ЛИТЕРАТУРА

1. **Yew C. H., Kendrick R. B.** A study of damage in composite panels produced by hypervelocity impact // Int. J. Impact Engng.— 1987.— 5, N 1—4.— P. 729—738.
2. **Schouberg W. P.** Hypervelocity impact response of spaced composite materials structures // Ibid.— 1990.— 10, N 1—4.— P. 509—523.
3. **Christiansen E. L.** Investigation of hypervelocity impact damage to space station truss tubes // Ibid.— P. 125—133.
4. **Титов В. М., Фадеенко Ю. И.** Сквозное пробивание при метеоритном ударе // Космические исследования.— 1972.— **10**, вып. 4.— С. 589—595.
5. **Титов В. М., Фадеенко Ю. И., Титова Н. С.** Разгон твердых частиц кумулятивным взрывом // Докл. АН.— 1968.— **180**, вып. 5.— С. 1051.
6. **Урушкин В. П., Горшков Н. Н., Титов В. М.** Методика имитации в лабораторных условиях удара каменных метеоритов // ФГВ.— 1977.— **13**, № 3.— С. 439—442.
7. **Мержиевский Л. А., Титов В. М.** Разрушение тонкостенного трубопровода, заполненного жидкостью, при ударах метеоритов // Космические исследования.— 1973.— **11**, вып. 6.— С. 944.
8. **Астанин В. В., Романченко В. И.** Прочность и сжимаемость стеклопластика при ударе // Механика композитных материалов.— 1984.— № 4.— С. 731—734.

г. Новосибирск *Поступила в редакцию 26/XII 1991*

УДК 539.3

А. Д. Реснянский, Е. И. Роменский

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВОЛОКНИСТОГО ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОГО КОМПОЗИТА

С помощью феноменологической процедуры осреднения и использованием только свойств фаз получена модель волокнистого гомогенного термовязкоупругого композита. Система уравнений динамики композита замыкается уравнением состояния (упругим потенциалом), по которому вычисляются напряжения и температура. Полученные уравнения удовлетворяют принципу симметрии Онзагера и являются термодинамически корректными. При выводе уравнений не использовалось предположение о регулярности расположения волокон и о постоянстве времен релаксации, так что кинетические коэффициенты могут зависеть от состояния среды.

Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие модели, рассмотренной в [1, 2], где предложена процедура феноменологического усреднения для вывода уравнений динамического поведения вязкоупругого композита в случае малых упругих деформаций. При этом вводятся новые макроскопические внутренние переменные, характеризующие неоднородность поля напряжений вдоль линий укладки компонентов композита. Наличие ненулевого поля этих переменных, определяющих неравновесные микронапряжения, может существенно менять динамику макроскопического поведения композита.

В данной работе проведена процедура феноменологического усреднения и вывода уравнений для связанных термических и деформационных процессов в волокнистом однонаправленном композите.

Рассмотрим двухфазный волокнистый композит, образованный параллельными вязкоупругими волокнами, помещенными в вязкоупругую матрицу. Относительно взаимного расположения волокон не делается никаких предположений, известными считаются только объемные концентрации и все необходимые свойства фаз.

Предположим, что каждая фаза композита описывается релаксационными уравнениями Максвелла для малых упругих деформаций [3]:

$$\rho_\alpha \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}^\alpha}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^\alpha}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x_i}\right) = -\varphi_{ij}^\alpha, \quad \frac{\partial s^\alpha}{\partial t} = \varkappa^\alpha;$$

$$\varkappa^\alpha = \frac{1}{2T^\alpha \mu_\alpha \tau_\alpha} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sigma_{ij}^\alpha - \frac{1}{3}\left(\sigma_{11}^\alpha + \sigma_{22}^\alpha + \sigma_{33}^\alpha\right)\delta_{ij}\right)^2 = \tag{1}$$

$$= -\frac{1}{T_\alpha}\sigma_{ij}^\alpha \varphi_{ij}^\alpha, \quad \varphi_{ij}^\alpha = \frac{\sigma_{ij}^\alpha - \frac{1}{3}\left(\sigma_{11}^\alpha + \sigma_{22}^\alpha + \sigma_{33}^\alpha\right)\delta_{ij}}{2\mu_\alpha \tau_\alpha}.$$

