

УДК 538.931

Аналитическое и численное моделирование прогрева композитной капли «углеводород – вода»*

И.В. Деревич, Д.И. Матюхина

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

E-mail: DerevichIgor@bmstu.ru

Проведено сопоставление аналитического и численного решений о прогреве композитной капли «углеводород – вода», где микрокапля воды расположена в центре сферической капли углеводорода. На границе раздела сред выполняются условия сопряжения: непрерывность температуры и теплового потока. На внешней границе капли задается условие теплообмена с горячим газом, обтекающим каплю. Аналитическая формула основана на разложении решения в ряд по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Построена оригинальная консервативная разностная схема численного интегрирования уравнений теплопроводности внутри композитной капли с учетом скачкообразного изменения теплофизических свойств на границе раздела сред «углеводород – вода». Результаты расчетов, полученные по аналитической формуле и методом численного интегрирования, согласуются друг с другом. В численную схему включен радиационный перенос тепла и влияние испарения на коэффициент теплоотдачи. Представлено сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными.

Ключевые слова: композитное углеводородное топливо, задача Штурма – Лиувилля, условия сопряжения, сферические функции Бесселя, консервативная разностная схема.

Введение

Использование эмульсий органического топлива и воды перспективно с точки зрения снижения выбросов экологически вредных веществ и увеличения эффективности диспергирования капель органического топлива в результате вскипания микрокапель воды, расположенных внутри капли углеводорода [1–3]. Исследование композитных топлив проводятся как экспериментальным [4–6], так и теоретическим путем [7–12]. Эксперименты позволяют определить время микровзрыва капли углеводородного топлива. Предполагается, что одной из причин микровзрыва может быть вскипание микрокапель воды, находящихся внутри углеводорода.

Теоретические исследования проводятся обычно на основе трехмерной гидродинамики и массопереноса в композитных каплях [7, 8]. При этом расчеты требуют существенной затраты компьютерных ресурсов и не могут рассматриваться как инструмент

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00243, <https://rscf.ru/project/23-29-00243/>.

инженерного дизайна. Большую ценность имеют сравнительно простые модели, улавливающие основные физические черты явления и позволяющие проводить численное моделирование с использованием сравнительно простых алгоритмов. Такие простые модели представляют существенный практический интерес.

Для случая микровзрыва капля композитного топлива «углеводород – вода» простая и эффективная модель была предложена в работах [10–12]. Композитная капля в этой модели представляется сферической оболочкой из органического топлива, внутри которой строго по центру расположена микрокапля воды. По мере прогрева капли в потоке горячего газа повышается температура поверхности микрокапли воды. Считается, что микровзрыв композитного топлива произойдет тогда, когда на поверхности микрокапли воды будет достигнута температура кипения.

При моделировании пренебрегается конвективным движением жидкости внутри капли, что оправдано для мелких капель (диаметром $d_0 < 200$ мкм), так как за время прогрева таких капель — в течение миллисекунд до момента микровзрыва — конвективное движение внутри капли не успевает развиться. Для более крупных капель (диаметром порядка $d_0 \sim 1$ мм) время ожидания прогрева микрокапель воды до температуры кипения составляет порядка секунд. Возникающее конвективное движение жидких тяжелых углеводородов (мазут), обладающих существенной вязкостью, не приведет к заметному вкладу в интенсивность переноса тепла внутри капли по сравнению с теплопроводностью. Как показывают оценки, за промежуток времени от прогрева микрокапли воды до температуры кипения масса капли меняется незначительно. Поэтому расчет эволюции температуры внутри композитной капли проводится в рамках классического уравнения теплопроводности.

Задача имеет аналитическое решение, что позволяет использовать рассмотренную простую модель в практических инженерных приложениях. Ранее в работах [13, 14] также было получено точное аналитическое решение задачи о прогреве капли композитного топлива. Решение основывалось на стандартном подходе современной математической физики, в котором применяется разложение по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Для иллюстрации корректности полученной аналитической формулы в настоящей работе на основе метода конечных объемов разработан оригинальный алгоритм численного решения задачи о теплопереносе в композитной капле. Далее будет показано, что решения, полученные обоими методами, практически совпадают. Численное решение позволяет существенно расширить область исследуемых параметров. Например, не вызывает сложности включение в расчет зависимости теплофизических свойств композитной капли от параметров процесса. В численной модели учитывается перенос тепла за счет излучения и влияние испарения на коэффициент теплоотдачи для крупных капель, время прогрева которых достигает десятка секунд. В представленной работе подробно описывается методика построения консервативной разностной схемы численного алгоритма и проводится сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными.

Постановка задачи

Постановка задачи о прогреве композитной капли аналогична постановке для простой модели, предложенной ранее в работе [10] (эскиз задачи представлен в [13]). Рассматривается сферическая капля углеводорода радиусом R_0 , температура в сферической оболочке углеводорода составляет Θ_0 . Внутри капли углеводорода расположена микрокапля

воды радиусом R_W с температурой Θ_W . Везде далее величины, принадлежащие воде и углеводороду, обозначаются индексами O и W соответственно.

