положить $\nu=0$, тогда

$$\widetilde\Phi_{\zeta\zeta}-2s\widetilde\Phi_\zeta+\frac{As^2}{B-\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)s}\widetilde\Phi=0. \tag{2.1}$$

Общее решение уравнения (2.1) есть

$$\widetilde\Phi=C_1(s)\exp\,(\lambda_1\zeta)+C_2(s)\exp\,(\lambda_2\zeta),$$

где

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(2s+\sqrt{4s^2-\frac{4As^2}{B-\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)s}}\right);\ \lambda_2=\frac{1}{2}\left(2s-\sqrt{4s^2-\frac{4As^2}{B-\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)s}}\right).$$

Разложим коэффициенты λ_1, λ_2 в ряд по $1/s$ так, что

$$\lambda_1=s\left(1+\frac{A}{2\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)s}+O\,(1/s^2)\right),\quad \lambda_2=s\left(-\frac{A}{2\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)s}+O\,(1/s^2)\right).$$

Введем обозначение

$$\Lambda=\frac{A}{2\left(\mathrm{M}_0^2-1\right)}, \tag{2.2}$$

удобное при проведении дальнейших расчетов, тогда $\lambda_1=s+\Lambda$, $\lambda_2=-\Lambda$.

Интересующее нас решение должно быть ограничено при $\zeta\to\infty$, поэтому надо положить $C_1(s)=0$ (часть решения с $C_1(s)$ соответствует возмущениям, приходящим из бесконечности к поверхности тела, будем считать, что эти возмущения здесь отсутствуют). Таким образом,

$$\tilde{\Phi} = C_2(s)\exp(-\Lambda\zeta). \tag{2.3}$$

Константу интегрирования C_2 следует определить из граничного условия на поверхности тонкого тела.

Перейдем к обращению преобразования Лапласа функции $\tilde{\Phi}$, заданной формулой (2.3). Пусть $C_2(s)$ имеет оригиналом некоторую функцию $f_1(\xi)$. Тогда, возвращаясь к переменным $\bar{x}$ и $\bar{y}$, находим

$$\Phi = f_1\left(\bar{x} - \sqrt{M_0^2 - 1}\,\bar{y}\right)\exp\left(-\Lambda\sqrt{M_0^2 - 1}\,\bar{y}\right). \tag{2.4}$$

Граничное условие есть условие непротекания через поверхность тонкого тела (при $\bar{y} = 0$). Пусть тело имеет образующую $\bar{y} = \delta Y(\bar{x})$, тогда $\bar{v} = \bar{u}\delta Y(\bar{x})$ и, следовательно, в первом приближении по δ

$$v_{01} = Y_{\bar{x}}. \tag{2.5}$$

С другой стороны,

$$v_{01} = -\Phi_{\bar{x}\bar{y}}. \tag{2.6}$$

При $\bar{y} \to 0$ имеем по (2.4)

$$\Phi_{\bar{x}\bar{y}} = -\sqrt{M_0^2 - 1}\left(f_1''(\bar{x}) + \Lambda f_1'(\bar{x})\right)$$

(штрих означает дифференцирование функции по ее аргументу). Исключая v_{01} из (2.5), (2.6), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для f_1:

$$f_1''(\bar{x}) + \Lambda f_1'(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}}\,Y_{\bar{x}}. \tag{2.7}$$

В дальнейшем для определения силы сопротивления тонкого тела нам понадобится $f_1''(\bar{x})$, поэтому уравнение (2.7) будем считать дифференциальным уравнением первого порядка относительно f_1'. Его решение есть

$$f_1'(\bar{x}) = \exp(-\Lambda\bar{x})\left(f_1'(0) + \int_0^{\bar{x}} \exp(\Lambda\eta)\frac{Y_\eta}{\sqrt{M_0^2 - 1}}\,d\eta\right),$$

откуда

$$f_1''(\bar{x}) = \frac{Y_{\bar{x}}}{\sqrt{M_0^2 - 1}} - \Lambda\exp(-\Lambda\bar{x})\left(f_1'(0) + \int_0^{\bar{x}} \exp(\Lambda\eta)\frac{Y_\eta}{\sqrt{M_0^2 - 1}}\,d\eta\right), \tag{2.8}$$

