УДК 539.3

О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ МОЩНОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ СРЕДЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Г. В. Иванов

(*Новосибирск*)

Рассматривается среда, в которой интенсивность касательных напряжений не может превосходить заданное значение. В остальном среда произвольная: связь напряжений с деформациями может быть любой, в частности, деформирование может сопровождаться нарушением сплошности (разрушением). При деформировании такой среды мощность сил на той части поверхности, где заданы скорости, можно оценить сверху [1]. В данной работе предлагается более общая оценка, основанная на использовании кинематически возможного поля скоростей и модели неоднородной вязкой несжимаемой жидкости. Если коэффициент вязкости определить из условия минимума оценки, то она совпадает с известной [1]. Использование предлагаемой оценки позволяет получать простые оценки мощности поверхностных сил, вычислять последовательными приближениями минимальную оценку в заданном классе кинематически возможных скоростей.

1. Верхняя оценка мощности поверхностных сил. Пусть σ_{ij}^* — какие-либо напряжения, удовлетворяющие в области Ω уравнениям равновесия

(1.1) $$\sigma_{ij,j}^* + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

неравенству

(1.2) $$\sigma_{ij}^{\prime *}\sigma_{ij}^{\prime *} \leqslant 2\tau^2, \quad \sigma_{ij}^{\prime *} = \sigma_{ij}^* - \delta_{ij}\sigma^*, \quad \sigma^* = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}^*,$$

а на части S_σ границы S области Ω условиям

(1.3) $$\sigma_{ij}^*\nu_j = p_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

В (1.1)—(1.3) и в дальнейшем используется декартова система координат, f_i, p_i — заданные функции, τ — постоянная, ν_i — компоненты внешней единичной нормали к поверхности S.

Пусть u_i^* — компоненты заданного на S_u вектора скорости, $S_u = S - S_\sigma$, u_i — какое-либо кинематически возможное поле скоростей, т. е. поле скоростей, удовлетворяющее условию несжимаемости в Ω

(1.4) $$\delta_{ij}u_{i,j} = 0$$

и условию на S_u

(1.5) $$(u_i - u_i^*)\nu_i = 0.$$

Скорости u_i могут иметь тангенциальные разрывы на некоторых поверхностях S_k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Обозначим

$$\sigma'_{ij} = \mu e_{ij},\, e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

где μ — какая-либо положительная функция координат. Из (1.2) находим

$$\sigma'^{*}_{ij}\sigma'_{ij} \leqslant \tau^2 + \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij},$$

и, следовательно,

$$\sigma'^{*}_{ij}e_{ij} \leqslant \frac{1}{\mu}\left(\tau^2 + \frac{1}{2}\mu^2 e_{ij}e_{ij}\right). \tag{1.6}$$

Из (1.1)—(1.5) находим

$$\int\limits_{\Omega}\sigma'^{*}_{ij}e_{ij}d\Omega \geqslant \int\limits_{S_u}\sigma^{*}_{ij}\nu_j u_i dS + \int\limits_{S_\sigma}p_i u_i dS + \int\limits_{\Omega}f_i u_i d\Omega - \tau\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}[u]_k\,dS, \tag{1.7}$$

$$\int\limits_{S_u}\sigma^{*}_{ij}\nu_j u^{*}_i dS \leqslant \int\limits_{S_u}\sigma^{*}_{ij}\nu_j u_i dS + \tau\int\limits_{S_u}[u]\,dS,$$

где $[u]_k$ — модуль тангенциального разрыва скоростей u_i на S_k; $[u]$ — модуль разности касательных составляющих скоростей u^{*}_i и u_i на S_u.

Из (1.6), (1.7) следует

$$\int\limits_{S_u}\sigma^{*}_{ij}\nu_j u^{*}_i dS \leqslant \int\limits_{\Omega}\frac{1}{\mu}\left(\tau^2 + \frac{1}{2}\mu^2 e_{ij}e_{ij}\right)d\Omega + \tau\left(\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{S_k}[u]_k dS + \int\limits_{S_u}[u]\,dS\right) - \int\limits_{\Omega}f_i u_i d\Omega - \int\limits_{S_\sigma}p_i u_i dS. \tag{1.8}$$

Неравенство (1.8) содержит произвольную положительную функцию μ. Если ее определить из условия минимума правой части (1.8), то

$$\mu = 2\tau/H,\ H^2 = 2e_{ij}e_{ij} \tag{1.9}$$

и неравенство (1.8) переходит в известную оценку [1] мощности внешних сил на S_u для среды с ограниченной интенсивностью касательных напряжений (1.2).