Здесь для каждого компонента ($\alpha = 1{,}2$): u_i^α — вектор скорости, σ_{ij}^α — тензор напряжения, ε_{ij}^α — тензор эффективных упругих деформаций, s^α — энтропия на единицу объема, T^α — температура, $\rho_\alpha = \mathrm{const}$ — плотность, μ_α — модуль сдвига, τ_α — время релаксации касательных напряжений, которое можно считать функцией параметров состояния среды. Верхние индексы обозначают принадлежность параметра соответствующей фазе композита.

Напряжения и температура связаны с деформациями и энтропией посредством упругого потенциала (внутренняя энергия на единицу объема)

$$U^\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2}\left(\varepsilon_{11}^\alpha + \varepsilon_{22}^\alpha + \varepsilon_{33}^\alpha\right)^2 + \mu_\alpha\left(\left(\varepsilon_{11}^\alpha\right)^2 + \left(\varepsilon_{22}^\alpha\right)^2 + \left(\varepsilon_{33}^\alpha\right)^2 + 2\varepsilon_{12}^\alpha\varepsilon_{21}^\alpha + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon_{23}^\alpha\varepsilon_{32}^\alpha + 2\varepsilon_{31}^\alpha\varepsilon_{13}^\alpha\right) - \pi_\alpha\left(\varepsilon_{11}^\alpha + \varepsilon_{22}^\alpha + \varepsilon_{33}^\alpha\right)s^\alpha + \frac{\omega_\alpha}{2}(s^\alpha)^2 + T_0 s^\alpha \tag{2}$$

по формулам

$$\sigma_{ij}^\alpha = \frac{\partial U^\alpha}{\partial \varepsilon_{ij}^\alpha} = \lambda_\alpha\left(\varepsilon_{11}^\alpha + \varepsilon_{22}^\alpha + \varepsilon_{33}^\alpha\right)\delta_{ij} + 2\mu_\alpha\varepsilon_{ij}^\alpha - \pi_\alpha s^\alpha \delta_{ij}, \tag{3}$$

$$T^\alpha = \frac{\partial U^\alpha}{\partial s^\alpha} = T_0 + \omega_\alpha s^\alpha - \pi_\alpha\left(\varepsilon_{11}^\alpha + \varepsilon_{22}^\alpha + \varepsilon_{33}^\alpha\right). \tag{4}$$

Здесь T_0 — начальная температура; λ_α, μ_α — коэффициенты Ламе, постоянные материалов компонентов ω_α и π_α связаны с удельной теплоемкостью при постоянном объеме c_V^α и коэффициентом объемного расширения l_α формулами

$$\omega_\alpha = \frac{T_0}{c_V^\alpha}, \quad l_\alpha = \pi_\alpha \Big/ \left(\omega_\alpha\left(\lambda_\alpha + \frac{2}{3}\mu_\alpha\right) - (\pi_\alpha)^2\right).$$

Задача заключается в том, чтобы, используя известные уравнения движения каждой фазы композита (1)—(4), вывести уравнения динамики композита как гомогенной сплошной среды.

Пусть волокна расположены параллельно оси x_1, их объемная концентрация c, тогда $(1-c)$ — объемная концентрация матрицы. Примем обозначения для усредненных величин (A_α — характеристика α-й фазы):

$$\langle A\rangle = cA_1 + (1-c)A_2, \quad \tilde{A} = (1-c)A_1 + cA_2 = A_1A_2\langle A^{-1}\rangle.$$

