УДК 539.375

АНАЛИЗ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ПО ДЛИНЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ ТЕЛЕ ПРИ ВОЗМОЖНОМ КОНТАКТЕ БЕРЕГОВ

Е. В. Ворушин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: vtorushin@ngs.ru

Рассматривается однородное двумерное тело, содержащее трещину, длина которой может меняться. На берегах трещины задаются условия в виде неравенств, описывающих взаимное непроникание берегов. Проводится анализ формулы производной функционала упругой энергии по длине криволинейной трещины. Доказана независимость производной от пути трещины при условии достаточной гладкости кривой, по которой трещина развивается.

Ключевые слова: производная функционала энергии, непроникание, вариационное неравенство, критерий Гриффитса.

Введение. В данной работе рассматриваются некоторые математические вопросы теории трещин [1], в частности их распространение в упругих телах. В этой теории важную роль играет критерий Гриффитса, согласно которому трещина начинает развиваться, если производная функционала упругой энергии по длине трещины достигает критической величины $2\gamma_0$. Эта величина является материальной характеристикой среды. Производная функционала энергии берется вдоль пути распространения трещины. Изучена зависимость производной от этого пути, что является важным для понимания критерия Гриффитса.

Задача о равновесии твердого тела исследуется в рамках двумерной теории упругости [1]. Тело содержит трещину. На берегах трещины задаются условия непроникания в виде системы равенств и неравенств. На внешней границе задаются однородные условия Дирихле.

В настоящее время существует большое количество работ, в которых изучалась зависимость решений эллиптических уравнений от параметров для различных возмущений областей. Случай гладких областей рассмотрен в [2]. Результаты, относящиеся к дифференцированию функционалов энергии для линейных краевых задач в негладких областях, приведены в [3, 4].

Впервые производная функционала энергии для нелинейных эллиптических задач с условиями на границе в виде неравенств получена в [5]. Метод получения производной, описанный в [5], позволяет избежать вычисления краевых условий для материальной производной от решения, которая, вообще говоря, определяется неоднозначно. Позднее были получены аналогичные формулы для производных в различных задачах теории упругости [6–9] с использованием вариационных формулировок [10]. При этом предполагалось,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00209).

что трещины являются прямолинейными, либо на возмущение области накладывались дополнительные условия, при которых множество допустимых смещений точек тела для невозмущенной задачи переходит во множество допустимых смещений точек тела для возмущенной задачи равновесия.

С помощью полученных формул выведены инвариантные интегралы типа интегралов Черепанова — Райса [1]. Такой интеграл определяет скорость высвобождения энергии при квазистатическом росте трещины и используется в механике разрушения при моделировании роста трещины.

В работе [11] показано, что производная функционала энергии вдоль криволинейного пути трещины в упругом двумерном изотропном теле не зависит от формы этого пути, если кривая, описывающая этот путь, достаточно гладкая. При этом на трещине ставились линейные краевые условия.

В работе [12] получена формула для производной функционала энергии вдоль криволинейного пути в задаче двумерной теории упругости. На берегах трещины задавались нелинейные краевые условия в виде равенств и неравенств. При этом существенную трудность представляло построение взаимно однозначного отображения между множествами допустимых смещений в возмущенной и невозмущенной задачах.

Последние результаты, относящиеся к анализу распространения криволинейных трещин в упругих телах с учетом условий непроникания, приведены в [13].

Возмущение задачи о равновесии упругого тела, содержащего трещину, при условиях возможного контакта берегов. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. Обозначим через Σ множество $[-1, 0] \times \{0\}$ и рассмотрим график Γ^δ функции $x_2 = \psi(x_1)$, $x_1 \in (0, \delta)$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, $\delta \geqslant 0$. Обозначим $\Gamma_\delta = \Sigma \cup \Gamma^\delta$, предполагая, что $\bar{\Gamma}_\delta \subset \Omega$ для малого варьируемого δ. В частности, при $\delta = 0$ имеем $\Gamma_0 = \Sigma$. Предполагается, что функция ψ достаточно гладкая. Принадлежность этой функции к конкретному классу обсуждается ниже. Введем в рассмотрение область Ω_δ с разрезом (трещиной) $\bar{\Gamma}_\delta$, т. е. $\Omega_\delta = \Omega \setminus \bar{\Gamma}_\delta$.