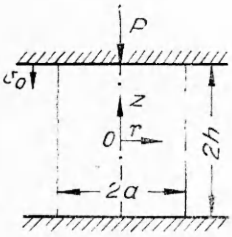
Пусть кинематически возможные скорости заданы как функции координат и параметров c_k, $k=1, 2, \ldots, N$. Обозначим правую часть (1.8) через $G(\mu, c_k)$. Чтобы найти значения c_k, при которых $G(\mu, c_k)$ минимальна, необходимо в случае (1.9) решить нелинейную относительно c_k систему уравнений. Решение этой системы может быть получено последовательными приближениями. Очевидно,

$$G(\mu_n c^n_k) \geqslant \min_{\mu} G(\mu, c^n_k) = G(\mu_{n+1}, c^n_k) \geqslant \min_{c_k} G(\mu_{n+1}, c_k) = G(\mu_{n+1}, c^{n+1}_k),$$

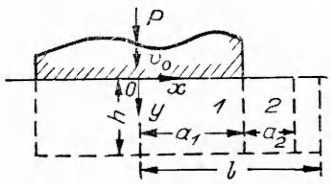
где μ_n, c^n_k, $n = 0, 1, \ldots,$ — последовательность приближений функции μ и искомых значений параметров c_k. Система уравнений каждого из приближений линейна относительно тех параметров c_k, от которых кинематически возможное поле скоростей и скачки $[u]_k$, $[u]$ зависят линейно.

Используя (1.8), можно получать просто вычисляемые оценки, полагая, например, что μ — постоянная или кусочно-постоянная в Ω функция.

2. Осевое сжатие кругового цилиндра плоскими плитами. Пусть круговой цилиндр диаметром $2a$ и высотой $2h$ (фиг. 1) сжимается абсолют-



Фиг. 1



Фиг. 2

но твердыми плитами, столь шероховатыми, что радиальные смещения частиц цилиндра на плоскостях контакта равны нулю.

Пусть кинематически возможная осевая скорость w — кубический полином по z, коэффициенты которого не зависят от r, кинематически возможная радиальная скорость u линейна по r. Из условия несжимаемости и условий

$$w|_{z=h} = -w_0,\ w|_{z=0} = \partial u/\partial z|_{z=0} = 0$$

находим

$$w = -\zeta w_0[1 + c(1-\zeta^2)],\ u = -(1/2)r dw/dz, \tag{2.1}$$
$$e_{ij}e_{ij} = (1/2)[3(dw/dz)^2 + (1/4)r^2(d^2w/dz^2)],$$

где $\zeta = z/h$; c — параметр кинематически возможного поля скоростей; w_0 — скорость движения плиты. Вычислим верхнюю оценку силы P сжатия цилиндра, полагая, что в (1.8) функция μ во всем объеме цилиндра равна одной и той же постоянной. Из (1.8), (2.1) следует

$$p \leqslant 1/\mu_* + (1/40)[10 + (8 + 5\lambda^2)c^2]\mu_* + \lambda(1-2c)/3\sqrt{3}, \tag{2.2}$$

где

$$p = P/\pi a^2\tau\sqrt{3};\ \mu_* = \mu w_0\sqrt{3}/\tau h,\ \lambda = a/h.$$

Минимизируя правую часть (2.2) по c, а затем по μ_*, находим

$$p \leqslant [1 - 40\lambda^2/27(8 + 5\lambda^2)]^{1/2} + \lambda/3\sqrt{3}.$$

Найденная оценка во всем диапазоне изменения λ незначительно отличается от результатов вычисления соответствующей рассматриваемому кинематическому полю минимальной оценки [1].

3. Вдавливание системы плоских гладких штампов. Пусть система абсолютно твердых штампов с плоскими основаниями вдавливается со скоростью v_0 в плоскую поверхность среды так, что деформация плоская, деформирование симметрично относительно линий $x = 0$, $x = \pm l$ (фиг. 2).

Примем в качестве кинематически возможного поля скоростей в области *1*

(3.1) $$u = \xi[1 + c(\eta - 1/2)]v_0,\ v = (1 - \eta)[1 + (1/2)c\eta]v_0;$$

в области *2*

(3.2) $$u = -(\xi - \alpha_1 - \alpha_2)[1 + c(\eta - 1/2)]v_0/\lambda,\ v = -(1 - \eta)[1 + (1/2)c\eta]v_0/\lambda,$$

где $\xi = x/h$; $\eta = y/h$; $\alpha_1 = a_1/h$; $\alpha_2 = a_2/h$; $\lambda = a_2/a_1$; c, h—параметры поля скоростей; v_0 — скорость движения штампов. Вычислим верхнюю оценку силы P вдавливания штампа, полагая, что трение на поверхностях контакта отсутствует, $a_1 + a_2 = l$, функция μ в (1.8) равна постоянной μ_1 в области *1* и постоянной μ_2 в области *2*. Из (1.8), (3.1) и (3.2) следует