При построении модели будем использовать односкоростное и однотемпературное приближение, т. е. считаем, что

$$u_i^1 = u_i^2 = u_i, \tag{5}$$

$$T^1 = T^2 = T. \tag{6}$$

Система постулатов, необходимых для вывода уравнений гомогенной среды, кроме (5) и (6) содержит следующие связи:

$$\sigma_{ij}^\alpha = \sigma_{ij}, \quad (i, j) \neq (1, 1), \quad \alpha = 1, 2, \tag{7}$$

$$\sigma_{11} = c\sigma_{11}^1 + (1-c)\sigma_{11}^2, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{ij} = c\left(\varepsilon_{ij}^1 - \dot{\varepsilon}_{ij}^1\right) + (1-c)\left(\varepsilon_{ij}^2 - \dot{\varepsilon}_{ij}^2\right), \quad (i, j) \neq (1, 1), \tag{9}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 - \dot{\varepsilon}_{11}^1 = \varepsilon_{11}^2 - \dot{\varepsilon}_{11}^2, \tag{10}$$

$$s = cs^1 + (1-c)s^2. \tag{11}$$

Соотношения (5)—(7) постулируют однородность поля скоростей, поля температуры и компонентов тензора напряжений, кроме напряжений σ_{11}, действующего вдоль волокон, т. е. вдоль оси x_1, а для σ_{11} естественно применить правило смесей (8). В (9), (10) принято, что деформации ε_{ij} отсчитываются от «стандартного» состояния $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha}$, при этом все ε_{ij} вычисляются по правилу смесей, кроме ε_{11}, которая одна и та же для обеих фаз. Для энтропии принята естественная гипотеза аддитивности (11).

Как видно, данные гипотезы допускают существование ненулевых напряжений σ_{11}^{α} в каждой фазе, даже если все макронапряжения равны нулю. Из (10) следует, что введение параметров $\Delta = \varepsilon_{11}^1 - \varepsilon_{11}^2 = \dot{\varepsilon}_{11}^1 - \dot{\varepsilon}_{11}^2$ позволяет выразить все деформации и энтропию для каждой из фаз через макроскопические характеристики композита: тензор деформации ε_{ij}, энтропию s и «неравновесность» Δ. Определим равновесное «стандартное» состояние, от которого отсчитывается деформация. Характеристики этого состояния $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha}$, $\dot{s}^{\alpha}$ удовлетворяют условиям отсутствия макронапряжений при нормальной температуре T_0:

$$
\begin{gathered}
\sigma_{ij}^{\alpha} = 0, \quad (i, j) \neq (1, 1), \quad \alpha = 1, 2, \\
\sigma_{11} = c\sigma_{11}^1 + (1-c)\sigma_{11}^2 = 0, \\
T^{\alpha} = T_0, \quad \alpha = 1, 2.
\end{gathered} \tag{12}
$$

С помощью формул (3), (4) система (12) может быть решена относительно $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha}$, $\dot{s}^{\alpha}$:

$$
\begin{gathered}
\dot{\varepsilon}_{11}^1 = \frac{(1-c)\langle \widehat{E}_2 \rangle}{\langle \widehat{E} \rangle}\Delta, \quad \dot{\varepsilon}_{11}^2 = -\frac{c\langle \widehat{E}_1 \rangle}{\langle \widehat{E} \rangle}\Delta, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} = 0, \quad i \neq j, \quad \alpha = 1, 2, \\
\dot{\varepsilon}_{22}^1 = \dot{\varepsilon}_{33}^1 = -\frac{\widehat{\lambda}_1}{2(\widehat{\lambda}_1 + \mu_1)}\dot{\varepsilon}_{11}^1, \quad \dot{\varepsilon}_{22}^2 = \dot{\varepsilon}_{33}^2 = -\frac{\widehat{\lambda}_2}{2(\widehat{\lambda}_2 + \mu_2)}\dot{\varepsilon}_{11}^2, \\
\dot{s}^1 = \frac{\pi_1}{\omega_1}\frac{\mu_1}{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\mu}_1}\dot{\varepsilon}_{11}^1, \quad \dot{s}^2 = \frac{\pi_2}{\omega_2}\frac{\mu_2}{\widehat{\lambda}_2 + \mu_2}\dot{\varepsilon}_{11}^2.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Здесь $\widehat{\lambda}_i = \lambda_i - \dfrac{\pi_i^2}{\omega_i}$; $\widehat{E}_i = \dfrac{\mu_i(3\widehat{\lambda}_i + 2\mu_i)}{\widehat{\lambda}_i + \mu_i}$. Таким образом, «стандартное» равновесное состояние определяется параметром Δ, характеризующим неустранимую разницу упругих деформаций фаз $\dot{\varepsilon}_{11}^{\alpha}$ вдоль оси x_1. Отметим, что таким образом введенное «стандартное» состояние характеризуется ненулевой энтропией $\dot{s}$, определяемой существующей неравновесностью:

$$
\begin{gathered}
\dot{s} = c\dot{s}^1 + (1-c)\dot{s}^2 = B\vartheta\Delta, \\
B = \frac{c(1-c)\widehat{E}_1\widehat{E}_2}{\langle \widehat{E} \rangle}, \quad \vartheta = \frac{\pi_1}{\omega_1(3\widehat{\lambda}_1 + 2\mu_1)} - \frac{\pi_2}{\omega_2(3\widehat{\lambda}_2 + 2\mu_2)}.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Теперь можно выразить параметры состояния каждой фазы через макроскопические характеристики материала. Для этого используя (3), (4), (13), выразим $\varepsilon_{ij}^{\alpha}$, s^{α} через ε_{ij}, s, Δ из уравнений (6)—(11)

$$
\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_{11} + \dot{\varepsilon}_{11}^1, \quad \varepsilon_{11}^2 = \varepsilon_{11} + \dot{\varepsilon}_{11}^2,
$$

$$
\varepsilon_{22}^1 = \frac{(1-c)(\lambda_2' - \lambda_1')}{2(\widetilde{\lambda}' + \widetilde{\mu})}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_2' + \mu_2}{\widetilde{\lambda}' + \widetilde{\mu}} + \frac{\mu_2}{\widetilde{\mu}}\right)\varepsilon_{22} +
+ \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_2' + \mu_2}{\widetilde{\lambda}' + \widetilde{\mu}} - \frac{\mu_2}{\widetilde{\mu}}\right)\varepsilon_{33} - \frac{\pi_2'}{2(\widetilde{\lambda}' + \widetilde{\mu})}(s - \dot{s}) + \dot{\varepsilon}_{22}^1,
$$

$$\varepsilon_{22}^2 = -\frac{c\,(\lambda_2' - \lambda_1')}{2\,(\tilde\lambda' + \tilde\mu)}\,\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1' + \mu_1}{\tilde\lambda' + \tilde\mu} + \frac{\mu_1}{\tilde\mu}\right)\varepsilon_{22} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1' + \mu_1}{\tilde\lambda' + \tilde\mu} - \frac{\mu_1}{\tilde\mu}\right)\varepsilon_{33} - \frac{\pi_1'}{2\,(\tilde\lambda' + \tilde\mu)}\,(s - \dot s) + \dot\varepsilon_{22}^2,$$

$$\varepsilon_{ij}^1 = \frac{\langle\mu^{-1}\rangle^{-1}}{\mu_1}\,\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^2 = \frac{\langle\mu^{-1}\rangle^{-1}}{\mu_2}\,\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j, \tag{15}$$

$$s^1 = (1 - c)\left(\frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\frac{\lambda_2' - \lambda_1'}{\tilde\lambda' + \tilde\mu} - \frac{\pi_2 - \pi_1}{\tilde\omega}\right)\varepsilon_{11} + \left(\frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\frac{\lambda_2' + \mu_2}{\tilde\lambda' + \tilde\mu} - \frac{\pi_2}{\tilde\omega}\right)(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) +$$

$$+ \left(\frac{\omega_2}{\tilde\omega} - \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\frac{\pi_2'}{\tilde\lambda' + \tilde\mu}\right)(s - \dot s) + \dot s^1,$$

$$s^2 = -c\left(\frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\frac{\lambda_2' - \lambda_1'}{\tilde\lambda' + \tilde\mu} - \frac{\pi_2 - \pi_1}{\tilde\omega}\right)\varepsilon_{11} + \left(\frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\frac{\lambda_1' + \mu_1}{\tilde\lambda' + \tilde\mu} - \frac{\pi_1}{\tilde\omega}\right)(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) +$$

$$+ \left(\frac{\omega_1}{\tilde\omega} - \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\frac{\pi_1'}{\tilde\lambda' + \tilde\mu}\right)(s - \dot s) + \dot s^2.$$

Здесь $\pi_1' = \pi_1 - \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\omega_1$; $\pi_2' = \pi_2 - \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\omega_2$; $\lambda_1' = \lambda_1 - \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\pi_1$; $\lambda_2' = \lambda_2 - \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\pi_2$; формулы для ε_{33}^α получаются из зависимостей для ε_{22}^α в (15) круговой заменой ε_{22} на ε_{33}.