Композитная капля обтекается потоком газа, температура которого Θ_G существенно больше начальной температуры капли Θ_0 . Задается коэффициент теплоотдачи между горячим газом и поверхностью капли α_0 . В результате нагрева композитной капли температура поверхности микрокапли воды за время t_{boil} достигает температуры кипения $\Theta_{W\text{boil}}$.

Уравнение для температуры композитной капли и начальное распределение температуры имеют вид:

$$\rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad} \Theta), \quad \Theta|_{t=0} = \Theta_0, \quad (1)$$

здесь ρ, c, λ — плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности композитной капли; температуру воды и углеводорода обозначим как

$$\Theta(r, t) = \begin{cases} \Theta_W(r, t), & 0 \leq r \leq R_W, \\ \Theta_O(r, t), & R_W < r \leq R_O. \end{cases}$$

Теплофизические свойства углеводорода и воды различны:

$$\rho, c, \lambda = \begin{cases} \rho_W, c_W, \lambda_W, & 0 \leq r \leq R_W, \\ \rho_O, c_O, \lambda_O, & R_W < r \leq R_O. \end{cases}$$

На границе сред выполняются условия сопряжения — непрерывность температуры и теплового потока:

$$\Theta_W|_{r=R_W} = \Theta_O|_{r=R_W}, \quad -\lambda_W \frac{\partial \Theta_W}{\partial r} \Big|_{r=R_W} = -\lambda_O \frac{\partial \Theta_O}{\partial r} \Big|_{r=R_W}. \quad (2)$$

На поверхности капли ставится граничное условие конвективного теплообмена согласно гипотезе Ньютона. Учитывается, что тепло, переданное капле от горячего газа, расходуется на прогрев капли и испарение жидкости с ее поверхности. Перенос тепла за счет радиации будем моделировать следующим образом. Считаем, что поглощение теплового излучения происходит в узком приповерхностном слое углеводорода и далее распространяется вглубь капли за счет теплопроводности. С учетом этого механизма граничное условие на поверхности капли записывается следующим образом:

$$-\lambda_O \frac{\partial \Theta_O}{\partial r} \Big|_{r=R_O} + \rho_O \Delta H_O \frac{dR_O}{dt} = \alpha_0 (\Theta_O|_{r=R_O} - \Theta_G) + \varepsilon_O \sigma_{\text{SB}} (\Theta_O^4|_{r=R_O} - \Theta_G^4), \quad (3)$$

здесь ΔH_O — энтальпия фазового перехода, α_0 — коэффициент теплоотдачи при обтекании испаряющейся жидкой капли горячим газом, σ_{SB} — постоянная Стефана–Больцмана, ε_O — коэффициент абсорбции излучения.

Вследствие сферической симметрии в центре капли выполняется условие:

$$\frac{\partial \Theta_W}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (4)$$

В экспериментах [4 – 6] было установлено, что за время прогрева композитных капель до температуры кипения воды объем капли углеводорода за счет испарения меняется незначительно и в дальнейшем радиус капли будет считаться постоянным: $dR_0/dt = 0$.

Аналитическое решение задачи

Опишем аналитическое решение задачи, полученное в работах [13 – 14] и справедливое для мелких капель диаметром $d_0 < 200$ мкм, для которых вклад радиационного переноса тепла существенно меньше, чем конвективного.

Уравнение (1), условия сопряжения (2), граничное условие (3) без учета изменения объема капли и излучения, а также условие симметрии (4) приводятся к безразмерному виду. Безразмерные температуры воды и углеводорода будут иметь вид: $\Theta_W^* = (\Theta_W - \Theta_G)/\Theta_G$, $\Theta_O^* = (\Theta_O - \Theta_G)/\Theta_G$. Безразмерная координата запишется как $r^* = r/R_0$. Безразмерное время будем определять как характерное время диффузии тепла в углеводороде: $t^* = \kappa_O t / R_0^2$ ($\kappa_O = \lambda_O / (\rho_O c_O)$) — коэффициент температуропроводности углеводорода).

В безразмерном виде уравнение для температуры в композитной капле имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta^*(r^*, t^*)}{\partial t^*} = \text{div} \left[\kappa^* \nabla \Theta^*(r^*, t^*) \right], \quad 0 \leq r^* \leq 1. \quad (5)$$

Безразмерная температура композитной капли различна в микрокапле воды и сферической оболочке из углеводорода:

$$\Theta^*(r^*, t^*) = \begin{cases} \Theta_W^*(r^*, t^*), & 0 \leq r^* \leq R_W^*, \\ \Theta_O^*(r^*, t^*), & R_W^* < r^* \leq 1, \end{cases}$$

где $R_W^* = R_W/R_0$ — безразмерный радиус микрокапли воды, κ^* — безразмерный коэффициент температуропроводности композитной капли, принимающий значения:

$$\kappa^* = \begin{cases} \kappa_W^*, & 0 \leq r^* \leq R_W^*, \\ 1, & R_W^* < r^* \leq 1, \end{cases}$$

здесь $\kappa_W^* = \kappa_W/\kappa_O$ — безразмерный коэффициент температуропроводности воды, $\kappa_W = \lambda_W / (\rho_W c_W)$.