Выбрав вектор единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$ на Γ_δ:

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{cases} (0,1) & \text{на } \Sigma, \\ \left(-\psi_{x_1}/\sqrt{1+\psi_{x_1}^2}, 1/\sqrt{1+\psi_{x_1}^2}\ \right) & \text{на } \Gamma^\delta, \end{cases}$$

можно определить положительный и отрицательный берега $\Gamma_\delta^\pm$ трещины по отношению к вектору $\boldsymbol{\nu}$.

В области Ω_0 рассмотрим задачу о равновесии упругого тела с трещиной Γ_0 с условиями непроникания. При известной правой части $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2) \in [C^1(\bar{\Omega}_0)]^2$ искомый вектор перемещений $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ удовлетворяет уравнениям равновесия с краевыми условиями в виде равенств и неравенств:

$$-\sigma_{ij,j} = f_i, \qquad i,j = 1,2 \qquad \text{в} \quad \Omega_0; \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}), \qquad i,j,k,l = 1,2 \qquad \text{в} \quad \Omega_0; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma; \tag{3}$$

$$[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu [\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma_0^\pm. \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}) = (u_{k,l} + u_{l,k})/2$ — компоненты тензора деформаций; $u_{k,l} = \partial u_k / \partial x_l$; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_0$; $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})$ — компоненты тензора напряжений; c_{ijkl} — компоненты положительно-определенного тензора коэффициентов упругости ($c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$, $c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0 \xi_{ij}\xi_{ij}$, $c_0 > 0$, $\xi_{ij} = \xi_{ji}$). Для простоты вычислений будем предполагать, что c_{ijkl} — постоянные. Наконец, используем разложение

$$\{\sigma_{ij}\} = \sigma_\nu \boldsymbol{\nu} + \sigma_\tau, \qquad \sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \qquad i,j = 1,2$$

и следующие обозначения: $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на Γ_0, $v^\pm$ — значения функции v на $\Gamma_0^\pm$.

Для малого параметра δ рассмотрим возмущение задачи (1)–(4). Пусть искомый вектор перемещений $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет следующей системе уравнений с краевыми условиями:

$$\begin{gathered} -\sigma^\delta_{ij,j} = f_i, \qquad i,j = 1,2 \qquad \text{в} \quad \Omega_\delta, \\ \sigma^\delta_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{u}^\delta), \qquad i,j,k,l = 1,2 \qquad \text{в} \quad \Omega_\delta, \\ \boldsymbol{u}^\delta = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma, \\ [\boldsymbol{u}^\delta]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0, \quad \sigma^\delta_\nu \leqslant 0, \quad [\sigma^\delta_\nu] = 0, \quad \sigma^\delta_\tau = 0, \quad \sigma^\delta_\nu[\boldsymbol{u}^\delta]\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \qquad \text{на} \quad \Gamma^\pm_\delta. \end{gathered} \tag{5}$$

Задача (5) допускает вариационную формулировку, ее решение доставляет минимум функционалу упругой энергии

$$\Pi_\psi(\boldsymbol{v};\delta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{v})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) - \int\limits_{\Omega_\delta} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}$$

на выпуклом множестве

$$K_\delta = \{\boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega_\delta)\colon [\boldsymbol{v}]\cdot\boldsymbol{\nu} \geqslant 0 \quad \text{п. в. на } \Gamma_\delta\},$$

где

$$H^1_0(\Omega_\delta) = \{\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)\colon v_i \in H^1(\Omega_\delta),\ i = 1,2;\ \boldsymbol{v} = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Задачу минимизации можно записать следующим образом: найти элемент $\boldsymbol{u}^\delta \in K_\delta$, такой что

$$\Pi_\psi(\boldsymbol{u}^\delta;\delta) = \min_{\boldsymbol{v}\in K_\delta} \Pi_\psi(\boldsymbol{v};\delta).$$

Элемент $\boldsymbol{u}^\delta$ является решением вариационного неравенства. Требуется найти элемент $\boldsymbol{u}^\delta \in K_\delta$, такой что

$$\int\limits_{\Omega_\delta} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}^\delta)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^\delta) \geqslant \int\limits_{\Omega_\delta} f(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}^\delta), \qquad \boldsymbol{v}\in K_\delta. \tag{6}$$

При $\delta = 0$ решение $\boldsymbol{u}^0$ вариационной задачи (6) совпадает с решением $\boldsymbol{u}$ невозмущенной задачи (1)–(4). Заметим, что при любом значении δ задача (6) имеет единственное решение $\boldsymbol{u}^\delta$.