Для определения вида решения нужно еще задать $f_1'(0)$. Рассмотрим условия в набегающем на тело потоке. На акустической характеристике, отходящей от носика тела (т. е. при $\xi = 0$), должны выполняться соотношения на слабой ударной волне [13]

$$\sqrt{M_0^2 - 1}\,\delta u_{01} = -\delta v_{01},\ \delta p_{01} = -M_0^2\delta u_{01},\quad \delta p_{01} = \delta\rho_{01},\ \delta e_{k01} = 0.$$

Для функции Φ они имеют вид

$$\sqrt{M_0^2 - 1}\,\Phi_{\bar{x}\bar{x}} = -\Phi_{\bar{x}\bar{y}},\ (M_0^2 - 1)\Phi_{\bar{x}\bar{x}} = \Phi_{\bar{y}\bar{y}}. \tag{2.9}$$

Вычислим производные от Φ согласно (2.4) и получим соответствующие (2.9) условия для f_1:

$$f_1'(0) = 0,\quad 2f_1'(0) + \Lambda f_1(0) = 0,$$

что согласуется с (1.9) ($\Phi_\xi(0, \zeta) = 0$) и оправдывает это предположение. Выражение для $f_1''(\bar{x})$ теперь очевидным образом упрощается.

Безразмерная сила сопротивления на единицу размаха профиля определяется следующим образом:

$$\overline{D}_s = \frac{D_s}{\rho_0 u_0^2 L} = \int_0^L \frac{p - p_0}{\rho_0 u_0^2 L}\, dy = \frac{\delta}{\gamma M_0^2} \int_0^1 (\gamma\overline{p} - 1)\, Y_{\overline{x}}\, d\overline{x},$$

причем $\gamma\overline{p} - 1 = \varepsilon\gamma p_{10} + \delta\gamma p_{01} = -\varepsilon\gamma M_0^2 u_{10} + \gamma M_0^2 \delta \Phi_{\overline{x}\overline{x}} = -\varepsilon\gamma M_0^2 u_{10} + \gamma M_0^2 \delta f_1''$.

Подставляя вместо $f_1''(x)$ выражение (2.8), имеем

(2.10)

$$\overline{D}_s = -\varepsilon\delta \int_0^1 u_{10}(\overline{x})\, Y_{\overline{x}}\, d\overline{x} + \frac{\delta^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^1 Y_{\overline{x}} \left[Y_{\overline{x}} - \Lambda \int_0^{\overline{x}} \exp(\Lambda(\eta - \overline{x}))\, Y_\eta\, d\eta \right] d\overline{x}.$$

Формула (2.10) позволяет рассчитать сопротивление тонкого плоского остроконечного тела, помещенного в стационарный сверхзвуковой поток колебательно-возбужденного газа.

В отсутствие релаксации ($\omega_0 \to 0$) (2.10) дает

$$\overline{D}_{s0} = \frac{\delta^2}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \int_0^1 (Y_{\overline{x}})^2\, d\overline{x} \tag{2.11}$$

— известный в газовой динамике результат [9].

Для конечного тела ($Y(1) = 0$) первый член формулы (2.10) отрицателен, поскольку

$$-\int_0^1 u_{10}(\overline{x})\, Y_{\overline{x}}\, d\overline{x} = -u_{10}(1)\, Y(1) + \int_0^1 Y(\overline{x})\, u_{10\overline{x}}\, d\overline{x} = \int_0^1 Y(\overline{x})\, u_{10\overline{x}}\, d\overline{x} < 0.$$

Порядок этого члена $\varepsilon\delta$, и при достаточно малых δ он превосходит остальные по абсолютной величине. В этом случае тонкое тело будет испытывать тягу. Приравнивая D_s нулю, получим максимальное значение $\delta_{\max}$ такое, что тело испытывает тягу при $\delta < \delta_{\max}$:

$$\delta_{\max} = \frac{\varepsilon \sqrt{M_0^2 - 1} \int_0^1 u_{10}(\overline{x})\, Y_{\overline{x}}\, d\overline{x}}{\int_0^1 \left[(Y_{\overline{x}})^2 - \Lambda Y_{\overline{x}} \int_0^{\overline{x}} \exp(\Lambda(\eta - \overline{x}))\, Y_\eta\, d\eta \right] d\overline{x}}. \tag{2.12}$$

Согласно (2.12), $\delta_{\max} \sim \varepsilon$. Поскольку коэффициенты σ и Λ, заданные формулами (1.7), (2.2), практически не зависят от M_0 при $M_0 > 3$, а ε, как следует из (1.5), при таких значениях M_0 пропорционально $1/M_0^2$, то $\delta_{\max} \sim 1/M_0$.