Условия сопряжения (2) на границе раздела сред также переписем в безразмерной форме. Условие непрерывности температуры на межфазной границе будет иметь вид:

$$\Theta_W^*(r^*, t^*) \Big|_{r^*=R_W^*} = \Theta_O^*(r^*, t^*) \Big|_{r^*=R_W^*}. \quad (6)$$

Условие непрерывности теплового потока на межфазной границе будет определяться как

$$-\lambda_W^* \frac{\partial \Theta_W^*(r^*, t^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=R_W^*} = -\frac{\partial \Theta_O^*(r^*, t^*)}{\partial r^*} \Big|_{r^*=R_W^*}, \quad (7)$$

где $\lambda_W^* = \lambda_W/\lambda_O$ — безразмерный коэффициент теплопроводности воды.

Граничное условие на поверхности сферической капли неизменного объема без учета тепловой радиации (3) и граничное условие симметрии (4) примут вид:

$$\left[\frac{\partial \Theta_0^*(r^*, t^*)}{\partial r^*} + \alpha_0^* \Theta_0^*(r^*, t^*) \right]_{r^*=1} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_0^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = 0, \quad (8)$$

здесь $\alpha_0^* = \alpha_0 R_0 / \lambda_0$ — безразмерный коэффициент теплоотдачи с поверхности капли.

Начальное распределение температуры в композитной капле в безразмерном форме запишется как

$$\Theta_0^*(r^*) = \frac{\Theta_0(r) - \Theta_G}{\Theta_G}.$$

Аналитическая формула, описывающая динамику температуры в композитной капле, имеет вид разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, для которых условие ортогональности выглядит следующим образом:

$$(X_n^*, X_m^*) = \int_0^1 \frac{\lambda^*}{\kappa^*} X_n^*(r^*) X_m^*(r^*) r^{*2} dr^* = \|X_n^*\|^2 \delta_{n,m},$$

где норма собственных функций определяется как

$$\|X_n^*\|^2 = \int_0^1 \frac{\lambda^*}{\kappa^*} X_n^{*2}(r^*) r^{*2} dr^*.$$

Используя полученные результаты, запишем аналитическое решение задачи о прогреве композитной капли, которое имеет вид разложения по собственным функциям:

$$\Theta^*(r^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\omega_n^{*2} t^*) X_n^*(r^*), \quad (9)$$

здесь ω_n^* — собственные значения задачи Штурма–Лиувилля. Коэффициенты разложения A_n являются проекцией начального распределения температуры на одну из координатных осей в пространстве собственных функций:

$$\|X_n^*\|^2 A_n = (\Theta_0^*, X_n^*) = \int_0^1 \frac{\lambda^*}{\kappa^*} \Theta_0^*(r^*) X_n^*(r^*) r^{*2} dr^*.$$

В расчетах учитывается 31 член разложения по собственным функциям. Увеличение числа членов ряда не приводит к существенному изменению результатов расчетов.

При расчетах по формуле (9) задается диаметр капли углеводорода d_0 , а радиус микрокапли воды рассчитывается исходя из объемной доли воды χ_W . Также задаются температура Θ_G , скорость газа U_G и начальная температура капли Θ_0 . При выбранном значении времени на экране появляется распределение температуры в сечении капли. Время микровзрыва определяется при достижении поверхностью микрокапли воды температуры кипения.

Численное решение задачи

Рассмотрим процедуру численного решения задачи о прогреве композитной капли на основе консервативной разностной схемы. Идея интегрирования заключается в получении

для значений температуры в узлах сетки системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая затем интегрируется с использованием библиотечных программ.

В численном решении на основе инженерной методики [15, 16] влияние испарения на число Нуссельта композитной капли учитывается следующим образом:

$$\text{Nu}_O = \frac{\ln(1+B_O)}{B_O} \left(2 + 0,6 \text{Re}_O^{1/2} \text{Pr}^{1/3}\right), \quad B_O = \frac{c_{\text{pv}_O} \Theta_G}{\Delta H_O} \Theta_O^* \Big|_{r^*=1}, \quad (10)$$

здесь c_{pv_O} — изобарическая теплоемкость пара углеводорода на поверхности капли, Re_O — число Рейнольдса обтекания капли, Pr — число Прандтля газа, обтекающего каплю.