Найдем производную функционала энергии $\Pi_\psi(\boldsymbol{u}^\delta;\delta)$ по параметру возмущения δ. Для этого, следуя [7, 8], построим отображение возмущенной области Ω_δ на исходную область Ω_0. Возьмем функцию $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ с носителем в достаточно малой окрестности $(0,0)$, такую что $\theta \equiv 1$ в еще меньшей окрестности $(0,0)$ радиусом r_δ. Для малых $\delta < r_\delta$ введем преобразование независимых переменных $y = y(x,\delta)$, где $y \in \Omega_0$, $x \in \Omega_\delta$:

$$y_1 = x_1 - \delta\theta(x_1,x_2), \qquad y_2 = x_2 + \psi(x_1 - \delta\theta(x_1,x_2)) - \psi(x_1). \tag{7}$$

Преобразование (7) имеет якобиан

$$J_\delta = \Big|\frac{\partial y(x,\delta)}{\partial x}\Big| = 1 - \delta\,\frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}, \qquad \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} + \psi'(x_1)\,\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Очевидно, что $J_\delta > 0$ при малых δ. Таким образом, преобразование (7) отображает возмущенную область Ω_δ на невозмущенную область Ω_0 взаимно однозначно. В частности, точка $(\delta,\psi(\delta))$ переходит в точку $(0,0)$. Заметим, что аргумент функции $\psi(x_1)$ может быть меньше нуля. В этом случае, для того чтобы все формулы оставались верными, положим $\psi(x_1) = 0$ для всех $x_1 < 0$. Тогда область Ω_δ ($\delta < 0$) корректно определена. Предполагается, что функция ψ достаточно гладкая на интервале $(-1, \delta)$.

В работе [12] установлено, что производная $\Pi'_\psi(0) = (d/d\delta)\Pi_\psi(\boldsymbol{u}^\delta; \delta)\big|_{\delta=0}$ функционала энергии по длине δ проекции трещины Γ_δ на ось x_1 определяется формулой

$$\Pi'_\psi(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial\theta}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) - \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{E}_{ij}(\theta;\boldsymbol{u}) - \\ - \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}\,(\theta f_i)u_i + \int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{Q}) - \int\limits_{\Omega_0} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{Q}, \qquad (8)$$

где

$$\boldsymbol{E}_{ij}(\theta;\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\Big(\theta_{,j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \theta_{,i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\Big) + (\theta\psi')_{,j}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_2} + (\theta\psi')_{,i}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_2}, \qquad \boldsymbol{Q} = (0, \psi'' u_1).$$

Формула (8) используется в приложениях. В частности, получена аппроксимация функционала энергии

$$\Pi_\psi(\boldsymbol{u}^\delta;\delta) = \Pi_\psi(\boldsymbol{u};0) + \delta\Pi'_\psi(0) + o(\delta).$$

В [12] показано, что производная функционала энергии (8) не зависит от функции θ.

Независимость производной $\Pi'_\psi(0)$ от функции ψ. Ниже показано, что производная $\Pi'_\psi(0)$ не зависит от функции ψ при достаточной гладкости этой функции.

Введем пространство функций, принадлежащих $H^4(0,1)$, такое что

$$H^{4,0}(0,1) = \{\xi \in H^4(0,1)\colon \xi(0) = \xi'(0) = \xi''(0) = \xi'''(0) = 0\}.$$

Далее будем предполагать, что $\psi \in H^{4,0}(0,1)$. Так как $\psi = 0$ при $x_1 < 0$, то выполнено включение $\psi \in H^4(-1,1)$.