Проведем расчеты силы сопротивления $\overline{D}_s$, используя имеющиеся в [10] сведения о физических свойствах газов. Зададим форму тела: $Y = 2(1 - \overline{x})\overline{x}$, примем значение $\delta = 0{,}1$. Результаты расчетов для молекулярного азота и окиси углерода соответственно сведены в табл. 1 и 2, где D_1 вычислен по формуле (2.11), D_2 и D_3 — по формуле (2.10) (первый при $\varepsilon = 0$), при этом значения D_i умножаются на 10^{-2}. При расчетах предполагалось, что $M_0 = 2$.

3. В случае осесимметричного течения в уравнении (1.10) следует положить $\nu = 1$, тогда

$$\widetilde{\Phi}_{\zeta\zeta} + \left(\frac{1}{\zeta} - 2s\right)\widetilde{\Phi}_\zeta + s\left(-\frac{1}{\zeta} + \frac{As}{B - (M_0^2 - 1)s}\right)\widetilde{\Phi} = 0.$$

Таблица 1

T_k, K	p, Па	T, K	D_1	D_2	D_3	ε	$\overline{\omega}_0$	Λ
2000	101320	300	0,77	0,77	0,72	0,24	0,067	0,00001
2000	101320	1000	0,77	0,061	0,061	0,052	1914,0	60,0
3000	101320	430	0,77	0,77	—0,21	0,35	2,3	0,004

Таблица 2

T_k, K	p, Па	T, K	D_1	D_2	D_3	ε	$\overline{\omega}_0$	Λ
2000	101320	300	0,77	0,77	0,47	0,27	16,0	0,004
2000	10132	1000	0,77	0,079	0,079	0,054	4834,0	176,0
2000	101320	250	0,77	0,77	—0,11	0,32	3,3	0,0002

Вместо $\widetilde{\Phi}$ введем новую неизвестную функцию $z(s, \zeta)$:

$$\widetilde{\Phi}(s, \zeta) = z(s, \zeta) \exp(s\zeta),$$

а вместо уравнения для $\widetilde{\Phi}$ получим уравнение для z:

$$z_{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta} z_\zeta - s^2 \left(1 + \frac{A}{B - (M_0^2 - 1) s}\right) z = 0.$$

Заменой

$$z = \frac{\widehat{z}}{s\sqrt{1 - \dfrac{A}{B - (M_0^2 - 1) s}}}, \quad \zeta = \frac{\widehat{\zeta}}{s\sqrt{1 - \dfrac{A}{B - (M_0^2 - 1) s}}}$$

оно сводится к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\widehat{z}_{\widehat{\zeta}\widehat{\zeta}} + \frac{1}{\widehat{\zeta}} \widehat{z}_{\widehat{\zeta}} - \widehat{z} = 0. \tag{3.1}$$

Общее решение уравнения (3.1) выражается через модифицированные функции Бесселя нулевого порядка [14] K_0, I_0:

$$\widehat{z} = C_3(s) K_0(\widehat{\zeta}) + C_4(s) I_0(\widehat{\zeta}).$$

Интересующее нас решение должно быть ограничено при $\widehat{\zeta} \to \infty$, следовательно, нужно положить $C_4(s) = 0$. Возвращаясь к переменной ζ и функции $\widetilde{\Phi}$, получим

$$\widetilde{\Phi} = C_3(s) \frac{K_0\left(s\sqrt{1 - \dfrac{A}{B - (M_0^2 - 1) s}}\,\zeta\right)}{s\sqrt{1 - \dfrac{A}{B - (M_0^2 - 1) s}}} \exp(s\zeta).$$

