УДК 532.522 + 681.7.068.4

СТАЦИОНАРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ВОЛОКОН, ФОРМУЕМЫХ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

А. Л. Ярин

(Москва)

Одной дз важных задач химической технологии является формование волокон. Несмотря на это, существенное влияние теплообмена на характеристики волокна исследовано недостаточно. Первым шагом является получение стационарных решений. В [1] стационарные конфигурации волокон рассчитаны численно. В данной работе в предположении большой энергии активации вязкого течения получены аналитические решения стационарной задачи.

Будем считать формуемый расплав ньютоновской жидкостью с вязкостью, зависящей от температуры по закону Аррениуса. Достаточно низким температурам соответствуют столь большие значения вязкости, что течение практически прекращается и материал отвердевает. Это приближение лучше всего соответствует поведению расплавленного стекла [2, 3].

Рассмотрим два наиболее распространенных технологических процесса: 1) вытягивание волокна из нагреваемой до высокой температуры цилиндрической стеклянной заготовки (фиг. 1, *а*); 2) вытягивание через фильерное отверстие из емкости, содержащей расплав (фиг. 1, *б*). В обоих случаях вытягиваемое волокно при движении в воздухе охлаждается и отвердевает. В рассматриваемых ситуациях будем считать, что материал поступает с постоянной заданной скоростью V_0. В конце участка формования волокно попадает на приемное устройство (бобину), задающее некоторое значение продольной скорости. Описание будем вести в рамках квазиодномерных уравнений неразрывности, количества движения [4, 5] и распространения тепла, предполагая, что течение достаточно медленно меняется вдоль волокна:

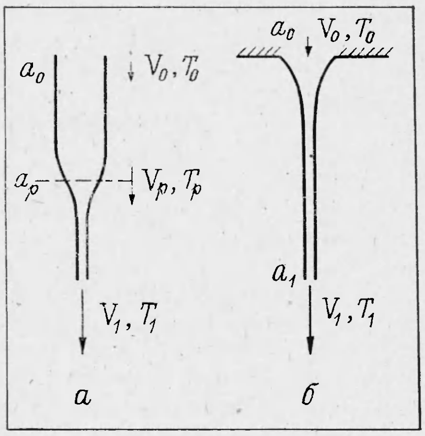
$$\partial f/\partial t + \partial fV/\partial x = 0,\ f = \pi a^2,$$

$$\rho f(\partial V/\partial t + V\partial V/\partial x) = \partial P/\partial x,\ P = 3\mu f\partial V/\partial x,\ \mu = \mu_0 \exp(U/RT), \tag{1}$$

$$\rho fc\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda f\frac{\partial T}{\partial x}\right) - 2\pi a q_w.$$

Здесь t — время; x — координата, отсчитываемая вдоль оси волокна; f — площадь сечения волокна (считается, что оно имеет круговое сечение радиуса a); V — величина осевой скорости в волокне; T — температура; ρ, μ, c, λ — плотность, вязкость, удельная теплоемкость, теплопроводность расплава; P — величина осевой силы в сечении волокна; μ_0 и U — предэкспоненциальный множитель и энергия активации вязкого течения; R — газовая постоянная; q_w — тепловой поток в направлении внешней нормали к боковой поверхности волокна.

Силой тяжести, сопротивлением трения о воздух и поверхностным натяжением расплава пренебрегаем. Будем считать вязкие силы настолько большими, что по сравнению с ними инерционные эффекты (левая часть второго уравнения (1)) пренебрежимо малы. Кроме того, будем пренебрегать продольным кондуктивным переносом тепла в волокне. Сделанные допущения физически оправданы и неоднократно применялись ранее [6, 7]. Отметим, что в ситуации, когда волокно непрерывно вытягивается из заготовки, уравнения (1) используются также для описания



