лучше, чем цельная толстостенная труба в том смысле, что удается более равномерно по толщине конструкции перераспределить приложенную нагрузку. В частности, если условие на контакте взять в виде (4.1), то можно получить в сравнении с цельной трубой выигрыш в несущей способности практически вдвое. Приведенная модель позволяет рассматривать ее обобщения в ряде других моделей, учитывающих, например, внутреннее трение среды, пластические деформации самих слоев оболочки и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // ПМТФ.— 1977.— № 3.
2. **Ревуженко А. Ф.** О деформировании сыпучей среды. Ч. IV. Микровращения // ФТПРПИ.— 1983.— № 6.
3. **Писаренко Г. С., Бабенко А. Е.** Напряженно-деформированное состояние трехслойной цилиндрической оболочки под внутренним давлением // Пробл. прочности.— 1977.— № 3.
4. **Ильин Л. А., Лобкова Н. А.** Упругая деформация и проскальзывание слоев рулонированной цилиндрической оболочки при нагружении внутренним давлением // ПМ.— 1981.— Т. 17, № 6.
5. **Малинин Н. Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.

Поступила 18/III 1987 г.

УДК 539.374

АНТИПЛОСКОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

С. И. Сенашов

(*Красноярск*)

Рассмотрим уравнения, описывающие нестационарные пластические течения среды Мизеса:

(1)
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j},$$
$$s_{ij}s_{ij} = 2k_s^2, \quad 2s_{ij} = \lambda\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0,$$

где u_1, u_2, u_3 — компоненты вектора скорости; p — гидростатическое давление; λ — неотрицательная функция; s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; k_s — предел текучести при чистом сдвиге; по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Предположим, что среда находится в условиях антиплоского пластического течения, поэтому решение уравнений (1) следует искать в виде [1]

(2)
$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = w(x, y, t),\ p = 0.$$

Подставляя соотношения (2) в (1), имеем уравнение, описывающее антиплоское пластическое течение:

(3)
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{w_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{w_y}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}}$$
$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Для отыскания точных решений уравнения (3) найдем группу непрерывных преобразований, им допускаемую. Вычисляя ее, согласно методике

[2], получим, что группа порождается операторами

$$X_1 = x\partial_y - y\partial_x,\ X_2 = t\partial_t + w\partial_w,$$
$$X_3 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y,\ X_4 = \partial_t, \tag{4}$$
$$X_5 = \partial_w,\ X_6 = \partial_x,\ X_7 = \partial_y.$$

Для нахождения существенно различных инвариантных решений уравнения (3) перечислим все неподобные одномерные подалгебры для алгебры Ли с базисом (4):

а) $X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3$; б) $X_1 + \alpha X_3 + \beta X_5$; в) $X_1 + \alpha X_4 + \beta X_5$; г) $X_4 + \alpha X_5 + \beta X_6$; д) $X_5 + \alpha X_6$; е) $X_3 + \alpha X_5$; ж) $X_2 + \alpha X_3$; з) $X_2 + \alpha X_6$; и) X_6, к) X_5 (α, β — произвольные постоянные).

Рассмотрим стационарное решение, инвариантное относительно подгруппы X_4. Оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{w_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{w_y}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2}} = 0, \tag{5}$$

решение которого может быть использовано для описания пластического течения длинного цилиндрического тела с произвольной формой поперечного сечения под действием нагрузок, направленных по образующим цилиндра и постоянных вдоль образующих.

Внешние нагрузки, приложенные на торцах стержня, статически эквивалентны крутящему моменту $G_3 = \int\int (xs_{23} - ys_{13})\,dx\,dy$. Здесь ось z совпадает с осью цилиндра, оси x, y лежат в плоскости поперечного сечения, ограниченного контуром Γ. Пусть вектор нормали к боковой поверхности имеет вид (n_1, n_2, 0). Так как внешние нагрузки направлены вдоль образующей, то

$$n_1 s_{13} + n_2 s_{23}|_\Gamma = 0. \tag{6}$$

Следовательно, необходимо решить задачу (5), (6).

После дифференцирования и приведения подобных (5) сводится к уравнению

$$w_y^2 w_{xx} - 2w_x w_y w_{xy} + w_x^2 w_{yy} = 0, \tag{7}$$

которое, как показано в [3, с. 221], допускает бесконечную группу преобразований Ли — Беклунда. Поэтому (7) может быть линеаризовано. Например, это можно сделать с помощью преобразования Лежандра. Но возможен и другой способ.