Наша цель — определение сопротивления тонкого тела, поэтому рассмотрим поведение решения при малых $\widehat{\zeta}$. Известно [14], что

$$K_0(\eta) \sim -\ln(\eta/2), \ I_0(\eta) \sim 1, \ \eta \to 0. \tag{3.2}$$

Разложим выражение под знаком квадратного корня по степеням $1/s$, учтем асимптотику (3.2), представление показательной функции рядом $\exp(s\zeta) = 1 + s\zeta + \ldots$ и затем при $\zeta \to 0$ получим

$$\widetilde{\Phi} = -C_3(s) \frac{\ln\left(\dfrac{s + \Lambda}{2}\zeta\right)}{s + \Lambda}.$$

Перейдем к обращению преобразования Лапласа функции $\tilde{\Phi}$. Оригиналом для выражения $\frac{-1}{s+\Lambda}\ln\left(\frac{s+\Lambda}{2}\zeta\right)$ служит комбинация функций [12] $\exp(-\Lambda\xi)\ln\frac{2\xi}{\zeta}$. Пусть C_3 имеет оригиналом некоторую функцию $f_2(\xi)$, тогда (по правилу умножения изображений [12]) запишем

$$\Phi = \int_0^{\xi} f_2(\eta)\exp(-\Lambda(\xi-\eta))\ln\frac{2(\xi-\eta)}{\zeta}\,d\eta. \tag{3.3}$$

Функцию f_2 следует определить из граничного условия — условия непротекания газа через поверхность тонкого тела. Пусть образующая тела есть $\bar{y} = \delta Y(\bar{x})$, тогда касание линии тока с поверхностью означает выполнение равенства $\bar{v} = \bar{u}\delta Y_{\bar{x}}$, откуда опять получается (2.5). С другой стороны, выполняется (2.6). Исключая v_{01}, найдем

$$\Phi_{\bar{x}\bar{y}} = -Y_{\bar{x}}. \tag{3.4}$$

Подынтегральное выражение (3.3) имеет особенность при $\eta = \xi$, поэтому непосредственное его дифференцирование невозможно. Эту трудность можно обойти введением новой переменной интегрирования $t = \xi - \eta$, тогда $t \in (0, \xi)$, $\eta = \xi - t$, $dt = -d\eta$. Вместо (3.3) будет

$$\Phi = \int_0^{\xi} f_2(\xi - t)\exp(-\Lambda t)\ln\frac{2t}{\zeta}\,dt.$$

Учитывая, что при $\bar{y}\to 0$ $\xi\to\bar{x}$, получим

$$\Phi_{\bar{x}} = \left[f_2(0)\exp(-\Lambda\bar{x}) + \int_0^{\bar{x}} f_2'(\bar{x}-t)\exp(-\Lambda t)\,dt\right]\ln\frac{2}{\sqrt{M_0^2-1}\,\bar{y}} +$$

$$+ f_2(0)\exp(-\Lambda\bar{x})\ln\bar{x} + \int_0^{\bar{x}} f_2'(\bar{x}-t)\exp(-\Lambda t)\ln t\,dt$$

(штрихом обозначены производные функции по ее аргументу). Значение $f_2(0)$ нужно задать в соответствии с граничными условиями. Соотношения на слабой ударной волне [13] теперь не выполняются, что связано с использованием при получении решения задачи приближения $\bar{y} \ll 1$ (обычного при определении параметров ближнего поля течения [2]). По (3.4) на поверхности тонкого тела ($\bar{y} = \delta Y(\bar{x})$) находим

$$Y_{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{y}}\left[f_2(0)\exp(-\Lambda\bar{x}) + \int_0^{\bar{x}} f_2'(\bar{x}-t)\exp(-\Lambda t)\,dt\right]. \tag{3.5}$$

Очевидно, что $f_2(0) = 0$ при $Y(0) = 0$, $Y_{\bar{x}}(0) \neq \infty$, т. е. если в точке $\bar{x} = 0$ расположен носик тела, не имеющий затупления. Таким образом, сделанное ранее предположение (1.9) $\Phi_{\xi}(0, \zeta) = 0$ оправдано, и можно считать

$$\Phi_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{1}{\bar{y}}\int_0^{\bar{x}} f_2'(\eta)\exp(-\Lambda(\bar{x}-\eta))\,d\eta.$$