Фиг. 1

развития течения в заготовке. Система уравнений (1) в рассматриваемом стационарном случае приобретает вид

$$fV = Q, \quad dP/dx = 0, \quad \rho c Q dT/dx = -2\pi a q_w, \tag{2}$$

где Q — объемный расход, определяемый граничными условиями задачи; $Q = \pi a_1^2 V_1$ (a_1 и V_1 — радиус и скорость волокна, поступающего на приемное устройство). С учетом уравнения неразрывности преобразуем уравнения количества движения и распределения тепла (2) к виду

$$\frac{1}{2V}\frac{dV}{dx} = C\exp(-U/RT), \quad \frac{dT}{dx} = \frac{A_w}{\sqrt{V}}, \tag{3}$$

где C — постоянная интегрирования; $A_w = -(2q_w/\rho c)\sqrt{\pi/Q}$. (В дальнейшем будем обозначать тепловой поток в области заготовки $q_w = q < 0$ и соответственно $A_w = A$; на стадии вытягивания, где происходит охлаждение, $q_w = q' > 0$ и соответственно $A_w = A'$.)

Вводя в рассмотрение функцию $\varphi = \sqrt{V}$, получим из (3) систему

$$d\varphi/dx = C\varphi\exp(-U/RT), \quad dT/dx = A_w/\varphi. \tag{4}$$

Выбирая в качестве переменной T, имеем

$$d\varphi/dT = C\varphi^2/A_w \exp(-U/RT). \tag{5}$$

Будем считать, рассматривая формование из заготовки, что на участке некоторой, пока не определенной, длины l в заготовке происходит нагрев стекла от начальной температуры T_0 до температуры T_p, а на стадии вытяжки на участке пока не определенной длины l_1 до приемного устройства температура волокна падает до T_1. Вообще говоря, заданными могут быть l и l_1, а величины T_p и T_1 должны быть определены, но поскольку в результате решения задачи будут получены зависимости длин l и l_1 от соответствующих температур, то принятая постановка задачи является просто более удобной.

Обозначая $\varphi_0 = \sqrt{V_0}$ и интегрируя (5), получим

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varphi^2} = C\int_{T_0}^{T} A^{-1}\exp\left(-U/R\tilde{T}\right)d\tilde{T}. \tag{6}$$

Подынтегральная функция $A^{-1}\exp(-U/R\tilde{T})$ в (6) при достаточно больших значениях энергии активации U (что имеет место в действительности [2]) вследствие существенной нелинейности закона Аррениуса изменяется на интервале $T_0 \leqslant \tilde{T} \leqslant T$ лишь в узком пограничном слое вблизи T вне зависимости от характера изменения A^{-1} с $\tilde{T}$; тепловой поток — степенная функция $\tilde{T}$. Это позволяет использовать метод Лапласа [8] и получить асимптотическое выражение для интеграла в виде

$$\int_{T_0}^{T} A^{-1}\exp\left(-U/R\tilde{T}\right)d\tilde{T} = \frac{A^{-1}(T)\,RT^2}{U}\exp(-U/RT) \simeq$$

$$\simeq \frac{A^{-1}(T_p)\,RT_p^2}{U}\exp(-U/RT_p)\exp\left[\frac{U}{RT_p^2}(T - T_p)\right].$$

Здесь приближенное второе равенство получено с использованием метода разложения Д. А. Франк-Каменецкого [9]. В результате получается хорошее приближение, когда T близко к T_p; в противном случае как сама функция, так и ее приближение по [9] близки к нулю, и, следовательно, приближение вновь удовлетворительно.

Таким образом, понимая под A значение $A(T_p)$, получаем связь скорости с температурой в заготовке в виде

$$(7)\qquad \frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\varphi_0}-\frac{C}{A}\frac{\exp(-U/RT_p)}{U/RT_p^2}\exp\left[\frac{U}{RT_p^2}(T-T_p)\right].$$

Подставляя (7) во второе уравнение (4) и интегрируя с учетом граничного условия $x=0$, $T=T_0$, находим зависимость температуры в заготовке от продольной координаты

$$(8)\qquad \frac{(T-T_0)\varphi_0}{A}-\frac{\varphi_0}{AU/RT_p^2}\ln\left\{1-\frac{C\exp(-U/RT_p)\varphi_0}{AU/RT_p^2}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[\frac{U}{RT_p^2}(T-T_p)\right]\right\}=x.$$

