ПМТФ, № 2, 1969

СМЕШАННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Б. Горский

(Саранск)

Рассматриваются пространственные смешанные течения газа с бесконечной проводимостью в продольном магнитном поле. Методом малых возмущений найдены приближенные уравнения магнитного потенциала скорости возмущения для всех возможных смешанных течений и получены некоторые их частные интегралы.

Смешанные течения идеально проводящего газа в продольном магнитном поле были сначала изучены для плоского случая М. Н. Коганом [1], Р. Пере [2], Р. Сибассом [3]. Они показали, что наложение магнитного поля приводит к возникновению новых, ранее не встречавшихся в обычной газодинамике, смешанных течений. Недавно эти выводы были распространены Н. Геффеном [4], М. Таджири [5] и автором [6] на газовые потоки с осевой симметрией.

1. Исследуем пространственные установившиеся адиабатические течения невязкого идеально проводящего газа. Будем считать, что на бесконечности вверх по течению параметры газа однородны и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ параллельна скорости потока $\mathbf{q}$. Тогда, как показал И. Имаи [7], $\mathbf{H}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны повсюду в потоке и движение газа описывается уравнениями

$$\nabla \rho \mathbf{q} = 0, \quad \nabla \times (1 - A^{-2})\, \mathbf{q} = 0, \quad \frac{1}{2} q^2 + \frac{k}{k+1} \frac{p}{\rho} = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность газа, k — показатель адиабаты, A — число Альфвена.

Из второго уравнения системы (1.1) следует существование магнитного потенциала Φ скорости, так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1 - A^{-2})\, v_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (1 - A^{-2})\, v_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (1 - A^{-2})\, v_z \tag{1.2}$$

причем v_x, v_y, v_z — компоненты скорости вдоль соответствующих осей декартовой системы координат. Тогда первое уравнение из (1.1) приводится к виду

$$\Phi_x^2 \Phi_{xx} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} + \Phi_z^2 \Phi_{zz} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + 2\Phi_x \Phi_z \Phi_{xz} + 2\Phi_y \Phi_z \Phi_{yz} +$$
$$+ L(q)(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) = 0$$
$$L(q) = M^{-2}(A^2 1 - M^2 - A^2) \tag{1.3}$$

где нижние индексы у потенциала означают дифференцирование по соответствующей координате, M — число Маха. В другой форме это точное уравнение движения было ранее получено И. Имаи [7] и И. М. Юрьевым [8].

Уравнение (1.3) является дифференциальным уравнением смешанного типа, причем, как нетрудно видеть, тип его меняется при переходе через поверхности, где $M = 1$, $A = 1$, $M^2 + A^2 = 1$. Таким образом, здесь тоже, как в плоском и осесимметричном случаях, имеются три переходные области, где течение носит существенно нелинейный характер. Поэтому для этих областей обычный метод линеаризации [9] непригоден. Нелинейность также проявляется вблизи поверхности $M = A = 1$ параболического вырождения уравнения (1.3). Найдем приближенные уравнения движения для каждой переходной области.

2. Метод малых возмущений позволяет найти более простые приближенные, но сохраняющие нелинейность, уравнения движения в переходных областях. Положим

$$v_x = q_* (1 + u), \quad v_y = q_* v, \quad v_z = q_* w \tag{2.1}$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости возмущения, а индекс $*$ обозначает критическое значение данной величины, соответствующее какому-либо переходному режиму. Тогда производные (1.2) можно представить в виде

$$\Phi_x = q_* (1 - A^{-2}) (1 + u), \quad \Phi_y = q_* (1 - A^{-2}) v, \quad \Phi_z = q_* (1 - A^{-2}) w \tag{2.2}$$

Теперь введем магнитный потенциал φ скорости возмущения

$$\Phi = q_* [(1 - A_*^{-2}) x + \varphi], \quad \Phi_x = q_* (1 - A_*^{-2} + \varphi_x),$$
$$\Phi_y = q_* \varphi_y, \quad \Phi_z = q_* \varphi_z \tag{2.3}$$

Сравнивая (2.2) и (2.3), получаем

$$\varphi_x = u + A_*^{-2} [1 - (1 + u) \rho \rho_*^{-1}], \quad \varphi_y = (1 - A_*^{-2} \rho \rho_*^{-1}) v$$
$$\varphi_z = (1 - A_*^{-2} \rho \rho_*^{-1}) w \tag{2.4}$$

Для нахождения приближенного уравнения какого-нибудь переходного режима подставляем в уравнение (1.3) значения (2.3), причем функцию $L(q)$ тоже выражаем с помощью формул (2.4) через производные потенциала φ, и оставляем в нем ведущие члены.