Выражения (15) параметров состояния каждой фазы через макроскопические параметры состояния однородного материала позволяют получить формулу зависимости внутренней энергии композита, а также формулы для вычисления напряжений и температуры. Таким образом, из (3), (7), (8) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{33} - d_1(s - \dot s), \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33} - d_2(s - \dot s) = 0, \\ \sigma_{33} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{22}\varepsilon_{33} - d_2(s - \dot s), \\ \sigma_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{23} = C_{66}\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{31} = C_{66}\varepsilon_{31}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{11} &= \langle\lambda + 2\mu\rangle - c(1 - c)\,\frac{(\lambda_2' - \lambda_1')^2}{\tilde\lambda' + \tilde\mu} + \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\langle\pi^{-1}\rangle^{-1}, \\ C_{12} &= \left\langle\frac{\lambda'}{\lambda' + \mu}\right\rangle\left\langle\frac{1}{\lambda' + \mu}\right\rangle^{-1} + \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\langle\pi^{-1}\rangle^{-1}, \\ C_{22} &= \left\langle\frac{1}{\lambda' + \mu}\right\rangle^{-1} + \left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1} + \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\langle\pi^{-1}\rangle^{-1}, \\ C_{23} &= \left\langle\frac{1}{\lambda' + \mu}\right\rangle^{-1} - \left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1} + \frac{\tilde\pi}{\tilde\omega}\,\langle\pi^{-1}\rangle^{-1}, \\ C_{66} &= \frac{1}{2}\,(C_{22} - C_{23}) = \left\langle\frac{1}{\mu}\right\rangle^{-1}, \\ d_1 &= \left\langle\frac{\pi}{\omega}\right\rangle\langle\pi^{-1}\rangle^{-1} - c(1 - c)\,\frac{(\lambda_2' - \lambda_1')(\pi_2' - \pi_1')}{\tilde\lambda' + \tilde\mu}, \\ d_2 &= \left\langle\frac{\pi}{\omega}\right\rangle\langle\pi^{-1}\rangle^{-1} - c(1 - c)\,\frac{(\lambda_2' - \lambda_1' + \mu_2 - \mu_1)(\pi_2' - \pi_1')}{\tilde\lambda' + \tilde\mu}. \end{aligned} \tag{17}$$

Из (4), (6), (15) для температуры следует

$$T = T_0 - d_1\varepsilon_{11} - d_2(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \Omega(s - \dot s), \tag{18}$$

где

$$\Omega = \langle\omega^{-1}\rangle^{-1} - c(1 - c)\,\frac{(\pi_2' - \pi_1')^2}{\tilde\lambda' + \tilde\mu}. \tag{19}$$

Ниже мы убедимся, что напряженная σ_{ij} и температура T, определяемые формулами (16), (18), могут быть вычислены как производные упругого потенциала композита $U = cU^1 + (1-c)U^2$:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Для вычисления U удобно вместо (2) использовать представление

$$U^\alpha = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^\alpha \varepsilon_{ij}^\alpha + \frac{1}{2}(T^\alpha - T_0)s^\alpha + T_0 s^\alpha.$$

Используя теперь (6)—(8), получим

$$U = \frac{1}{2}C_{11}(\varepsilon_{11})^2 + \frac{1}{2}C_{22}(\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2 + C_{12}\varepsilon_{11}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) +$$
$$+ C_{23}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + C_{66}(\varepsilon_{12}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23}\varepsilon_{32} + \varepsilon_{31}\varepsilon_{13}) + \frac{1}{2}B\Delta^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\Omega(s - \dot{s})^2 - d_1\varepsilon_{11}(s - \dot{s}) - d_2(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})(s - \dot{s}) + T_0 s. \qquad (20)$$

B, C_{ij}, d_i, Ω вычисляются по (14), (17), (19).