Далее необходимо учесть перенос тепла за счет излучения. В этом случае граничное условие (3) для капли постоянного диаметра в безразмерных переменных имеет вид:

$$-\frac{\partial \Theta_O^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \alpha_O^* \Theta_O^* \Big|_{r^*=1} + Q_{\text{rad}}^* \left[\left(1 + \Theta_O^* \Big|_{r^*=1}\right)^4 - 1 \right], \quad Q_{\text{rad}}^* = \frac{\varepsilon_O \sigma_{\text{SB}} R_O \Theta_G^3}{\lambda_O}. \quad (11)$$

По смыслу безразмерный критерий Q_{rad}^* равен отношению теплового потока, поступающего к поверхности за счет излучения, к тепловому потоку, переносимому в объем капли за счет теплопроводности:

$$Q_{\text{rad}}^* = \frac{\varepsilon_O \sigma_{\text{SB}} \Theta_G^4}{\lambda_O \Theta_G / R_O}.$$

Опишем технологию получения консервативной разностной схемы. На радиусе капли задаем узлы сетки. Общее число узлов равно N_O , число узлов по радиусу микрокапли воды равно N_W . Координаты узлов рассчитываются как

$$r_i^* = \frac{i-1}{N_W-1} R_W^*, \quad i=1, \dots, N_W,$$

$$r_i^* = R_W^* + (1-R_W^*) \frac{i-N_W}{N_O-N_W}, \quad i=N_W+1, \dots, N_O.$$

Распределение температуры между двумя узлами сетки аппроксимируем следующим образом:

$$\Theta^*(r^*, t^*) = \Theta_i^* + (\Theta_{i+1}^* - \Theta_i^*) \frac{1-r_i^*/r^*}{1-r_i^*/r_{i+1}^*}, \quad r^* \in [r_i^*, r_{i+1}^*], \quad (12)$$

где $\Theta_i^* = \Theta^*(r_i^*, t^*)$.

Отметим, что распределение температуры между соседними узлами (12) удовлетворяет решению уравнения Лапласа в сферической системе координат: $\Delta \Theta^*(r^*, t^*) = 0$.

Построение ОДУ в узле N_W , лежащем на границе раздела сред, выполним путем интегрирования уравнения баланса тепла (5) по сферическому объему вблизи границы раздела сред:

$$\int_{r_{N_W-1/2}^*}^{r_{N_W+1/2}^*} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} r^{*2} dr^* = \int_{r_{N_W-1/2}^*}^{r_{N_W+1/2}^*} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa^* r^{*2} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r^*} \right) r^{*2} dr^*, \quad (13)$$

здесь $r_{i+1/2}^* = \frac{r_{i+1}^* + r_i^*}{2}$, $r_{i-1/2}^* = \frac{r_i^* + r_{i-1}^*}{2}$.

Для интеграла в левой части равенства (13) запишем аппроксимацию:

$$\int_{r_{N_W-1/2}^*}^{r_{N_W+1/2}^*} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} r^{*2} dr^* \approx \frac{1}{3} (r_{N_W+1/2}^{*3} - r_{N_W-1/2}^{*3}) \frac{d\Theta_{N_W}^*}{dt^*}.$$

Баланс тепловых потоков в (13) вычисляем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{r_{N_W-1/2}^*}^{r_{N_W+1/2}^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa^* r^{*2} \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \right) dr^* = \\ & = \int_{r_{N_W-1/2}^*}^{r_{N_W}^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa_W^* r^{*2} \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \right) dr^* + \int_{r_{N_W}^*}^{r_{N_W+1/2}^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial \Theta}{\partial r^*} \right) dr^* = \\ & = \kappa_W^* r^{*2} \frac{\partial \Theta_W^*}{\partial r^*} \Big|_{r=r_{N_W}^*} - r^{*2} \frac{\partial \Theta_O^*}{\partial r^*} \Big|_{r=r_{N_W}^*} + r^{*2} \frac{\partial \Theta_O^*}{\partial r^*} \Big|_{r=r_{N_W+1/2}^*} - \kappa_W^* r^{*2} \frac{\partial \Theta_W^*}{\partial r^*} \Big|_{r=r_{N_W-1/2}^*}. \end{aligned}$$

Используя условия непрерывности температуры (6) и теплового потока на границе раздела сред (7), получаем выражение для интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_{r_{N_W-1/2}^*}^{r_{N_W+1/2}^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa^* r^{*2} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r^*} \right) dr^* = \\ & = r^{*2} \frac{\partial \Theta_O^*}{\partial r^*} \Big|_{r=r_{N_W+1/2}^*} - \kappa_W^* r^{*2} \frac{\partial \Theta_W^*}{\partial r^*} \Big|_{r=r_{N_W-1/2}^*} + r_{N_W}^{*2} \lambda_W^* \frac{\partial \Theta_W^*}{\partial r^*} \Big|_{r=r_{N_W}^*} \left(\frac{1}{\rho_W^* c_W^*} - 1 \right). \end{aligned}$$

В результате вычисления градиентов температуры по аппроксимации температуры между двумя узлами (12) получаем ОДУ для температуры на границе раздела сред:

$$\frac{1}{3} (r_{N_W+1/2}^{*3} - r_{N_W-1/2}^{*3}) \frac{d\Theta_{N_W}^*}{dt^*} = r_{N_W}^* \frac{\Theta_{N_W+1}^* - \Theta_{N_W}^*}{1 - r_{N_W}^*/r_{N_W+1}^*} - \lambda_W^* r_{N_W-1}^* \frac{\Theta_{N_W}^* - \Theta_{N_W-1}^*}{1 - r_{N_W-1}^*/r_{N_W}^*}. \quad (14)$$