Так для трансзвуковой области ($M \to 1$), предполагая что

$$x = O(1), \quad y = O(\varepsilon^{-1/3}), \quad z = O(\varepsilon^{-1/3}), \quad \varphi = O(\varepsilon^{2/3}) \tag{2.5}$$

имеем

$$\varphi_x = u, \quad \varphi_y = (1 - A_*^{-2}) v, \quad \varphi_z = (1 - A_*^{-2}) w \tag{2.6}$$

и трансзвуковое уравнение движения принимает вид

$$(k + 1)(1 - A_*^{-2}) \varphi_x \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0 \tag{2.7}$$

где в формулах (2.5) ε — малый параметр. При исчезновении магнитного поля ($A_* = \infty$) оно превращается в известное уравнение Кармана.

В гиперкритической области ($M^2 + A^2 \to 1$), вводя оценки

$$x = O(1), \quad y = O(\varepsilon^{1/3}), \quad z = O(\varepsilon^{1/3}), \quad \varphi = O(\varepsilon^{4/3}) \tag{2.8}$$

получаем

$$\varphi_x = {}^1/_2 m [3 + (k - 2) M_*^2] u^2, \quad \varphi_y = - mv, \quad \varphi_z = - mw$$
$$m = M_*^2 (1 - M_*^2)^{-1} \tag{2.9}$$

и из (1.3) находим уравнение гиперкритического потока

$$n\varphi_x(\varphi_{yy}+\varphi_{zz})^2-\varphi_{xx}{}^2=0,\quad n=2M_*{}^{-2}(1-M_*{}^2)^{-1}[3+(k-2)M_*{}^2] \tag{2.10}$$

В трансальфвеновской области ($A\to 1$) положим

$$x=O(1),\quad y=O(\varepsilon^{-1}),\quad z=O(\varepsilon^{-1}),\ \varphi=O(\varepsilon^2) \tag{2.11}$$

Тогда здесь имеем

$$\varphi_x=M_*{}^2W,\quad \varphi_y=M_*{}^2vW,\quad \psi_z=M_*{}^2wW,$$
$$W=u+{}^1/_2(v^2+w^2)$$

и приближенное уравнение трансальфвеновского потока приводится к виду

$$[(1-M_*{}^{-2})\varphi_x{}^3-\varphi_y{}^2-\varphi_z{}^2]\varphi_{xx}+2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+$$
$$+2\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz}-\varphi_x{}^2(\varphi_{yy}+\varphi_{zz})=0 \tag{2.12}$$

Наконец, в трансзвуковой — трансальфвеновской области ($M\to 1$, $A\to 1$) аналогично получаем

$$x=O(1),\quad y=O(\varepsilon^{-1}),\quad z=O(\varepsilon^{-1}),$$
$$\varphi=O(\varepsilon),\ \varphi_x=u,\quad \varphi_y=uv,\quad \varphi_z=uw$$

а уравнение движения принимает вид (2.13)

$$(k+1)\varphi_x{}^4-\varphi_y{}^2-\varphi_z{}^2]\varphi_{xx}+2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy}+2\varphi_x\varphi_z\varphi_{xz}-\varphi_x{}^2(\varphi_{yy}+\varphi_{zz})=0$$

Легко видеть, что из (2.7), (2.10), (2.12), (2.13) как частные случаи получаются соответствующие уравнения плоских [3] и осесимметричных [6] смешанных течений.

3. Приведем несколько частных решений полученных уравнений движения в переходных областях. Рассмотрим вначале трансзвуковое уравнение (2.7). Оно имеет интеграл

$$\varphi=\alpha x^2+\lambda[(\alpha^2+B)y^2+(\alpha^2-B)z^2]x+\lambda^2\{[{}^1/_6\alpha(\alpha^2+B)+D]y^4+$$
$$+[{}^1/_6\alpha(\alpha^2-B)+D]z^4-6Dy^2z^2+C(y^2-z^2)\} \tag{3.1}$$

очень похожий на решение О. С. Рыжова [10]. Здесь α, B, C, D — произвольные постоянные, $\lambda=(k+1)(1-A_*{}^{-2})$. Так как в (3.1) входят только четные степени y и z, то описываемое им течение через сопло обладает двумя плоскостями симметрии $y=0$ и $z=0$. Как частные случаи решение (3.1) содержит плоский (при $B=\alpha^2$, $C=D=0$) и осесимметричный (при $B=C=D=0$) потоки через сопло.

Найдем проекцию u скорости возмущения на ось x

$$u=\varphi_x=2\alpha x+\lambda[(\alpha^2+B)y^2+(\alpha^2-B)z^2] \tag{3.2}$$

Отсюда видно, что постоянная α пропорциональна градиенту скорости вдоль оси сопла (оси x). Положим $\alpha>0$. Это означает, что поток ускоряется в направлении возрастания координаты x. Из (3.2) легко определяется форма звуковой поверхности $u=0$

$$x=-{}^1/_2\alpha^{-1}(k+1)(1-A_*{}^{-2})[(\alpha^2+B)y^2+(\alpha^2-B)z^2] \tag{3.3}$$