Итак, получена зависимость внутренней энергии U композита от характеров характеризующих макроскопическое поведение композита: ε_{ij}, s, Δ. Как видно, зависимость энергии от Δ описывается не только слагаемым $1/2B(\Delta)^2$, но и входит через зависимость (14) $\dot{s}$ от Δ, так что $q = \partial U/\partial\Delta = B\Delta'$, $\Delta' = \Delta - \vartheta(T - T_0)$. Тензор модулей упругости обладает свойствами симметрии трансверсально-изотропного материала.

Таким образом, получена феноменологическая зависимость термодинамических параметров композита от микронапряжений фаз, его составляющих.

Для вычисления напряжений в составляющих композита необходима зависимость σ_{11}^α от σ_{ij}, T и q, которую можно получить из (3), (4) и (15):

$$\sigma_{11}^1 = \frac{\hat{E}_1}{\langle\hat{E}\rangle}\sigma_{11} + \left(\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_1 + \mu_1} - \left\langle\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + \mu}\right\rangle\frac{\hat{E}_1}{\langle\hat{E}\rangle}\right)\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} + \frac{1}{c}q,$$
$$\sigma_{11}^2 = \frac{\hat{E}_2}{\langle\hat{E}\rangle}\sigma_{11} + \left(\frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_2 + \mu_2} - \left\langle\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + \mu}\right\rangle\frac{\hat{E}_2}{\langle\hat{E}\rangle}\right)\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} - \frac{1}{1-c}q. \qquad (21)$$

Теперь перейдем к выводу дифференциальных уравнений динамики композита для его макроскопических характеристик — скоростей u_i, деформаций ε_{ij}, параметра неравновесности Δ и энтропии s.

Используя гипотезу односкоростного приближения (5), а также предположения (7), (8), из (1) получаем

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \qquad (22)$$

Здесь $\rho = \langle\rho\rangle = c\rho_1 + (1-c)\rho_2$, а σ_{ij} вычисляются из (16).

Для вывода уравнений эволюции тензора макродеформаций ε_{ij} и параметра Δ нужно привлечь их определения (9), (10), а также выражения (13) для $\dot{\varepsilon}_{ij}^\alpha$. После громоздких преобразований получим следующие уравнения

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -\varphi_{ij}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\psi, \qquad (23)$$

где φ_{ij} и ψ описывают скорости изменения неупругих деформаций, а формулы для их вычисления таковы:

$$\varphi_{11} = \alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{12}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \beta_1 q,$$
$$\varphi_{22} = \alpha_{12}\sigma_{11} + \alpha_{22}\sigma_{22} + \alpha_{23}\sigma_{33} + \beta_2 q,$$
$$\varphi_{33} = \alpha_{12}\sigma_{11} + \alpha_{23}\sigma_{22} + \alpha_{22}\sigma_{33} + \beta_2 q, \qquad (24)$$

$$\varphi_{12} = \alpha_{66}\sigma_{12},\ \varphi_{23} = \alpha_{66}\sigma_{23},\ \varphi_{31} = \alpha_{66}\sigma_{31},$$
$$\psi = \beta_1\sigma_{11} + \beta_2(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \gamma q.$$

Здесь $q = \frac{\partial U}{\partial \Delta}$, а коэффициенты α_{ij}, β_i, γ вычисляются по формулам