Тогда, согласно (3.5), имеем

$$Y_{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{y}}\int_0^{\bar{x}} f_2'(\eta)\exp(-\Lambda(\bar{x}-\eta))\,d\eta. \tag{3.6}$$

Введем вместо функции $Y = Y(\bar{x})$ площадь поперечного сечения тонкого тела $S(\bar{x}) = \pi Y^2$. Заметим, что $S'(0) = 2\pi Y(0) Y_{\bar{x}}(0) = 0$, так как $Y(0) = 0$, а $Y_{\bar{x}}(0) \neq \infty$.

Соотношение (3.6) позволяет определить (при $\bar{y} = \delta Y(\bar{x})$)

$$f_2'(\bar{x}) = \frac{\delta}{2\pi}\left(S'(\bar{x})\exp(\Lambda\bar{x})\right)_{\bar{x}} \exp(-\Lambda\bar{x}),$$

тогда

$$\Phi_{\bar{x}} = \frac{\delta}{2\pi}\left(S'(\bar{x})\ln\frac{2}{\sqrt{M_0^2-1}\bar{y}} + \int\limits_0^{\bar{x}}\left(S'(\eta)\exp(\Lambda(\eta-\bar{x}))\right)_\eta \ln(\bar{x}-\eta)\,d\eta\right).$$

Сила сопротивления тонкого тела вращения находится по формуле

$$\bar{D}_s = \frac{D_s}{\rho_0 u_0^2 L^2} = \delta^2\int\limits_0^1 \frac{p-p_0}{\rho_0 u_0^2}\,dS = \delta^2\int\limits_0^1 \frac{\gamma\bar{p}-1}{\gamma M_0^2}\,dS, \tag{3.7}$$

$$\gamma\bar{p} - 1 = -\varepsilon\gamma p_{10} + \delta\gamma p_{01} - \varepsilon^2\gamma p_{20}.$$

При дальнейших вычислениях, однако, следует использовать соотношения вида

$$M_0^2\left(\delta u_{01} + \frac{1}{2}(\delta v_{01})^2\right) + \delta p_{01} = 0.$$

Действительно,

$$u_{01} = -\Phi_{\bar{x}\bar{x}},\quad v_{01} = -\Phi_{\bar{x}\bar{y}}.$$

В свою очередь при $\bar{y} \to 0$ выполняются равенства

$$\Phi_{\bar{x}\bar{x}} = \delta\ln\frac{2}{\sqrt{M_0^2-1}\,\bar{y}}\,\frac{S''(\bar{x})}{2\pi},\quad \Phi_{\bar{x}\bar{y}} = -\frac{\delta}{\bar{y}}\,\frac{S'(\bar{x})}{2\pi}.$$

На поверхности тонкого тела вращения $\bar{y} = \delta Y(\bar{x}) = O(\delta)$, поэтому у $\Phi_{\bar{x}\bar{y}}$ порядок $O(1)$, у $\Phi_{\bar{x}\bar{x}}$ — порядок $O(\delta\ln\delta)$. Следовательно, для значений δ, имеющих практическое применение (например, $\delta = 0{,}1$), величина $(\delta v_{01})^2$ порядка $O(\delta^2)$ и так же важна, как δu_{01} порядка $O(\delta^2\ln\delta)$.

Для силы сопротивления тонкого тела по формуле (3.7) получим

$$\bar{D}_s = -\delta^2\int\limits_0^1(\varepsilon u_{10} + \varepsilon^2 u_{20})S'(\bar{x})\,d\bar{x} + \frac{\delta^4}{2\pi}\int\limits_0^1\Bigg[S''(\bar{x})\ln\frac{2}{\sqrt{M_0^2-1}\delta Y} +$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}}\left(S'(\eta)\exp(\Lambda(\eta-\bar{x}))\right)_\eta\ln(\bar{x}-\eta)\,d\eta\right)_{\bar{x}} - \pi(Y_{\bar{x}})^2\Bigg]S'(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Здесь удобно провести следующие преобразования:

$$\int\limits_0^1 S'(\bar{x})S''(\bar{x})\ln\frac{2}{\sqrt{M_0^2-1}\delta Y}\,d\bar{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{\sqrt{M_0^2-1}\delta Y(1)}(S'(1))^2 +$$
$$+\pi\int\limits_0^1 S'(\bar{x})(Y_{\bar{x}})^2\,d\bar{x}.$$