(3.3) $$2p \leqslant 1/\mu_1^* + \mu_1^*[1 + c^2(1 + \alpha_1^2)/12] + 1/\mu_2^* + \mu_2^*[1 + c^2(1 + \alpha_2^2)/12] + \frac{1}{2}\left[(\alpha_1 + \alpha_2)\left(1 + \frac{1}{2}c\right) + \left(1 + \frac{1}{6}c\right)(1/\alpha_1 + 1/\alpha_2)\right],$$

где

$$p = P/4a_1\tau;\quad \mu_1^* = \mu_1 v_0/\tau h;\quad \mu_2^* = \mu_2 v_0/\tau h\lambda.$$

Решение нелинейной системы уравнений относительно значений μ_1^*, μ_2^*, c, h, соответствующих минимуму оценки (3.3), может быть получено последовательными приближениями. Ограничимся первым приближением. Определяя μ_1^*, μ_2^*, h из условия минимума оценки (3.3) при $c = 0$, находим

$$p \leqslant 2 + (1 + \lambda)/2\sqrt{\lambda},\quad \mu_1^* = \mu_2^* = 1,\quad h = \sqrt{a_1 a_2}.$$

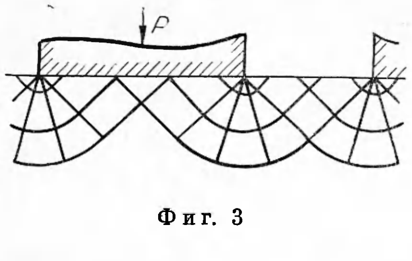
Определяя c из условия минимума оценки (3.3) при найденных μ_1^*, μ_2^*, h, получим

(3.4) $$p \leqslant 11/6 + (1 + \lambda)/2\sqrt{\lambda},\ c = -2\sqrt{\lambda}/(1 + \lambda).$$

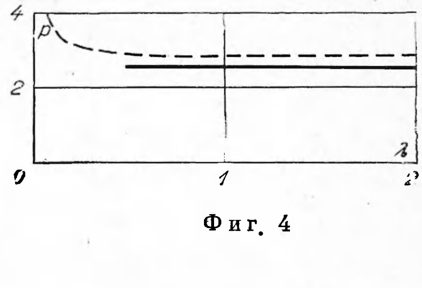
В случае идеальной жестко-пластической среды рассматриваемая задача при $\lambda \geqslant 0{,}5$ имеет решения (фиг. 3), аналогичные решению Хилла и Прандтля о вдавливании одиночного штампа [1]. По этим решениям

(3.5) $$p = 1 + \pi/2.$$

На фиг. 4 штриховая линия соответствует оценке (3.4), сплошная— значению p по (3.5). Отличие оценки от значения p по (3.5) при $0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 2$



Фиг. 3



Фиг. 4

не превышает 12%. Существенное отличие при бо́льших значениях λ объясняется тем, что в этом случае сплошной пластической зоны в поверхностном слое среды не образуется, и, следовательно, условие $a_1 + a_2 = l$ плохо соответствует действительной картине деформирования. Лучшую оценку в этом случае можно получить, полагая, что в области $a_1 + a_2 < x \leqslant l$ скорости равны нулю, и определяя a_2 из условия минимума оценки.

Поступила 15 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.

УДК 539.2: 531

ОБ ИЗМЕРЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫХ МОМЕНТОВ КОМПОЗИТНЫХ СТРУКТУР

В. В. Дудукаленко, Н. Н. Лысач, С. И. Мешков

(Куйбышев)

Задачи теплопроводности, упругости, вязкости многофазных твердых материалов имеют решения в виде разложений по многоточечным моментам [1—3]. Однако применение этих решений ограничено трудностью определения многоточечных моментов, задающих случайное поле параметров, которые являются исходными для теоретического исследования. Из имеющихся количественных методов статистического эксперимента [4, 5] наиболее перспективным становится оптико-структурный анализ, основанный на запоминании сигнала, полученного на выходе датчика оптической плотности при сканировании структуры. Последующий автоматизированный ввод записи сигнала в ЭВМ предоставил бы возможность использовать любые алгоритмы вычисления параметров структуры.

Для обоснования экспериментального метода определения многоточечных моментов рассмотрим статистически однородные случайные поля Λ в пространстве декартовых координат X_i. Многоточечные моменты определяются в результате осреднения

$$\langle \Lambda(X)\Lambda(X')\Lambda(X'')\ldots\rangle = M(X'-X,\ X''-X,\ \ldots). \tag{1}$$

Для композитной среды задание случайного поля определяющих параметров представляется в виде независимых характеристик, относящихся к физическим свойствам каждой фазы в отдельности, и геометрией распределения фаз в пространстве. Пусть Λ_i — некоторый физический параметр, соответствующий i-й фазе, например, тензор упругих модулей, плотность, диэлектрическая проницаемость и т. п. Геометрия фазы задается функцией $\varkappa_i$, принимающей значение 1 в области пространства, занимаемого i-й фазой, и значение 0 в остальной области. Случайное