Пусть B — шар малого радиуса, такой что носитель функции θ находится внутри B ($B_\Sigma = B \setminus \Sigma$). Формулу производной (8) можно записать в виде

$$\Pi'_\psi(0) = \int\limits_{B_\Sigma} d + \int\limits_{B_\Sigma} q\psi' + \int\limits_{B_\Sigma} r\psi'' + \int\limits_{B_\Sigma} s\psi''', \qquad (9)$$

где $d = d(D^\alpha\boldsymbol{u}, D^\alpha\theta, D^\alpha\boldsymbol{f})$, $q = q(D^\alpha\boldsymbol{u}, D^\alpha\theta, D^\alpha\boldsymbol{f})$, $r = r(D^\alpha\boldsymbol{u}, \theta, \boldsymbol{f})$, $s = s(D^\alpha\boldsymbol{u})$ — известные функции; $|\alpha| \leqslant 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Заметим, что из свойств гладкости функций $\boldsymbol{u} \in H^1_0(\Omega_0)$ и $\psi \in H^{4,0}(0,1)$ следует ограниченность всех интегралов в (9). Действительно, члены правой части равенства (9) имеют вид $u_{,i}u_{,j}\psi'$, $u_{,i}u_{,j}\psi''$, $u_{,i}u_{,j}\psi'''$. Согласно теореме вложения для пространств Соболева $\psi', \psi'', \psi''' \in L^\infty(-1,1)$. Кроме того, $u_{,i}u_{,j} \in L^1(B_\Sigma)$, а значит, утверждение верно.

Введем обозначение $B^+_\Sigma = \{(x_1,x_2) \in B_\Sigma\colon x_1 > 0\}$. Тогда формулу для производной (9) можно записать в виде

$$\Pi'_\psi(0) = \int\limits_{B_\Sigma} d + \int\limits_{B^+_\Sigma} q\psi' + \int\limits_{B^+_\Sigma} r\psi'' + \int\limits_{B^+_\Sigma} s\psi'''. \qquad (10)$$

Здесь использовано равенство $\psi(x_1) = 0$, которое верно для всех $-1 < x_1 < 0$.

Формула (10) явно выражает зависимость $\Pi'_\psi(0)$ от функции ψ. Ниже приводится доказательство независимости производной $\Pi'_\psi(0)$ от ψ, если $\psi \in H^{4,0}(0,1)$. По сути, доказывается, что сумма интегралов по B^+_Σ в (10) равна нулю. Это, в частности, означает, что критерий Гриффитса безразличен к любому развитию трещины по траектории, определенной функцией $\psi \in H^{4,0}(0,1)$.

Введем обозначение

$$N(\psi) = \int\limits_{B_\Sigma^+} q\psi' + \int\limits_{B_\Sigma^+} r\psi'' + \int\limits_{B_\Sigma^+} s\psi'''$$

и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Верно тождество*

$$N(\psi) = 0, \qquad \psi \in H^{4,0}(0,1).$$

Доказательство. Рассмотрим функции φ вида

$$\varphi(x_1) = kx_1^n, \qquad x_1 \in (0,1), \quad k \in \mathbb{R}, \quad n = 3, 4, \ldots . \tag{11}$$

В этом случае

$$\varphi \in H^{4,0}(0,1), \qquad n = 3, 4, \ldots .$$

Введем дополнительные обозначения. Пусть

$$a = \int\limits_{B_\Sigma} d, \qquad b_n = n \int\limits_{B_\Sigma^+} \big(qx_1^{n-1} + (n-1)rx_1^{n-2} + (n^2 - 3n + 2)rx_1^{n-3}\big), \quad n = 3, 4, \ldots .$$

Подставляя функции φ вида (11) в формулу (10), вычислим производную $\Pi'_\psi(0)$. В результате получим следующие выражения:

$$\Pi'_\varphi(0) = a + kb_n, \qquad n = 3, 4, \ldots . \tag{12}$$

Производная функционала энергии имеет постоянный знак. Действительно, для любого положительного δ имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\Pi_\psi(\boldsymbol{u}^\delta; \delta) - \Pi_\psi(\boldsymbol{u}^0; 0)}{\delta} \leqslant \frac{\Pi_\psi(\boldsymbol{u}^0; \delta) - \Pi_\psi(\boldsymbol{u}^0; 0)}{\delta} = 0.$$