Следовательно, при $|B|<\alpha^2$ — это эллиптический параболоид, при $|B|=\alpha^2$ — параболический цилиндр, при $|B|>\alpha^2$ — гиперболический параболоид. Теперь из (3.1) с помощью формул (2.6) находим поверхности $v=0$ и $w=0$

$$y=0,\ x=-\lambda(\alpha^2+B)^{-1}\{[{}^1/_3\alpha(\alpha^2+B)+2D]y^2-6Dz^2+C\}\ (v=0) \tag{3.4}$$

$$z=0,\ x=-\lambda(\alpha^2-B)^{-1}\{[{}^1/_3\alpha(\alpha^2-B)+2D]z^2-6Dy^2-C\}\ (w=0) \tag{3.5}$$

Таким образом, эти поверхности могут быть эллиптическими и гиперболическими параболоидами, параболическими цилиндрами и плоскостями, не проходящими в общем случае через центр сопла ($x=y=z=0$).

Для разыскания характеристик $x = x(y, z)$ имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \lambda\varphi_x = 2\lambda\alpha x + \lambda^2[(\alpha^2 + B)y^2 + (\alpha^2 - B)z^2]$$

Отсюда следует, что характеристиками, проходящими через центр сопла, будут четыре поверхности

$$x = {}^1/_4(k+1)(1 - A_*^{-2})[(\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2 + 4B})y^2 + (\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2 - 4B})z^2] \tag{3.6}$$

Интересно отметить, что при $A_* > 1$ (сверхальфвеновский поток) форма звуковой поверхности и характеристик качественно такая же, как и в обычной трансзвуковой газодинамике [10]. Но при $A_* < 1$ (доальфвеновский поток) указанные поверхности имеют направление, прямо противоположное предыдущему случаю.

Теперь приведем частное решение для уравнения (2.10) гиперкритического потока

$$\varphi = {}^1/_{12}\alpha^2x^3 + n^{-1/2}[({}^1/_4\alpha + B)y^2 + ({}^1/_4\alpha - B)z^2] \tag{3.7}$$

где α, B — новые произвольные постоянные. Оно тоже описывает течение в окрестности поверхности перехода ($M^2 + A^2 = 1$) сопла с двумя плоскостями симметрии. В частности, при $B = {}^1/_4\alpha$ и $B = 0$ из (3.7) получаем интегралы, определяющие поток соответственно через плоское и осесимметричное сопла [6]. Используя формулы (2.9), находим компоненты u, v, w

$$u = \alpha n^{-1/2} M_*^{-2}x,\ v = 2n^{-1/2}(1 - M_*^{-2})({}^1/_4\alpha + B)\,y,\ w = 2n^{-1/2}(1 - M_*^{-2})({}^1/_4\alpha - B) \tag{3.8}$$

Отсюда вытекает, что поверхностью перехода ($u = 0$) будет плоскость $x = 0$, а $v = 0$ и $w = 0$ на плоскостях $y = 0$ и $z = 0$.

Для нахождения характеристик $F(x, y, z) = 0$ имеем уравнение

$$F_x^2 = \sqrt{n\varphi_x}\,(F_y^2 + F_z^2) \tag{3.9}$$

А так как производная φ_x из (3.7) совпадает с φ_x, найденной для плоского или осесимметричного случаев, то и характеристики, выходящие из поверхности перехода, здесь такие же. Таким образом, это поверхности вращения, образованные полукубическими параболами с точками возврата на плоскости $x = 0$ и с осями симметрии, параллельными оси x

$$x^3 - {}^9/_2\alpha^{-1}n^{-1/2}[(y + c_1)^2 + (z + c_2)^2] = 0 \tag{3.10}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность С. В. Фальковичу за внимание к работе.

Поступила 28 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. К о г а н М. Н. О магнитогидродинамических течениях смешанного типа. ПММ, 1961, т. 25, № 1, стр. 132—137.
2. P e y r e t R. Regimes de transition elliptique — hyperbolique dans certains ecoulements de magnetodynamique des fluides. J. Mecan., 1962, vol. 1, No 2, pp. 167—178.
3. S e e b a s s R. Mixed flows in magnetogasdynamics. Sympos. Transsonicum. Aachen, 1962. Berlin — Göttingen — Heidelberg. Springer — Verlag., 1964, pp. 471—490.
4. G e f f e n N. Magnetogasdynamic flows with shock waves. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 4, pp. 566—571.
5. T a j i r i M. The flow of a perflectly conducting gas through an axially simmetric Laval nozzle. Bull. univ. Osaka Prefect., 1965, A14, No 1, pp. 75—81.
6. Г о р с к и й В. Б. Осесимметричные смешанные течения в магнитной газодинамике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, стр. 64—71.
7. I m a i I. General principles of magneto-fluid dynamics. Suppl. Progr. theor. phys., 1962, No. 24, pp. 1—34.
8. Ю р ь е в И. М. Некоторые решения уравнений плоского течения газа в параллельном магнитном поле. Инж. ж., 1961, т. 1, № 4, стр. 133—137.
9. К о г а н М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. 23, № 1.
10. Р ы ж о в О. С. О газовых течениях в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, № 3.