Введем в рассмотрение вместо неизвестной константы C величину скорости в конце заготовки (в конце области нагрева) V_p (и $\varphi_p=\sqrt{V_p}$), также пока неизвестную. С учетом (7) получаем

$$(9)\qquad C=\left(\frac{1}{\varphi_0}-\frac{1}{\varphi_p}\right)(AU/RT_p^2)\exp(U/RT_p).$$

Кроме того, с использованием (8) получим зависимость длины зоны нагрева l от T_p:

$$(10)\qquad l=\frac{(T_p-T_0)\varphi_0}{A}-\frac{\varphi_0}{AU/RT_p^2}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi_p}.$$

Тем самым установлена связь длины l с T_p.

Переходя в (7), (8) к безразмерным переменным и используя уравнение неразрывности, получим с учетом (8), (9) параметрическую зависимость радиуса заготовки в зоне нагрева от продольной координаты

$$(11)\qquad \bar a=\sqrt{E}-(\sqrt{E}-\bar a_p)\exp[\theta(\bar T-1)],$$
$$\bar x=[\bar T-\bar T_0-\theta^{-1}\ln\{1-(1-\bar a_p/\sqrt{E})\exp[\theta(\bar T-1)]\}]L^*/L.$$

Здесь радиус отнесен к a_1; температура — к T_p; x — к полной длине формуемого волокна $L=l+l_1$; $\bar a_p$ — безразмерное значение радиуса в конце зоны нагрева (пока неизвестное); E — кратность вытяжки, равная $V_1/V_0=(a_0/a_1)^2$. Кроме того,

$$L^*=-\rho cT_pQ/2q\pi a_0,\quad \theta=U/RT_p,$$
$$l=L^*[1-\bar T_0+\theta^{-1}\ln(\sqrt{E}/\bar a_p)]\ (q=q(T_p)<0).$$

Неизвестная величина $\bar a_p$ будет определена после решения задачи о поведении волокна на стадии вытягивания, когда происходит его охлаждение ($q'>0$). Это последнее решение совместно с (11) должно обеспечивать непрерывность распределений радиуса, скорости и силы в сечении волокна по его длине, чем и определяется $\bar a_p$. На стадии вытягивания уравнение (5) интегрируется в виде

$$(12)\qquad \int\limits_{\varphi_p}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\varphi^2}=C\int\limits_{T_p}^{T}(A')^{-1}\exp\left(-U/R\tilde T\right)d\tilde T.$$

Здесь, как и ранее, $\varphi_p=\sqrt{V_p}$; V_p — неизвестная скорость в конце зоны нагрева, т. е. в начальном сечении участка вытягивания.

Используя метод Лапласа и разложение [9], находим

$$(13)\qquad \frac{1}{\varphi}=\frac{1}{\varphi_p}-\frac{C}{A'}\frac{\exp(-U/RT_p)}{U/RT_p^2}\left\{\exp\left[\frac{U}{RT_p^2}(T-T_p)\right]-1\right\},$$
$$A'=A'(T_p).$$

С учетом граничного условия на приемном устройстве $\varphi=\varphi_1=\sqrt{V_1}$ при $T=T_1$ получаем из (13)

(14) $$C = \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_p}\right)(A'U/RT_p^2)\exp(U/RT_p).$$

Непрерывность распределения силы вдоль волокна обеспечивается равенством выражений (9), (14): сила в сечении $P = 6\mu_0 QC$. Следовательно, $(1/\varphi_0 - 1/\varphi_p)A = (1/\varphi_1 - 1/\varphi_p)A'$. Найдя из последнего равенства φ_p и воспользовавшись постоянством объемного расхода вдоль волокна, получаем для $\bar{a}_p$ выражение

(15) $$\bar{a}_p = (\sqrt{E} - A'/A)/(1 - A'/A).$$

С использованием (15) равенства (11) позволяют определить профиль заготовки в зоне нагрева. Отметим, что $A'/A < 0$.