Иными словами, для всех $\psi \in H^{4,0}(0,1)$ выполняется неравенство $\Pi'_\psi(0) \leqslant 0$, в частности, должно выполняться неравенство

$$\Pi'_\varphi(0) \leqslant 0. \tag{13}$$

Так как значение k выбирается произвольно, из (12), (13) следует, что

$$b_n = 0, \qquad n = 3, 4, \ldots .$$

Тогда $N(\varphi) = 0$ для всех функций φ вида (11). Следовательно, для всех полиномов вида

$$\varphi(x_1) = \beta_3 x_1^3 + \beta_4 x_1^4 + \ldots + \beta_n x_1^n, \qquad n = 3, 4, \ldots \tag{14}$$

получаем

$$N(\varphi) = 0. \tag{15}$$

Докажем, что полиномы вида (14) плотны в пространстве $H^{4,0}(0,1)$. Пусть $\psi \in H^{4,0}(0,1)$ — некоторая фиксированная функция. Известно, что функции, принадлежащие пространству $C^4[0,1]$, равные нулю вблизи $x_1 = 0$, плотны в пространстве $H^{4,0}(0,1)$. В то же время для любой функции $\chi \in C^4[0,1]$ существует последовательность полиномов

Бернштейна, сходящихся к $\chi \in C^4[0,1]$ в пространстве $C^4[0,1]$. Полиномы Бернштейна определяются формулой [14]

$$\chi(x_1) = \sum_{k=0}^{n} \chi\Big(\frac{k}{n}\Big) C_n^k x_1^k (1-x_1)^{n-k}, \tag{16}$$

где $C_n^k = n!/((n-k)!k!)$. Возьмем произвольное значение $\lambda > 0$. Существует функция $\chi \in C^4[0,1]$, равная нулю вблизи $x_1 = 0$, такая что

$$\|\chi - \psi\|_{H^{4,0}(0,1)} < \lambda. \tag{17}$$

Для функции χ построим последовательность полиномов Бернштейна χ_n вида (16). При достаточно больших n имеем

$$\|\chi - \chi_n\|_{C^4[0,1]} < \lambda. \tag{18}$$

Заметим, что $\chi(1/n) = 0$ и $\chi(2/n) = 0$ для больших n. В силу (16) это означает, что полиномы Бернштейна χ_n принимают вид

$$\chi_n(x_1) = \beta_3 x_1^3 + \beta_4 x_1^4 + \ldots + \beta_n x_1^n.$$

Таким образом, согласно (17), (18)

$$\|\chi_n - \psi\|_{H^{4,0}(0,1)} < 2\lambda.$$

Тем самым доказана плотность полиномов вида (14) в пространстве $H^{4,0}(0,1)$.

Так как равенство (15) верно для всех полиномов вида (14), оно верно и для всех $\psi \in H^{4,0}(0,1)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что производная функционала энергии может быть выражена формулой

$$\Pi'_\psi(0) = a, \qquad \psi \in H^{4,0}(0,1).$$

При этом правая часть равенства a не зависит от функции ψ. Вычислив значение a, получим выражение

$$\Pi'_\psi(0) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\theta_{,1} - \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})u_{i,1}\theta_{,j} - \int\limits_{\Omega_0} u_i(f_i\theta)_{,1}. \tag{19}$$

Независимость производной $\Pi'_\psi(0)$ от функции θ. В формуле (19) можно интегрировать только по носителю θ. Как известно, решение $\boldsymbol{u}$ задачи (1)–(4) принадлежит пространству Соболева H^2, за исключением окрестности вершины трещины. Напомним, что $\theta = 1$ в окрестности точки $(0,0)$. Пусть B^0 — некоторый шар с центром в точке $(0,0)$, такой что $B^0 \subset \{x \in \Omega\colon \theta(x) = 1\}$. Введем множество $B^0_\Sigma = B^0 \setminus \Sigma$ и проинтегрируем (19) по частям. Тогда для $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})$ получим

$$\Pi'_\psi(0) = -\int\limits_{\Omega_0\setminus B^0_\Sigma} \Big(\Big(\frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\Big)_{,1} - (\sigma_{ij}u_{i,1})_{,j} - u_{i,1}f_i\Big)\theta +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma\setminus B^0} [\sigma_{ij}\boldsymbol{\nu}_j u_{i,1}]\theta + \int\limits_{\partial B^0} \Big(\sigma_{ij}u_{1,i}n_j - \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}n_1\Big) + \int\limits_{B^0_\Sigma} u_{i,1}f_i. \tag{20}$$