Система ОДУ для внутренних узлов сетки $i=2, \dots, N_W-1, N_W+1, \dots, N_O-1$ получается при интегрировании уравнения (5) по окрестности узла r_i^* :

$$\int_{r_{i-1/2}^*}^{r_{i+1/2}^*} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} r^{*2} dr^* = \int_{r_{i-1/2}^*}^{r_{i+1/2}^*} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa^* r^{*2} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r^*} \right) r^{*2} dr^*.$$

В результате проведения вычислений, аналогичных предыдущему случаю, записываем систему ОДУ:

$$\frac{1}{3} (r_{i+1/2}^{*3} - r_{i-1/2}^{*3}) \frac{d\Theta_i^*}{dt^*} = \kappa^* r_i^* \frac{\Theta_{i+1}^* - \Theta_i^*}{1 - r_i^*/r_{i+1}^*} - \kappa^* r_{i-1}^* \frac{\Theta_i^* - \Theta_{i-1}^*}{1 - r_{i-1}^*/r_i^*}. \quad (15)$$

ОДУ для точки, лежащей в начале координат r_1^* , получается при вычислении баланса тепла на полуинтервале вблизи точки $r_1^* = 0$:

$$\int_{r_1^*}^{r_3^{*/2}} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} r^{*2} dr^* = \int_{r_1^*}^{r_3^{*/2}} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa_W^* r^{*2} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r^*} \right) r^{*2} dr^*.$$

Принимая во внимание условие симметрии в начале координат в формуле (8) $\partial \Theta^* / \partial r^* \Big|_{r^*=r_1^*} = 0$, получаем ОДУ в следующем виде:

$$\frac{1}{3} \left(r_{1+1/2}^{*3} - r_1^{*3} \right) \frac{d\Theta_1^*}{dt^*} = \kappa_W^* r_{1+1/2}^{*2} \frac{\Theta_2^* - \Theta_1^*}{r_2^* - r_1^*}. \quad (16)$$

Для точки, лежащей на поверхности капли $r_{N_0}^* = 1$, записываем выражение

$$\int_{r_{N_0-1/2}^*}^{r_{N_0}^*} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t^*} r^{*2} dr^* = \int_{r_{N_0-1/2}^*}^{r_{N_0}^*} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\kappa_O^* r^{*2} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r^*} \right) r^{*2} dr^*.$$

При вычислении интеграла в правой части учитываем граничное условие на поверхности капли (11). В результате получаем ОДУ для точки на поверхности капли:

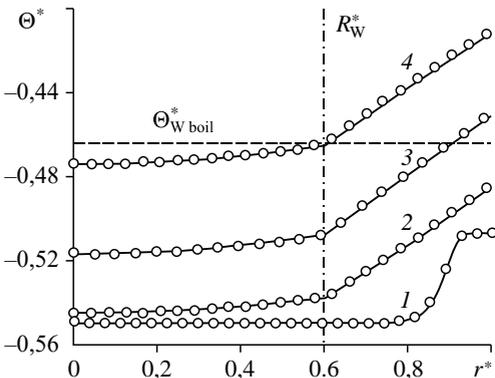
$$\frac{1}{3} \left(r_{N_0}^{*3} - r_{N_0-1/2}^{*3} \right) \frac{d\Theta_{N_0}^*}{dt^*} = -\alpha_O^* \Theta_{N_0}^* - Q_{rad}^* \left[\left(1 + \Theta_{N_0}^* \right)^4 - 1 \right] - r_{N_0-1}^* \frac{\Theta_{N_0}^* - \Theta_{N_0-1}^*}{1 - r_{N_0-1}^* / r_{N_0}^*}. \quad (17)$$

Система уравнений (14)–(17) интегрируется численно методом решения жестких систем ОДУ с использованием библиотечных программ MATLAB.

Результаты расчетов

Вначале приведем сопоставление результатов, полученных при расчете по аналитической формуле (9) и путем численного интегрирования системы ОДУ. В качестве модельного вещества выбран тяжелый углеводород н-додекан $C_{12}H_{26}$ [15].

На рис. 1 для модельного начального распределения представлено сравнение результатов расчета, полученных по аналитической формуле и путем численного интегрирования. В расчетах пренебрегается излучением и влиянием испарения на число Нуссельта (10) ($\varepsilon_O = 0, B_O = 0$).



Расчеты проведены для капли диаметром $d_O = 100$ мкм с объемной концентрацией воды $\chi_W = 22$ %. Температура газа

Рис. 1. Графики динамики безразмерной температуры композитной капли с модельным начальным распределением.

Сплошные кривые — результат решения системы разностных уравнений, символы — аналитическое решение, штриховая линия $\Theta_{W\text{ boil}}^*$ обозначает безразмерную температуру кипения воды: $t^* = 0$ (1), 0,05 (2), 0,15 (3), 0,23 (4).