Это выражение существенно упрощается, если $S'(1) = 0$, что имеет место при $Y(1) = 0$ (контур тела замыкается в кормовой части) либо при $Y_{\bar{x}}(1) = 0$ (наклон образующей контура в кормовой части равен нулю). Примем, что для выбранного нами тела условие $S'(1) = 0$ выполняется. После преобразования вида

$$\int_0^1 S'(\bar{x})\left(\int_0^{\bar{x}} (S'(\eta)\exp(\Lambda(\eta-\bar{x})))_\eta \ln(\bar{x}-\eta)\,d\eta\right)_{\bar{x}} d\bar{x} =$$

$$= -\int_0^1 S''(\bar{x})\int_0^{\bar{x}} (S'(\eta)\exp(\Lambda(\eta-\bar{x})))_\eta \ln(\bar{x}-\eta)\,d\eta d\bar{x}$$

формула для определения силы сопротивления тонкого тела примет вид

$$\bar{D}_s = -\delta^2\int_0^1 (\varepsilon u_{10}+\varepsilon^2 u_{20}+O(\varepsilon^3))\,S'(\bar{x})\,d\bar{x} - \tag{3.8}$$

$$-\frac{\delta^4}{2\pi}\int_0^1\left[S''(\bar{x})\int_0^{\bar{x}} (S'(\eta)\exp(\Lambda(\eta-\bar{x})))_\eta \ln(\bar{x}-\eta)\,d\eta + O(\varepsilon)\right]d\bar{x} + O(\delta^6).$$

При $\delta = o(\sqrt{\varepsilon})$ главный член в (3.8) есть

$$\bar{D}_s = -\varepsilon\delta^2\int_0^1 u_{10}(\bar{x})\,S'(\bar{x})\,d\bar{x}.$$

При $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ главный член в (3.8) запишем как

$$\bar{D}_s = -\delta^2\int_0^1\left(\varepsilon u_{10}S'(\bar{x})+\delta^2\frac{S''(\bar{x})}{2\pi}\int_0^{\bar{x}} (S'(\eta)\exp(\Lambda(\eta-\bar{x})))_\eta \ln(\bar{x}-\eta)d\eta\right)d\bar{x}.$$

При $\varepsilon = o(\delta^2)$ главным в (3.8) является второе слагаемое.

В отсутствие релаксации ($\omega_0 \to 0$) формула (3.8) переходит в формулу Кармана — Мура [3, 5]

$$\bar{D}_{s0} = -\frac{\delta^4}{2\pi}\int_0^1 S''(\bar{x})\int_0^{\bar{x}} S''(\eta)\ln(\bar{x}-\eta)\,d\eta d\bar{x}. \tag{3.9}$$

Как и в случае обтекания плоского тонкого тела, для достаточно малых δ первый член в (3.8) превосходит остальные по абсолютной величине. Можно показать, что

$$-\int_0^1 u_{10}S'(\bar{x})\,d\bar{x} = -u_{10}(1)\,S'(1) + \int_0^1 u_{10\bar{x}}S'(\bar{x})\,d\bar{x} = \int_0^1 u_{10\bar{x}}S'(\bar{x})\,d\bar{x} < 0.$$

Следовательно, есть такое значение $\delta_{\max}$, когда тонкое тело вращения для всех $\delta < \delta_{\max}$ будет испытывать тягу, а при $\delta > \delta_{\max}$ — сопротивление. Значение $\delta_{\max}$ определяется из условия $\bar{D}_s = 0$:

$$\delta^2_{\max} = \frac{2\pi\int_0^1 (\varepsilon u_{10}+\varepsilon^2 u_{20})\,S'(\bar{x})\,d\bar{x}}{\int_0^1 S''(\bar{x})\int_0^{\bar{x}} (S'(\eta)\exp(\Lambda(\eta-\bar{x})))_\eta \ln(\bar{x}-\eta)\,d\eta d\bar{x}}.$$

Коэффициенты σ и Λ, найденные из формул (1.7), (2.2), можно считать не зависящими от M_0 при $M_0 > 3$. Согласно (1.5), при таких значениях M_0 ε пропорционально $1/M_0^2$. Следовательно, величина $\delta_{\max}$ ведет себя как $1/M_0$.