Воспользовавшись связью скорости с температурой, описываемой в зоне охлаждения и вытягивания волокна соотношениями (13), (14), с помощью уравнения неразрывности можем получить зависимость радиуса от температуры. Затем, интегрируя второе уравнение (4), получим распределение температуры вдоль этой зоны:

(16) $$\bar{a} = \bar{a}_1\left[1 - \frac{1-\sqrt{E}}{\sqrt{E} - A'/A}\{\exp[\theta(\bar{T}-1)] - 1\}\right],$$

$$\bar{x} = \frac{l}{L} + \frac{\sqrt{E}L^*}{L}\frac{A}{A'}\left[\bar{T} - 1 - \theta^{-1}\ln\left\{\frac{1 - A'/A}{\sqrt{E} - A'/A} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1-\sqrt{E}}{\sqrt{E} - A'/A}\exp[\theta(\bar{T}-1)]\right\}\right].$$

Чертой сверху по-прежнему обозначены безразмерные величины.

Полагая в последнем равенстве (16) $\bar{T} = \bar{T}_1$, вычисляем полную длину волокна от сечения, в котором начинается нагрев заготовки, до сечения, в котором волокно охлаждается до $\bar{T} = \bar{T}_1$:

$$L = l + l_1 = l + \sqrt{E}L^*\frac{A}{A'}\left[\bar{T}_1 - 1 - \theta^{-1}\ln\left(\frac{1 - A'/A}{\sqrt{E} - A'/A}\right)\right].$$

Тем самым установлена связь длины l_1 с T_1. Выражение для продольной силы в волокне, вытягиваемом из заготовки, имеет вид

$$P = \{[12\pi\mu_0 a_0(-q)\theta\exp(\theta)]/(\rho c T_p)\}\,(1 - \bar{a}_p/\sqrt{E}).$$

Определение стационарной конфигурации волокна, вытягиваемого из фильеры, совершенно аналогично рассмотрению, проведенному выше для зоны охлаждения волокна, вытягиваемого из заготовки. Результат имеет вид

(17) $$\bar{a} = \sqrt{E} - (1 - \sqrt{E})\{\exp[\theta(\bar{T} - 1)] - 1\},$$

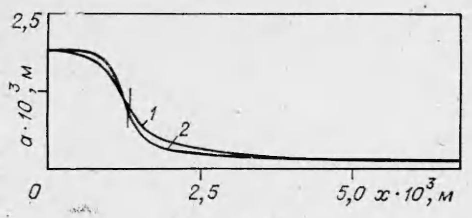
$$\bar{x} = \frac{\bar{T} - 1 - \theta^{-1}\ln\{E^{-1/2} - (E^{-1/2} - 1)\exp[\theta(\bar{T}-1)]\}}{\bar{T}_1 - 1 + (2\theta)^{-1}\ln E}.$$

Здесь по-прежнему радиус отнесен к a_1; температура — к начальному значению T_0, а масштабом для продольной координаты является

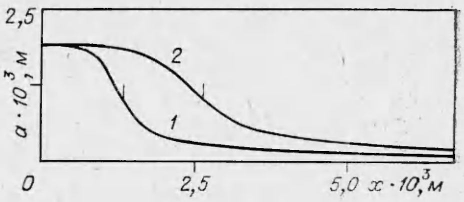
(18) $$L_1 = -\frac{\rho c T_p V_1 a_1}{2q'}\left(\bar{T}_1 - 1 + \frac{\theta^{-1}}{2}\ln E\right) \quad (q' = q'(T_0) > 0)$$

— длина, на которой температура волокна падает вследствие теплоотвода от известного заранее начального значения на срезе фильеры T_0 до конечного на приемном устройстве T_1. Наоборот, можно считать заданным значение L_1 и определять T_1 из (18).