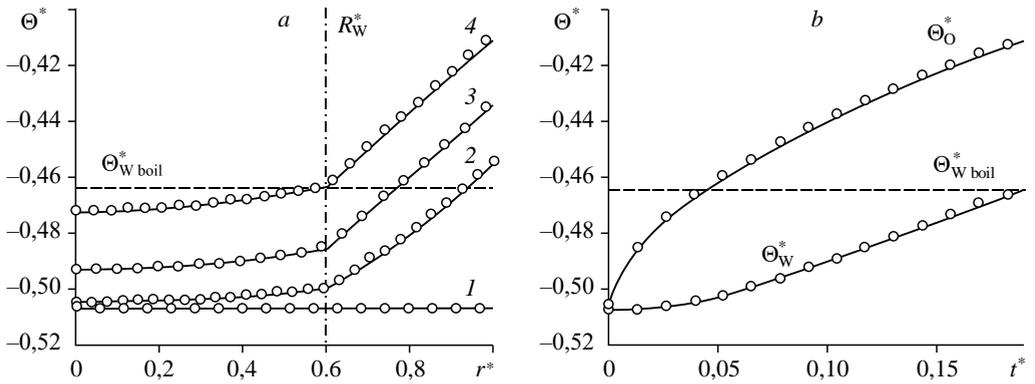


Рис. 2. Сравнение результатов расчета распределения температуры внутри композитной капли (а) и на поверхности микрокапли воды и капли углеводорода (б).

и скорость составляют: $\Theta_G = 700$ К, $U_G = 2$ м/с. Из рис. 1 видно, что результаты расчетов двумя рассмотренными методами практически совпадают. Это является свидетельством корректности предложенного аналитического метода расчета.

На рис. 2 приведены для сопоставления результаты расчетов изменения температуры в сечении композитной капли R_W^* (рис. 2а), а также на поверхности воды и углеводорода (рис. 2б) при начальной температуре капли $\Theta_0 = 443$ К. Видно, что результаты расчетов также практически совпадают.

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость времени ожидания прогрева композитной капли с объемной концентрацией воды $\chi_W = 22\%$ от начальной температуры капли и температуры газа. На рис. 3а показано влияние начальной температуры капли на время наступления микровзрыва. Снижение начальной температуры капли приводит к росту времени ожидания микровзрыва. Также здесь показаны результаты расчетов по модели [10], которые лежат заметно ниже экспериментальных данных. Снижение температуры газа ожидаемо увеличивает промежуток времени до теплового взрыва (рис. 3б). Ранее в исследовании [14] были приведены результаты расчетов по аналитической формуле

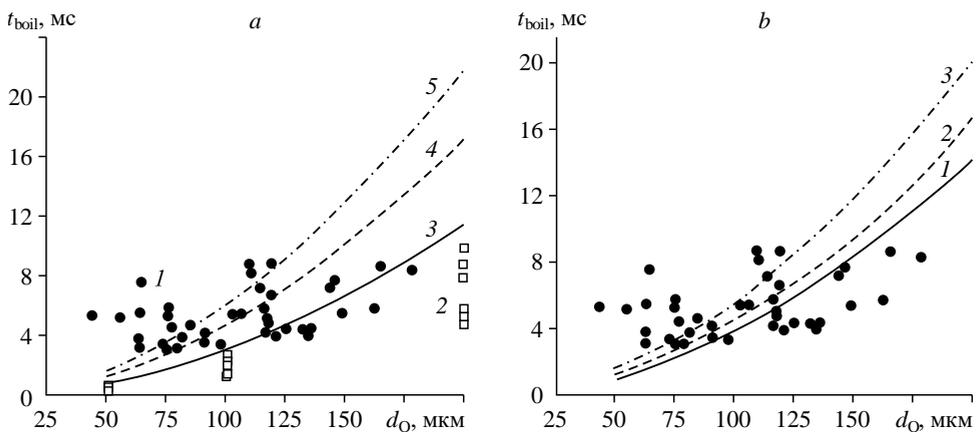


Рис. 3. Влияние начальной температуры капли на время ожидания микровзрыва (а) и влияние температуры газа на время до микровзрыва (б).

а: $\Theta_G = 700$ К, $U_G = 2$ м/с; символы — данные экспериментов из работы [10] (1) и расчетов по методике 10 (2); 3–5 — результаты расчетов по формуле (9): $\Theta_0 = 363$ (3), 353 (4), 343 (5) К;
 б: $\Theta_0 = 363$ К, $U_G = 2$ м/с; символы — экспериментальные данные [10],
 1–3 — результаты расчетов по формуле (9): $\Theta_G = 650$ (1), 600 (2), 500 (3) К.

для разных температур газа при фиксированной начальной температуре капли. Чтобы подчеркнуть эффективность и простоту представленного в настоящей работе аналитического решения, на рис. 3 приводятся результаты расчетов в более широкой области параметров.