$$\alpha_{11} = \frac{1}{3\langle \widehat{E}\rangle^2}\left\langle \frac{\widehat{E}}{\mu\tau}\right\rangle,\ a_{12} = \frac{-1}{6\langle \widehat{E}\rangle}\left\langle \frac{\widehat{E}(\Lambda)^2}{\tau}\right\rangle,\ \alpha_{22} = \frac{1}{12}\left\langle \frac{\mu(\Lambda)^2}{\tau}\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle \frac{1}{\mu\tau}\right\rangle,$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{12}\left\langle \frac{\mu(\Lambda)^2}{\tau}\right\rangle - \frac{1}{4}\left\langle \frac{1}{\mu\tau}\right\rangle,\ \beta_1 = \frac{1}{3\langle \widehat{E}\rangle}\left(\frac{\widehat{E}_1}{\mu_1\tau_1} - \frac{\widehat{E}_2}{\mu_2\tau_2}\right),$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{6}\left(\frac{\Lambda_1}{\tau_1} - \frac{\Lambda_2}{\tau_2}\right),\ \gamma = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c\mu_1\tau_1} + \frac{1}{(1-c)\mu_2\tau_2}\right),\ \alpha_{66} = \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{\mu\tau}\right\rangle,$$

$$\Lambda_\alpha = \frac{\widehat{E}_\alpha}{\mu_\alpha\langle \widehat{E}\rangle}\left\langle \frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\lambda}+\mu}\right\rangle + \frac{1}{\widehat{\lambda}_\alpha + \mu_\alpha},$$

при этом выполнено тождество $\langle \mu\Lambda\rangle = 1$.

Таким образом, получена система уравнений эволюции макродеформаций (23) с правыми частями (24), описывающими кинетику неупругого деформирования. Тензор α_{ij} обладает свойствами симметрии трансверсально изотропного материала. Важное обстоятельство состоит в том, что правые части φ_{ij}, ψ симметричны относительно переменных σ_{ij}, q. Это означает, что описание диссипативных процессов в полученной модели удовлетворяет принципу симметрии Онзагера.

Теперь осталось вывести уравнение для макроэнтропии. Используя определение (11) для s и (1) для s^α, получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} = c\frac{\partial s^1}{\partial t} + (1-c)\frac{\partial s^2}{\partial t} = c\varkappa^1 + (1-c)\varkappa^2 = \varkappa. \tag{25}$$

Непосредственно из (25), так как $\varkappa^\alpha \geqslant 0$, следует неотрицательность производства энтропии $\varkappa \geqslant 0$. Конкретные формулы для вычисления $\varkappa$ можно получить из представления $\varkappa^\alpha$ в уравнениях (1), используя предположения об однородности напряжений (7) и выражения (21) для σ_{11} через σ_{ij} и q.

Нетрудно убедиться, что выполнен закон сохранения энергии для композита

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \tag{26}$$

который получается из аналогичных законов сохранения для каждой фазы. Уравнение эволюции макроэнтропии (25) могло быть также получено из (26) и (23), используя выражение (20) для упругого потенциала U.

Итак, получена система уравнений (22), (23), (26) динамики композита, состояние которого описывается параметрами u_i, ε_{ij}, Δ, s. Укажем несколько важных следствий этой системы. Покажем, что в композите имеется неупругое изменение плотности, обусловленное наличием микронапряжений. Действительно, из определений (9), (10) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = c\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^1_{11} + \varepsilon^1_{22} + \varepsilon^1_{33}) + (1-c)\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon^2_{11} + \varepsilon^2_{22} + \varepsilon^2_{33}) -$$
$$- c\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\varepsilon}^1_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22} + \dot{\varepsilon}^1_{33}) - (1-c)\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\varepsilon}^2_{11} + \dot{\varepsilon}^2_{22} + \dot{\varepsilon}^2_{33}) =$$
$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - B\cdot\left(\frac{1}{3\widehat{\lambda}_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\widehat{\lambda}_2 + 2\mu_2}\right)\frac{\partial \Delta}{\partial t}.$$

Видно, что изменение плотности сопровождается неупругим изменением, обусловленным микронапряжениями и описываемым слагаемым в правой части: $B\cdot\left(\frac{1}{3\widehat{\lambda}_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\widehat{\lambda}_2 + 2\mu_2}\right)$.