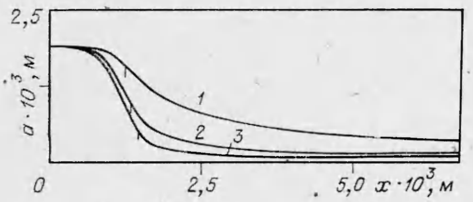
Таким образом, получено, что стационарная конфигурация волокна, вытягиваемого из заготовки, описывается соотношениями (11), (15), (16), а волокна, вытягиваемого из фильеры,— соотношениями (17). Получен-



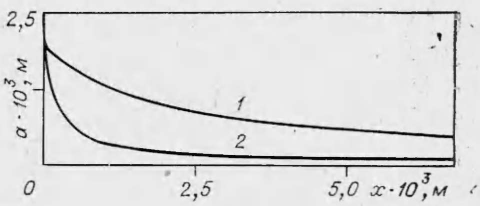
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ные результаты не позволяют путем предельного перехода $\theta \to 0$ прийти к известному изотермическому решению [6] $\bar{a} = (\sqrt{E})^{1-\bar{x}}$ (вытяжка из фильеры). Это естественно, так как все полученные здесь результаты соответствуют асимптотике $\theta \gg 1$.

Проиллюстрируем полученные результаты. В случае вытягивания стекловолокна из нагреваемой заготовки в расчетах полагалось: радиус заготовки $a_0 = 0{,}19 \cdot 10^{-2}$ м; ее температура $T_0 = 300$ К; температура, до которой нагревается заготовка, $T_p = 1873$ К; радиус волокна на приемном устройстве $a_1 = 6{,}25 \cdot 10^{-5}$ м, скорость $V_1 = 0{,}3$ м/с, температура $T_1 = 300$ К. Плотность стекла $\rho = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м³, его удельная теплоемкость $c = 1{,}043 \cdot 10^3$ Дж/(кг·град). Полагалось, что $q(T_p) = -92{,}7 \times \times 10^4 \varepsilon$ Дж/(м²·с), где ε — безразмерный множитель, имеющий смысл степени черноты стекла.

Конфигурации вытягиваемых волокон с различными значениями безразмерной энергии активации θ представлены на фиг. 2, где $\varepsilon = 1$, $q'/q = A'/A = -1$, кривой *1* отвечает значение $\theta = 7$, *2* — $\theta = 10$, вертикальные черточки показывают положение границы зоны нагрева. Видно, что с увеличением θ представление о квазиодномерности течения в области нагрева становится менее обоснованным. В приведенном примере кратность вытяжки весьма велика ($E = 924$); с уменьшением E квазиодномерный характер течения в области нагрева не нарушается при значениях θ, существенно бо́льших 10.

Уменьшение подводимого и отводимого потоков тепла при фиксированных значениях θ и отношения A'/A (q'/q) ведет к более плавному переходу от зоны нагрева к зоне вытяжки, о чем свидетельствуют данные фиг. 3, где $\theta = 7$, $A'/A = -1$, кривой *1* отвечает $\varepsilon = 1$, *2* — $\varepsilon = 0{,}5$.

Влияние относительной интенсивности отвода и подвода тепла на конфигурацию формуемого волокна иллюстрируется фиг. 4, где $\theta = 7$, $\varepsilon = 1$, кривой *1* отвечает $A'/A = -0{,}2$, *2* — $A'/A = -1$, *3* — $A'/A = -3$. Увеличение интенсивности теплоотвода при фиксированном потоке тепла к заготовке ведет к заметному ускорению формования волокна. Общая длина формуемого волокна в случае, когда задана температура T_1, резко уменьшается при увеличении теплоотвода. Однако интенсификация теплоотвода ведет также к заметному росту продольной силы в волокне, что может вызвать его разрыв. На фиг. 5 показаны рассчитанные профили волокон, формуемых вытяжкой из фильеры с радиусом $0{,}19 \cdot 10^{-2}$ м. Величины тепловых потоков $q'(T_0) = 92{,}7 \cdot 10^3$ Дж/(м²·с) (кривая *1*) и $q'(T_0) = 92{,}7 \cdot 10^4$ Дж/(м²·с) (кривая *2*), $T_0 = 1873$ К, а значения остальных параметров волокна те же, что в расчетах вытяжки из заготовки.