Вычислим величины $\bar{D}_s$ для некоторого тела вращения, задав значения параметров течения и константы, характеризующие физические свой-

Таблица 3

T_k, K	p, Па	T, K	D_1	D_2	D_3	ε	$\overline{\omega}_0$	Λ
2000	101320	300	0,41	0,41	0,34	0,24	0,067	0,00001
2000	101320	1000	0,41	0,023	0,023	0,052	1914,0	60,0
3000	101320	430	0,41	0,41	—0,78	0,35	2,3	0,004

Таблица 4

T_k, K	p, Па	T, K	D_1	D_2	D_3	ε	$\overline{\omega}_0$	Λ
2000	101320	300	0,41	0,41	0,23	0,27	16,0	0,004
2000	10132	1000	0,41	0,003	0,003	0,054	4834,0	176,0
2000	101320	250	0,41	0,41	—0,62	0,32	3,3	0,0002

ства газа [10]. Пусть образующая тела задается, как и в плоском случае, формулой $Y = 2\overline{x}(1-\overline{x})$, $\delta = 0{,}1$.

Результаты расчетов для молекулярного азота и окиси углерода соответственно сведены в табл. 3 и 4, где D_1 вычислен по формуле (3.9), D_2 и D_3 — по формуле (3.8) (первый при $\varepsilon = 0$), при этом значения D_i умножаются на 10^{-3}. При расчетах предполагалось $M_0 = 2$.

Полученные в рамках линейной теории результаты показывают, что колебательная релаксация может существенно влиять на сопротивление тонкого тела при сверхзвуковом стационарном обтекании. В невозбужденном колебательно-релаксирующем газе возмущения давления, производимые тонким телом, затухают, что приводит к более низкому, чем в равновесном случае, давлению у головной части тела и более высокому давлению у кормовой части тела. В создавшемся поле давления тонкое тело имеет меньшее сопротивление. В колебательно-возбужденном газе релаксация возбуждения молекул газа ведет к возрастанию давления вниз по потоку, что приводит к возникновению силы Архимеда, направленной навстречу набегающему потоку. Эта сила также может снижать сопротивление и создавать тягу.

Авторы выражают благодарность В. А. Левину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коул Дж.** Методы возмущений в прикладной математике.— М.: Мир, 1972.
2. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
3. **Липман Г. В., Рошко А.** Элементы газовой динамики.— М.: ИЛ, 1960.
4. **Франкль Ф. И., Карпович Е. А.** Газодинамика тонких тел.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
5. **Общая** теория аэродинамики больших скоростей/Под ред. У. Р. Сирса.— М.: Воениздат, 1962.
6. **Теория** оптимальных аэродинамических форм/Под ред. А. Миеле.— М.: Мир, 1969.
7. **Ткаленко Р. А.** Сверхзвуковое неравновесное течение газа около тонких тел вращения // ПМТФ.— 1964.— № 2.
8. **Ходыко Ю. В.** Обтекание тонкого конуса вращения релаксирующим газом // ДАН БССР.— 1964.— Т. 8, № 8.
9. **Черный Г. Г.** Газовая динамика.— М.: Наука, 1988.
10. **Неравновесные** физико-химические процессы в аэродинамике/Под ред. Г. И. Майкапара.— М.: Машиностроение, 1972.
11. **Clarke J. F.** The linearized flow of a dissociating gas // J. Fluid Mech.— 1960.— V. 7.— P. 4.
12. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования.— М.: Наука, 1971.
13. **Богданов А. Н., Куликовский В. А.** Распространение нестационарных слабых ударных волн в колебательно-неравновесном газе, подверженном действию внешнего излучения // ПМТФ.— 1990.— № 5.
14. **Справочник** по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.

г. Москва

Поступила 29/IV 1991 г., в окончательном варианте — 10/IX 1991 г.