Интересно выяснить, каковы условия кинетического равновесия неупругих деформаций или, другими словами, каково поле напряжений в состоянии, когда прошли все процессы релаксации (для изотропной среды в таком состоянии тензор напряжений шаровой). Эти условия определяются решением системы уравнений $\varphi_{ij} = 0$, $\psi = 0$, которое имеет вид

$$\sigma_{ij} = 0,\ i \neq j;\ \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma,$$

$$\sigma = (q/B)\Big/\left(\frac{1}{3\widehat{\lambda}_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\widehat{\lambda}_2 + 2\mu_2}\right) = \Delta'\Big/\left(\frac{1}{3\widehat{\lambda}_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\widehat{\lambda}_2 + 2\mu_2}\right).$$

Выведем формулы для определения эффективных теплофизических характеристик композита — коэффициентов теплового расширения и теплоемкости в упругих процессах. Рассматривая процесс нагревания при постоянных напряжениях, из (16), (18) получим

$$d\sigma_{11} = C_{11}d\varepsilon_{11} + 2C_{12}d\varepsilon_{22} - d_1 d(s - \dot{s}) = 0,$$

$$d\sigma_{22} = C_{12}d\varepsilon_{11} + (C_{22} + C_{23})d\varepsilon_{22} - d_2 d(s - \dot{s}) = 0,$$

$$dT = \Omega d(s - \dot{s}) - d_1 d\varepsilon_{11} - 2d_2 d\varepsilon_{22}.$$

Отсюда получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов линейного теплового расширения $\alpha_1 = \left(\frac{d\varepsilon_{11}}{dT}\right)_{\sigma_{ij}=\mathrm{const}}$, $\alpha_2 = \left(\frac{d\varepsilon_{22}}{dT}\right)_{\sigma_{ij}=\mathrm{const}}$:

$$\left(C_{11} - \frac{d_1^2}{\Omega}\right)\alpha_1 + 2\left(C_{12} - \frac{d_1 d_2}{\Omega}\right)\alpha_2 = \frac{d_2}{\Omega},$$

$$\left(C_{12} - \frac{d_1 d_2}{\Omega}\right)\alpha_1 + \left(C_{22} + C_{23} - \frac{2d_2^2}{\Omega}\right)\alpha_2 = \frac{d_2}{\Omega}.$$

Решая систему, получим

$$\alpha_1 = \frac{1}{\langle \widehat{E} \rangle}\left\langle \frac{\pi}{\omega}\, \frac{\mu}{\widehat{\lambda} + \mu} \right\rangle,$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \mu \rangle}{\langle \widehat{E} \rangle}\left\langle \frac{\pi/\omega}{\widehat{\lambda} + \mu} \right\rangle - \frac{c(1-c)}{2\langle \widehat{E} \rangle}\,\frac{\widehat{\lambda}_1}{\widehat{\lambda}_1 + \mu_1}\,\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_2 + \mu_2}(\mu_2 - \mu_1)\left(\frac{\pi_2/\omega_2}{\widehat{\lambda}_2} - \frac{\pi_1/\omega_1}{\widehat{\lambda}_1}\right).$$

Из выражения (20) для упругого потенциала U нетрудно получить также формулу для вычисления теплоемкости при постоянном объеме. Для этого в предположении $d\varepsilon_{ij} = 0$, $d\Delta = 0$, используя $dT = \Omega \cdot d(s - \dot{s})$, получим $dU = (T/\Omega) \cdot dT$, откуда следует

$$c_V = \frac{T_0}{\Omega} = T_0\Big/\left(\langle \omega^{-1} \rangle^{-1} - c(1-c)\frac{(\pi_2' - \pi_1')^2}{\widetilde{\lambda}' + \widetilde{\mu}}\right).$$

Отметим, что вычисленные α_1, α_2 и c_V характеризуют теплофизические свойства материала только в упругих процессах. В случае, когда деформирование необратимо, величины α_1, α_2 и c_V зависят от процесса деформирования и нагрева и для их определения необходимо привлекать уравнения (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Роменский Е. И., Реснянский А. Д.** Вязкоупругая модель композита с учетом микронапряжений.— Новосибирск, 1990.— (Препр./СО АН СССР. ИМ; № 14).
2. **Romensky E. I., Resnyansky A. D., Merzhievsky L. A.** The model of viscoelastic composite // Journ. de Physique IV.— 1991.— 1, Coll. C3.— P. 923—930.
3. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 304 с.

г. Новосибирск *Поступила в редакцию 19/I 1992*