Поступила 26 X 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Paek U. C., Runk R. B.** Physical behavior of the neck-down region during furnace drawing of silica fibers.— J. Appl. Phys., 1978, vol. 49, N 8.
2. **Doremus R. H.** Glass science. N. Y.: Wiley, 1973.
3. **Зябицкий А.** Теоретические основы формования волокон. М.: Химия, 1979.
4. **Ентов В. М., Ярин А. Л.** Уравнения динамики струй капельной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5.
5. **Ентов В. М., Кордонский В. И. и др.** Исследование распада струй реологически сложных жидкостей.— ПМТФ, 1980, № 3.
6. **Matovich M. A., Pearson J. R. A.** Spinning a molten threadline. Steady-state viscous flows.— Ind. Eng. Chem. Fund., 1969, vol. 8, N 3.
7. **Kase S.** Studies on melt spinning. IV. On the stability of melt spinning.— J. Appl. Polym. Sci., 1974, vol. 18, N 11.
8. **Евграфов М. А.** Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
9. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.

УДК 532.70 + 535.211

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ФРОНТА ВОЛНЫ ИСПАРЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Е. Б. Левченко, А. Л. Черняков

(Москва)

При воздействии на конденсированную среду мощного потока излучения в глубь вещества распространяется волна испарения. В тех случаях, когда толщина области перед фронтом волны, прогретой за счет теплопроводности, является малой по сравнению с характерными размерами рассматриваемой системы, вообще говоря, возможно осуществление квазистационарного режима, при котором скорость движения фронта волны определяется мгновенным значением плотности потока энергии, поглощаемой в среде. Фактически процесс разрушения материалов при достаточно больших интенсивностях потока энергии (для металлов — при $Q > 10^5$—10^6 Вт/см^2), как правило, сопровождается различными нестационарными явлениями, такими как автоколебания в потоке газа, выброс вещества в виде капель и т. п. [1], что, по-видимому, указывает на неустойчивость квазистационарного режима испарения.

В данной работе исследуется устойчивость плоского фронта волны испарения жидкости, рассматриваемого как поверхность разрыва термодинамических функций вещества. Аналогичная задача в теории медленного горения исследовалась Л. Д. Ландау [2], который открыл также механизм неустойчивости плоской волны химической реакции, связанный с развитием вихревых возмущений в потоке продуктов горения. Применительно к процессу испарения вещества мощным потоком излучения указанный механизм неустойчивости оказывается решающим для развития флуктуаций фронта с длинами волн, сравнимыми с диаметром пятна фокусировки излучения. Существенной особенностью процесса испарения, вследствие которой к последнему неприменимы непосредственно результаты, полученные в теории медленного горения [2, 3], является высокая скорость разлета паров, сравнимая со скоростью звука в газе. Учет сжимаемости паров, необходимый в этом случае, приводит к изменению как условий возникновения, так и характера развития неустойчивости плоского фронта волны испарения жидкости.

Выберем систему отсчета, в которой плоский фронт волны испарения покоится, и направим декартову ось z по нормали к фронту, так что область $z < 0$ заполнена жидкостью, а $z > 0$ — паром. В этой системе координат температурный профиль является стационарным и в отсутствие поглощения излучения в парах при поверхностном испарении имеет вид

$$T_0(z) = \begin{cases} T_{0l}(z), & z < 0, \\ T_{0g}(z) = \text{const}, & z > 0, \end{cases}$$

$$T_{0l} = T_{0S} \exp\left(\frac{v_l z}{\chi_l}\right) + \frac{Q}{\varkappa_l} \frac{e^{(v_l z/\chi_l)} - e^{\mu z}}{\mu - v_l/\chi_l},$$

где Q — плотность потока энергии; μ — коэффициент поглощения излучения; $\varkappa_l = \rho_l c_l \chi_l$ — теплопроводность; c_l, ρ_l — теплоемкость и плотность жидкости. Температура поверхности T_{0S} и скорость течения v_l определяются из закона сохранения энергии