Расчеты для крупных капель, размер которых составляет порядка 1 мм, проводились на основе численного решения системы ОДУ. Оценки показывают, что для крупных капель перенос тепла за счет радиации становится сопоставим с конвективным. Поэтому учитывается влияние как радиации, так и испарения на число Нуссельта (10). Коэффициент абсорбции излучения ϵ_0 задается равным 0,5. В крупных каплях, как видно, например, из экспериментальных исследований [6], наблюдается слабое конвективное движение жидкости внутри капли. Мы полагаем, что внутренняя конвекция тяжелого углеводорода (мазута) не приведет к существенному изменению коэффициентов теплопереноса. В экспериментах капли удерживались на специально скрученных проволочках и их форма не сильно отличалась от сферической.

На рис. 4 приведены для сопоставления результаты численного решения задачи с экспериментальными данными [6]. На рис. 4а представлены результаты расчетов, соответствующие условиям экспериментов. Капли диаметром $d_0 = 3$ мм (объем $V_0 = 15$ мл) с объемным содержанием воды $\chi_w = 30\%$ помещались в поток горячего газа, движущегося со скоростью $U_G = 2$ м/с. Видно, что результаты расчетов (рис. 4а) коррелируют с опытными данными. Рисунок 4б иллюстрирует зависимость времени ожидания микровзрыва от объемной концентрации воды в композитной капле. Результаты расчета показывают, что время до микровзрыва слабо зависит от объемной концентрации воды. Это можно объяснить двумя причинами. С одной стороны, рост объемной концентрации воды приводит к снижению времени диффузии тепла к поверхности микрокапли воды. С другой стороны, теплоемкость воды почти в два раза выше теплоемкости тяжелого углеводорода. Поэтому рост массы воды увеличивает время прогрева микрокапли воды до температуры кипения. Авторы считают, что качественное расхождение в результатах расчета и эксперимента связано с отличием в теплофизических свойствах н-додекана,

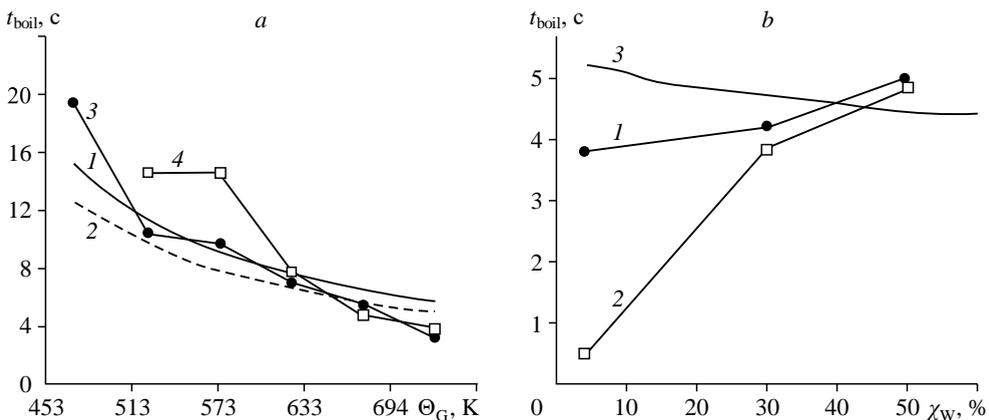


Рис. 4. Влияние температуры газа на время до микровзрыва при различных температурах газа при $\Theta_0 = 290$ К (а) и зависимость времени ожидания микровзрыва от объемной концентрации воды при $\Theta_G = 623$ К (б).

а: символы 1, 2 — экспериментальные данные работы [6],
 кривые — расчет по численной схеме ОДУ: $U_G = 1$ (3), 2 (4) м/с;

б: символы 1, 2 — экспериментальные данные работы [6], кривая 3 — результаты расчета при $U_G = 1$ м/с.

для которого проводился расчет, и реальных тяжелых углеводородов, использованных в экспериментах [6]. В работе [14] было представлено сопоставление результатов расчетов по строгой аналитической модели с экспериментальными данными [6]. Ввиду объективной ограниченности аналитического решения по сравнению с численным скорость обтекания горячим газом композитной капли здесь была выбрана $U_G = 0,5$ м/с, что ниже экспериментальных значений.

Заключение

Выполнено сопоставление результатов расчета динамики температуры в композитной капле на основе аналитической формулы, полученной авторами ранее, и данных численного интегрирования уравнения теплопроводности оригинальным методом конечных объемов. Установлено хорошее согласование результатов моделирования в рамках двух принципиально различных подходов.

Численная схема строилась исходя из современных тенденций вычислительной математики. Использование метода конечных объемов позволило получить консервативную разностную схему по пространственным переменным. Расчет системы ОДУ для нахождения значений искомым функций в узлах сетки реализовывался на основе стандартных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В системе разностных уравнений выполнялись условия равенства температуры и тепловых потоков на границе раздела сред «углеводород – вода». В разностной схеме на полуэмпирическом уровне учитывались зависимость коэффициента теплоотдачи от испарения углеводорода с поверхности капли и поглощение теплового излучения.