Введем новые искомые функции $u = w_x$, $v = w_y$, тогда (6), (7) запишем в виде

$$v^2 u_x - 2uvu_y + u^2 v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0; \tag{8}$$

$$n_1 u + n_2 v|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

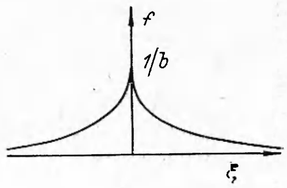
Если считать u, v компонентами вектора скорости, то (8) описывает установившееся плоскопараллельное изоэнтропическое течение газа [4, с. 256]. Граничное условие (9) означает, что газ течет в длинной трубе с непроницаемыми стенками.

Следовательно, задача об антиплоском установившемся течении газа (5), (6) сводится к задаче (8), (9) для уравнений газовой динамики. Необходимо отметить, что задача (5), (6) хорошо разработана. Для ее решения использованы мощные аналитические и численные методы [4, 5].

З а м е ч а н и е. Кроме граничных условий (6) возможны и другие. Рассмотрим цилиндрическое тело, нагруженное на боковой поверхности усилиями, равномерно распределенными и направленными вдоль образующих. Тогда на боковой поверхности [1]

$$n_1 s_{13} + n_2 s_{23}|_\Gamma = f(x, y). \tag{10}$$

Остановимся на некоторых нестационарных инвариантных решениях, которые, с нашей точки зрения, представляют определенный интерес. Ищем решения в виде $w = tf(x, y)$, тогда уравнение (3) запишется следующим образом: $f = \frac{\partial}{\partial x}\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$. Если f искать в виде $f = \varphi(\theta)/r$ (r, θ — полярные координаты), то для определения функции φ получим уравнение $\varphi''\varphi^2 - \varphi^3 - 2\varphi\varphi'^2 = \varphi(\varphi^2 + \varphi'^2)^{3/2}$, которое можно использовать для описания пластического течения цилиндра (поперечное сечение его задано уравнением $r = \psi(\theta)$). В качестве граничного условия возьмем (10).



Пусть теперь $w = ax + f(bt - y)$, тогда (3) сведется к обыкновенному дифференциальному уравнению $bf' = \frac{d}{d\xi}\frac{f'}{\sqrt{a^2+f'^2}}$, $\xi = bt - y$. Решим его, полагая равными нулю произвольные постоянные, которые появятся при интегрировании. В результате $\pm\left(\sqrt{1-b^2f^2} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-b^2f^2}}{bf}\right|\right) = |ab|\xi$. При $f > 0$ решение $f = f(\xi)$ изображено на рисунке. Если $\xi = 0$, то $f = 1/b$. Это решение можно использовать для описания пластической волны в слое $|x| \leqslant h$, если на его границе задано касательное напряжение s_{23}.

В заключение приведем вид других инвариантных решений уравнения (3), которые построены на подалгебрах «а»—«и»:

$$\text{а) } w = t^{\alpha/(2\alpha+\beta)} f(r\exp(-\beta\theta),\ t\exp(-(2\alpha+\beta)\theta)) \text{ при } 2\alpha+\beta \neq 0,$$
$$w = f(\beta\theta - \ln r,\ t)/r^{1/2} \text{ при } 2\alpha+\beta = 0,\ \beta \neq 0;$$
$$\text{б) } w = \beta\theta + f(t\exp(-\alpha\theta),\ r\exp(-\alpha\theta));$$
$$\text{в) } w = \beta\theta + f(\theta - \alpha t,\ r);\ \text{г) } w = \alpha t + f(\beta t - x,\ y);$$
$$\text{д) } w = \alpha x + f(t,\ y);\ \text{е) } w = \alpha\ln t + f(x/t,\ y/t);$$
$$\text{ж) } w = t^{1/(2+\alpha)} f(\theta,\ r^{2+\alpha}t^{-\alpha}) \text{ при } 2+\alpha \neq 0;\ w = r^{-1/2} f(t,\ \theta)$$
$$\text{при } \alpha + 2 = 0;$$
$$\text{з) } w = t^{1/2} f(y,\ (\alpha/2)\ln t - x);\ \text{и) } w = f(t,\ y).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
3. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике.— М.: Наука, 1983.
4. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
5. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1973.

Поступила 16/II 1987 г.