Здесь $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ — вектор внешней нормали к границе ∂B^0 шара B^0. В силу того что величины $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})$, $\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})$ и f_i связаны уравнениями равновесия (1) и законом Гука (2), интеграл по $\Omega_0 \setminus B^0_\Sigma$ равен нулю. Интеграл по $\Sigma \setminus B^0$ можно записать в виде

$$\int\limits_{\Sigma\setminus B^0} [\sigma_{ij}\boldsymbol{\nu}_j u_{i,1}]\theta = \int\limits_{\Sigma\setminus B^0} [\sigma_{12}u_{1,1}]\theta + \int\limits_{\Sigma\setminus B^0} [\sigma_{22}u_{2,1}]\theta. \qquad (21)$$

В [12] с помощью результатов работы [15] проведен анализ правой части равенства (21), откуда следует, что выполнение условий (4) обеспечивает выполнение равенства

$$[\sigma_{22}u_{2,1}] = 0 \qquad (22)$$

почти всюду. Из (4) и (22) следует равенство нулю интеграла по $\Sigma\setminus B^0$ в (20). В результате можно записать формулу для производной энергии, не содержащую функцию θ:

$$\Pi'_\psi(0) = \int\limits_{\partial B^0} \Big(\sigma_{ij}u_{1,i}n_j - \frac{1}{2}\,\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}n_1\Big) + \int\limits_{B^0_\Sigma} u_{i,1}f_i. \qquad (23)$$

Правая часть (23) не зависит ни от ψ, ни от выбора шара B^0. Это означает, что при уменьшении радиуса шара B^0 правая часть (23) не изменится. Если внутри шара B^0 компоненты вектора массовых сил f_i равны нулю, то правая часть (23) является интегралом Черепанова — Райса, часто используемым в приложениях.

Замечание. Полученные результаты можно обобщить на следующий случай в рамках двумерной теории упругости. Пусть трещина такова, что в некоторой окрестности вершины она совпадает с прямой. Тогда производная функционала энергии вдоль возможной траектории движения трещины не зависит от формы траектории, если направление возможного движения трещины совпадает с направлением касательной в вершине трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Морозов Н. Ф.** Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
2. **Sokolowski J., Zolesio J. P.** Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis. Berlin: Springer, 1992. (Springer series in computational mathematics; V. 10).
3. **Othsuka K.** Mathematics of brittle fracture // Theoretical studies on fracture mechanics in Japan. Hiroshima: Hiroshima-Denki Inst. of Technol., 1997. P. 99–172.
4. **Мазья В. Г., Назаров С. А.** Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
5. **Khludnev A. M., Sokolowski J.** The Griffith formula and the Rice — Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10, N 4. P. 379–394.
6. **Khludnev A. M., Ohtsuka K., Sokolowski J.** On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60. P. 99–109.
7. **Рудой Е. М.** Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5. С. 155–161.
8. **Рудой Е. М.** Асимптотика интеграла энергии при возмущении границы // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2000. Вып. 116. С. 97–103.
9. **Kovtunenko V. A.** Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations // Z. angew. Math. Phys. 2003. Bd 54, N 3. S. 410–423.

10. **Khludnev A.** Analysis of cracks in solids / A. Khludnev, V. Kovtunenko. Boston: WIT-Press, 2000.
11. **Brokate M., Khludnev A.** On crack propagation shapes in elastic bodies // Z. angew. Math. Phys. 2004. Bd 55, N 2. S. 318–329.
12. **Рудой Е. М.** Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.
13. **Kovtunenko V. A.** Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with non-penetration // IMA J. Appl. Math. 2006. V. 71, N 5. P. 635–657.
14. **Бернштейн С. Н.** Собрание сочинений: В 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1.
15. **Киндерлерер Д.** Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 1/XI 2005 г.,
в окончательном варианте — 19/IX 2006 г.