В работе также представлено сопоставление результатов расчета по обоим методикам с экспериментальными данными из литературы.

Обозначения

N — число узлов сетки,	ΔH_O — энтальпия фазового перехода, Дж/кг,
R — радиус капли, м,	ε_O — коэффициент абсорбции излучения,
r — радиус в сферической системе координат, м,	Θ — температура, К,
t — время, с,	λ — теплоемкость, Вт/(м·К),
U — скорость, м/с,	κ — коэффициент температуропроводности, м ² /с,
V — объем, м ³ ,	ρ — плотность, кг/м ³ ,
A_n — коэффициенты разложения начального распределения по собственным функциям,	σ_{SB} — постоянная Стефана – Больцмана, Вт/(м ² ·К),
α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м ² ·К),	X — собственные функции,
$\delta_{n,m}$ — символ Кронекера,	χ — объемная концентрация,
	ω — собственные значения.

Индексы

* — безразмерные величины,	W boil — температура начала кипения воды,
O — углеводород,	G — газ,
W — вода,	Boil — начало кипения воды.

Список литературы

1. Ithnin A.M., Noge H., Radir H.A., Jazair W. An overview of utilizing water-in-diesel emulsion fuel in diesel engine and its potential research // J. Energy Inst. 2014. Vol. 87. P. 273–288.
2. Ogunkoya D., Li S., Rojas O.J., Fang T. Performance, combustion, and emissions in a diesel engine operated with fuel-in-water emulsions based on lignin // Appl. Energy. 2015. Vol. 154. P. 851–861.
3. Elsanusi O.A., Roy M.M., Sidhu M.S. Experimental investigation on a diesel engine fueled by diesel-biodiesel blends and their emulsions at various engine operating conditions // Applied Energy. 2017. Vol. 203. P. 582–593.

4. Антонов Д.В., Войтков И.С., Волков Р.С., Высокоморная О.В. Режимы взрывного разрушения капель эмульсий воды с нефтепродуктами при интенсивном нагреве // Инж.-физ. журн. 2019. Т. 92, № 2. С. 414–424.
5. Волков Р.С., Кузнецов Г.В., Стрижак П.А. Условия и характеристики высокотемпературных процессов вскипания и распада капель водных эмульсий // Инж.-физ. журн. 2019. Т. 92, № 1. С. 258–268.
6. Antonov D.V., Piskunov M.V., Strizhak P.A. Breakup and explosion of droplets of two immiscible fluids and emulsions // Intern. J. Thermal Sci. 2019. Vol. 142. P. 30–41.
7. Shinjo J., Xia J., Ganippa L., Megaritis A. Physics of puffing and microexplosion of emulsion fuel droplets // Physics of Fluids. 2014. Vol. 26. P. 103302-1–103302-22.
8. Shinjo J., Xia J., Ganippa L.C., Megaritis A. Puffing-enhanced fuel/air mixing of an evaporating n-decane/ethanol emulsion droplet and a droplet group under convective heating // J. Fluid Mech. 2016. Vol. 793, No. 4. P. 444–476.
9. Fostiropoulos S., Strotos G., Nikolopoulos N., Gavaises M. A simple model for breakup time prediction of water-heavy fuel oil emulsion droplets // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2021. Vol. 164. P. 120581-1–120581-10.
10. Sazhin S.S., Rybdylova O., Crua C., Heikal M., Ismael M.A., Nissar Z., Rashid A., Aziz B.A. A simple model for puffing/micro-explosions in water-fuel emulsion droplets // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2019, Vol. 131. P. 815–821.
11. Nissar Z., Rybdylova O., Sazhin S.S., Heikal M., Rashid A., Aziz B.A., Ismael M.A. A model for puffing/microexplosions in water/fuel emulsion droplets // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2020. Vol. 149. P. 119208-1–119208-38.
12. Sazhin S.S., Bar-Kohany T., Nissar Z., Antonov D., Strizhak P.A., Rybdylova O.D. A new approach to modelling micro-explosions in composite droplets // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2020. Vol. 161. P. 120238-1–120238-38.
13. Деревич И.В., Матюхина Д.И. Модель микровзрыва композитных капель углеводород–вода: точное решение // Письма в ЖТФ. 2024. Т. 50, №. 7. С. 23–26.
14. Деревич И.В., Матюхина Д.И. Аналитическая модель микровзрыва композитной капли углеводород–вода // Инж.-физ. журн. 2024. Т. 97, № 5. С. 1–110.
15. Abramzon B., Sirignano W.A. Droplet vaporization model for spray combustion calculations // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1989. Vol. 32. P. 1605–1618.
16. Renksizbulut M., Bussmann M., Li X. A droplet vaporization model for spray calculations // Part. Part. Systems Characterization. 1992. Vol. 9. P. 59–65.

*Статья поступила в редакцию 18 января 2024 г.,
после доработки — 3 апреля 2024 г.,
принята к публикации 13 июня 2024 г.*